

Envolvente convexa, triangulación de Delaunay y diagrama de Voronoi: tres estructuras geométricas en una, con muchas aplicaciones

por

Manuel Abellanas Oar, Universidad Politécnica de Madrid

Este artículo muestra la relación entre tres de las estructuras más estudiadas en Geometría Computacional: la envolvente convexa, la triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi de un conjunto finito de puntos del plano. El gran interés y la extensa bibliografía que existe sobre estas tres estructuras se debe fundamentalmente a sus múltiples aplicaciones. Mostramos aquí dos de ellas a modo de ejemplo.

1. Envoltentes convexas

Un conjunto de puntos del plano es *convexo* si el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos está totalmente contenido en el conjunto. Así, el propio plano es un conjunto convexo. También lo son los semiplanos determinados por una recta, tanto si incluyen el borde como si no (semiplanos cerrados o abiertos). La intersección de conjuntos convexas es un conjunto convexo, ya que si dos puntos están en la intersección, están en cada uno de los conjuntos convexas que la forman, por lo que el segmento que los une está totalmente contenido en todos ellos y, por tanto, en la intersección. De lo anterior se deduce que las regiones obtenidas por intersección de semiplanos son conjuntos convexas. Si la intersección de una cantidad finita de semiplanos cerrados es acotada y no vacía, es un polígono convexo.

Se llama **cierre convexo** de un conjunto de puntos del plano al menor conjunto convexo que lo contiene (entendiendo *menor* según el orden que proporciona la inclusión de conjuntos).

Es claro que el cierre convexo de cualquier conjunto es un conjunto convexo. También es fácil ver que el cierre convexo de un conjunto coincide con él mismo si, y solo si se trata de un conjunto convexo. **Convexificar** un conjunto es hallar su cierre convexo. La convexificación de conjuntos tiene numerosas aplicaciones. Aquí nos planteamos el caso más sencillo de la convexificación de conjuntos finitos de puntos. Llamaremos envolvente convexa a la frontera del **cierre convexo**. La envolvente convexa determina el cierre convexo.

Veamos cómo resuelve el problema un equipo pluridisciplinar:

Buscando un algoritmo para hallar el cierre convexo de un conjunto finito de puntos del plano, tres personas mantenían la siguiente conversación:

- (A) *El cierre convexo es el menor conjunto convexo que contiene al conjunto dado.*
- (B) *Como la intersección de convexos es convexo, el cierre convexo de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen.*
- (C, que es informático) *Son ustedes matemáticos, ¿verdad?*
- (A y B sorprendidos) *Sí, ¿porqué lo dice?*
- (C) *Porque han hecho afirmaciones interesantes y ciertas, ¡pero inútiles!*

En efecto, ninguna de las alternativas propuestas sirve para hallar el cierre convexo de un conjunto, aunque sea finito, pues ambas requieren la intervención de una cantidad infinita de objetos. Ninguno de los dos métodos acabaría nunca.

Un ingeniero físico que pasaba por allí y oyó la conversación, intervino enseguida diciendo:

- *¡Vaya cosa más simple! Lo único que tienen que hacer es representar los puntos sobre una tabla, clavar, pero no del todo, un clavo en cada punto sobre la tabla y soltar una goma elástica que rodee a todos los clavos. De inmediato la goma elástica les dirá qué forma tiene el cierre convexo.*

Esta propuesta no gustó tampoco al informático, porque él estaba empeñado en desarrollar un programa que permitiera resolver el problema empleando su ordenador. Sin embargo, le sirvió para observar empíricamente algunas propiedades del cierre convexo de un conjunto finito de puntos mientras dejó a los matemáticos discutiendo con el ingeniero físico sobre las propiedades de la contracción de las gomas elásticas.

Estas son las observaciones que hizo el informático:

Observación 1: El cierre convexo de n puntos es un polígono convexo cuyos vértices son puntos del conjunto dado.

Observación 2: Una buena manera de representar un polígono convexo puede ser la enumeración de sus vértices en el mismo orden en que aparecen al recorrer la frontera del polígono.

Observación 3: De las observaciones anteriores se deduce que el problema de calcular el cierre convexo de n puntos del plano es un problema de selección ordenada. Es decir, se trata de seleccionar un subconjunto de los puntos dados y ordenarlos de la forma adecuada.

Estas observaciones llamaron la atención de los matemáticos, que inmediatamente dieron por resuelto el problema:

- *Ya tienes algoritmo* - dijeron al unísono.
- *Como tu conjunto de puntos es finito, toma cada uno de sus subconjuntos y ordénalo de todas las formas posibles. Analiza cada una de esas ordenaciones. Cuando encuentres aquella que describe un polígono convexo tal que todos tus puntos estén contenidos en él, esa será la solución. Ten en cuenta que comprobar si una lista de puntos son los vértices de un polígono convexo es sencillo, ya que sólo tienes que comprobar que el siguiente punto a dos consecutivos esté siempre a la izquierda (o siempre a la derecha) de la recta que determinan. Para eso puedes emplear **áreas signadas**¹.*

El informático, animado por los consejos de los matemáticos implementó el algoritmo sin demasiado esfuerzo. Tuvo, eso si, que encontrar un algoritmo que averigué si un punto está contenido en un polígono convexo, pues es una de las comprobaciones que requería el algoritmo dado por los matemáticos.

Al terminar, probó con algunos ejemplos sencillos y todo fue bien. Lo malo vino cuando trató de emplear su programa con los casos reales a los que debía enfrentarse. Estos eran conjuntos de miles de puntos tomados con un escáner de piezas fabricadas por el cliente que le había solicitado el programa. Con el primero de los casos el ordenador pareció entrar en un sueño profundo del que no despertó hasta que, tras varios días, cansado de esperar, el informático interrumpió el proceso y decidió buscar otra alternativa.

¹El área signada determinada por tres puntos del plano $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ es el área del triángulo que los tiene como vértices con el signo correspondiente a la orientación del

triángulo. Se puede calcular con la expresión $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Un conjunto de n elementos tiene muchos subconjuntos: 2^n . Además, el número de ordenaciones de cada uno de ellos, también es muy elevado. Si tiene k elementos, hay $k!$ ordenaciones. Echando cuentas por lo bajo, resulta que para mil puntos tendríamos que analizar 2^{1000} conjuntos. Aunque nuestro ordenador fuera capaz de analizar cada uno de ellos en una millonésima de segundo, cosa del todo imposible hoy día, teniendo en cuenta que el análisis incluye evaluar todas las permutaciones de sus elementos, ¡necesitaríamos **muchos miles de años** para completar el cálculo!

Esta historia, real como la vida misma, da idea de cuál es la misión de la Geometría Computacional (y de la algorítmica en general). Se trata de resolver problemas geométricos de forma algorítmica, pero eficiente. En el caso que nos ocupa, hay muy buenos algoritmos. Veamos dos de ellos con nombre propio: el algoritmo de Graham [6] y el de Jarvis [7]. Los dos emplean como pieza básica el área signada que se ha mencionado antes.

Algoritmo de Graham

El algoritmo consta de dos fases.

En la primera se ordenan los puntos angularmente alrededor de un punto interior al cierre convexo. Para hallar un punto interior al cierre convexo basta tomar el baricentro de tres de los puntos dados que no estén alineados. La ordenación es una tarea habitual en algorítmica que se repite un gran número de veces. Por eso hay desarrollados buenos algoritmos para hacerlo. En este caso, a pesar de que se trata de una ordenación angular, no es preciso recurrir a funciones trigonométricas (que complicarían el cálculo efectivo). Para ordenar la lista basta emplear como función básica el área signada.

En la segunda se suprimen de la lista ordenada los puntos que no son vértices del cierre convexo. Para ello se hace un recorrido de la lista (conocido como el scan de Graham) en el que, de nuevo, se emplean áreas signadas para decidir si un punto debe ser eliminado o no. Si los puntos están ordenados en sentido antihorario, el área signada de los puntos P_{i-1} , P_i , P_{i+1} nos dice si el punto P_i debe ser eliminado. En efecto, si el área no es positiva, el punto P_i es interior al triángulo P_{i-1} , O , P_{i+1} , donde O es el centro de la ordenación, y, por tanto, interior al cierre convexo. En este caso debe ser eliminado. Para que esta segunda fase proporcione la lista correcta de vértices del cierre convexo es preciso incluir un detalle más: cada vez que se elimine un punto de la lista, se debe dar un paso atrás en el recorrido, ya que al eliminar un punto puede suceder que los tres que pasan a ser consecutivos den lugar a un área signada no positiva, en cuyo caso habría que eliminar el punto intermedio de nuevo.

Este algoritmo realiza solo tres operaciones básicas: comparaciones de números, sumas y productos. Además, el número total de estas operaciones que se

realizan es del orden² $O(n \log n)$. Para hacerse una idea de lo que esto significa, un ordenador personal normal de hoy día puede calcular el cierre convexo de varios millones de puntos en menos de un segundo. Queda claro, por tanto, el gran interés que tiene encontrar algoritmos eficientes, pues podemos pasar de estar ante una solución correcta pero inútil a una solución útil.

Algoritmo de Jarvis

El algoritmo de Jarvis empieza buscando un vértice del cierre convexo y, a partir de él, busca sucesivamente el resto de los vértices en el orden en que aparecen en la frontera. El primer vértice V_1 puede ser el punto de menor ordenada (si hubiera varios, el de menor abscisa de entre ellos). El siguiente, V_2 , es aquél tal que la recta orientada que pasa por V_1 y V_2 deja el resto de los puntos a su izquierda. Lo mismo se repite sucesivamente, de forma que la recta orientada determinada por V_i y V_{i+1} deje todos los demás puntos a su izquierda hasta obtener de nuevo V_1 .

En cada paso se encuentra un nuevo vértice V_{i+1} del cierre convexo. Para ello se emplea de nuevo la función área signada: el signo del área signada de V_i, P_i, P_j , indica cuál de los dos puntos P_i o P_j precede al otro en el orden angular respecto de V_i , y, por tanto, cuál de los dos es candidato a ser el siguiente vértice del cierre convexo. Si se compara sucesivamente el candidato obtenido con los puntos restantes, al final se obtiene el vértice buscado.

Para hallar un nuevo vértice el algoritmo recorre la lista de puntos dados, de manera que en total el algoritmo realiza una cantidad de operaciones del orden $O(nh)$ siendo h el número de vértices del cierre convexo. En el peor caso, cuando el número de vértices sea proporcional al de puntos dados, la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$ y, por tanto, peor que el de Graham. Sin embargo, este algoritmo aventaja al de Graham en aquellos casos en los que el cierre convexo tiene pocos vértices. En particular, si el número de vértices se puede considerar constante respecto al número de puntos dados, el algoritmo de Jarvis llega a ser de complejidad lineal superando notablemente al de Graham. Este es un buen ejemplo de algoritmo de complejidad dependiente del resultado.

2. Triangulación de Delaunay

Para entender qué es una triangulación de un conjunto de puntos del plano sugiero al lector realizar el siguiente experimento:

1. Dibujar n puntos en una hoja de papel (n debería ser al menos 10 para que no resulte demasiado sencillo y no muy grande para que no resulte demasiado

²Es frecuente medir la complejidad de los algoritmos mediante el orden de magnitud de las funciones que indican el número de operaciones consideradas básicas necesarias para ejecutar el algoritmo en el peor caso posible. Para ello se emplea la notación de Landau $O(f(n))$.

largo el experimento)³.

2. Mientras sea posible, conectar dos de los puntos dibujando un segmento (rectilíneo) que no corte a otro segmento previamente dibujado.

El resultado del experimento es (debería ser) una triangulación del conjunto de puntos dado⁴.

Si el lector ha realizado el experimento, se habrá dado cuenta de que ha tenido muchas alternativas para dibujar segmentos, de las cuales ha ido seleccionando uno según su propio criterio o gusto. Es cierto que las alternativas se van reduciendo según vamos dibujando segmentos. De hecho, al final, sólo queda un posible segmento para ser dibujado, tras lo cual no es posible dibujar un nuevo segmento sin producir cortes. En todo caso el número de diferentes triangulaciones que se pueden obtener partiendo del mismo conjunto de puntos es elevado. Contar cuántas triangulaciones hay es un problema interesante de la Geometría combinatoria.

Las triangulaciones juegan un papel importante en numerosas aplicaciones, en especial en modelización matemática. Los métodos de los elementos finitos se basan, en el caso bidimensional, en triangulaciones de conjuntos de puntos del plano y dependen en gran medida de la triangulación elegida. En esta y otras aplicaciones surgen problemas de optimización geométrica derivados de la existencia de diferentes triangulaciones de un conjunto de puntos.

Una condición deseable para la que podríamos calificar de **buena triangulación** es que sus triángulos sean, si no regulares, sí lo más regulares posible. Es claro que si podemos disponer los puntos a nuestro gusto en el plano, podremos conseguir nuestro objetivo de obtener triángulos regulares sin más que disponerlos en los vértices de una malla triangular regular. Pero, en ocasiones, los puntos que constituyen los vértices de la triangulación no son variables si no fijados de antemano. En estas condiciones, ¿cuál es la triangulación "**más regular**" de esos puntos?

Dada una triangulación de n puntos dados, llamemos **vector de ángulos** de la triangulación al vector que tiene como componentes las medidas de todos los ángulos de todos los triángulos de la triangulación ordenados de menor a mayor.

Dos triangulaciones de un mismo conjunto de puntos tienen dos vectores de ángulos de la misma dimensión⁵. Ordenaremos las triangulaciones de un conjunto

³Se recomienda que los puntos estén en posición general, es decir, que no haya tres alineados.

⁴Este experimento se puede convertir en un juego para dos jugadores: Alternativamente los jugadores dibujan los segmentos. El último que consigue dibujar uno, gana. Para un matemático, que conoce la fórmula de Euler, el juego tiene poco interés porque puede conocer de antemano el resultado. Sólo tiene que saber cuántos puntos se han dibujado y cuántos hay en la envolvente convexa (es un ejercicio para el lector atento que se lee hasta las notas a pié de página, el demostrar la afirmación anterior).

Se puede mejorar el juego propuesto de varias maneras para convertirlo en un juego con cierto interés incluso para un matemático.

⁵De nuevo un ejercicio para el lector atento: Demuéstrese que la dimensión del vector de

de puntos empleando el orden lexicográfico de sus vectores de ángulos: diremos que una triangulación es mejor que otra si su vector de ángulos es mayor, es decir, si la primera componente que difiere del vector de la otra es mayor.

El orden lexicográfico es una relación de orden total en \mathbb{R}^n , por lo que en el conjunto de los vectores de ángulos de las triangulaciones de un conjunto existe un elemento máximo. A la triangulación correspondiente se le llama **triangulación de Delaunay**.

Pasemos al problema del cálculo de la triangulación de Delaunay. Para un matemático teórico, para el que el tiempo físico no existe, el problema ya está resuelto. Según la definición anterior, no hay más que hallar todos los vectores de ángulos de todas las triangulaciones del conjunto y quedarse con la triangulación correspondiente al mayor vector. Bien. Aquí se hace necesario acotar inferiormente el número de triangulaciones que puede tener un conjunto de n puntos. No es difícil encontrar como cotas funciones exponenciales de n , lo cual de nuevo nos lleva a la conclusión de que este método, si queremos aplicarlo a un conjunto de mil puntos (o incluso bastante menores), nos exigiría muchos años de cálculo con el mejor de los ordenadores actuales.

Veamos dos métodos de cálculo mucho más eficientes: Al primero lo llamaremos **método del intercambio de aristas** y al segundo **método de la envolvente convexa 3D**.

Método del intercambio de aristas

El método consta de dos pasos:

- Primer paso: hallar una triangulación cualquiera del conjunto de puntos.
- Segundo paso: modificar la triangulación mejorándola sucesivamente hasta obtener la triangulación de Delaunay.

El primer paso no es difícil si disponemos del algoritmo de Graham descrito antes. En efecto, el algoritmo de Graham proporciona, sin coste adicional, una triangulación de los puntos además del cierre convexo. Para ello basta con dos ligeras modificaciones: La primera consiste en elegir un punto cualquiera del conjunto de puntos de entrada como punto para ordenar angularmente los puntos. El punto puede ser el primero de la lista y podemos incluirlo en la lista final ordenada en primer lugar. La segunda modificación consiste en crear una lista de triángulos, que contendrá los triángulos de la triangulación, en la que se incluirán los siguientes triángulos: De momento todos los triángulos P_1, P_i, P_{i+1} , para i desde 2 hasta n (entendiendo los índices módulo n). Además, durante el proceso del *scan de Graham*, se añadirán en la lista los triángulos P_{i-1}, P_i, P_{i+1} cada vez que se

ángulos no depende de la triangulación elegida (indicación: empléese la conocida fórmula de Euler $C + V = A + 2$).

elimine el punto P_i debido a que dicho punto resulta interior. La lista de triángulos resultante es una triangulación del conjunto de puntos. Como vemos, la complejidad, en términos de su orden de magnitud, no aumenta respecto del algoritmo de Graham. Sigue siendo $O(n \log n)$.

El segundo paso es más sencillo aún. Se trata de revisar las aristas (segmentos) de la triangulación una a una, todas las veces que sea necesario, hasta que no quede ninguna ilegal. Veamos qué es una arista ilegal y cómo se puede legalizar mediante un cambio sencillo: Una arista de la triangulación, si no es de la envolvente convexa, separa dos triángulos de la triangulación. Si esos dos triángulos forman un cuadrilátero convexo, la arista será una de sus dos diagonales. En estas circunstancias diremos que la arista es **ilegal** si el círculo circunscrito a uno de los dos triángulos que separa la arista contiene en su interior por completo al otro triángulo. Cualquier otra arista diremos que es **legal**. **Legalizar** una arista ilegal consiste en sustituirla por la otra diagonal del cuadrilátero descrito. Es claro que, salvo que los cuatro vértices del cuadrilátero sean concíclicos, de las dos diagonales de dichos cuadriláteros convexos siempre habrá una que será arista legal y otra ilegal. Tampoco resulta difícil demostrar que al legalizar una arista, cambiando los dos triángulos correspondientes por los nuevos que se generan, se obtiene una triangulación con un vector de ángulos mayor, y, por lo tanto una mejor triangulación⁶. En consecuencia, partiendo de una triangulación cualquiera y legalizando una a una las aristas ilegales, se llega necesariamente al máximo vector de ángulos y su correspondiente triangulación: la triangulación de Delaunay.

Para la validez del algoritmo así como para analizar su complejidad es importante observar que el proceso de mejora no nos lleva a bucles que podrían hacer que el proceso no termine. En efecto, cada legalización de una arista ilegal significa una mejora estricta de la triangulación, o, lo que es lo mismo, a un vector de ángulos estrictamente mayor respecto del orden correspondiente. En consecuencia el proceso termina necesariamente en un número finito de pasos y necesariamente encontrando la mejor de las triangulaciones, la de Delaunay.

La complejidad en el peor caso es $O(n^2)$, ya que puede suceder que exista solo una arista legal en la triangulación de partida que nos exija revisar todas las aristas para encontrarla y que genere otra arista ilegal única al legalizarla para la que de nuevo necesitaremos revisar la lista completa de arista de nuevo. Este suceso se puede repetir tantas veces como número de aristas interiores tiene la triangulación, que son siempre una cantidad lineal. A pesar de ello, y de que existen algoritmos que calculan la triangulación de Delaunay con $O(n \log n)$ operaciones, el algoritmo descrito es muy recomendable por su sencillez, lo que conlleva un código de programación sencillo y robusto, y porque en general (en media) la complejidad

⁶Para demostrarlo se recomienda hacer uso de las relaciones entre los ángulos exteriores, inscritos e interiores a una circunferencia.

es $O(n \log n)$ y no $O(n^2)$ como la del peor caso.

Método del cierre convexo 3D

No hemos descrito cómo calcular el cierre convexo de puntos en el espacio tridimensional. Tampoco es el objetivo de esta exposición. Sin embargo suponemos al lector capaz de imaginar cómo es el cierre convexo tridimensional: un poliedro convexo en el espacio cuyas caras, en general, salvo casos degenerados, son triángulos.

Supongamos que disponemos de un buen algoritmo para calcular el cierre convexo de puntos en 3D. Veamos cómo con él se puede calcular la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos del plano.

En efecto, si ampliamos las coordenadas (x, y) de cada uno de los puntos dados del plano con una tercera coordenada $(x, y, x^2 + y^2)$, hemos transformado los puntos en puntos del espacio situados sobre el paraboloides $z = x^2 + y^2$. Con ello conseguimos que todos los puntos estén en posición convexa (todos forman parte de la envolvente convexa). Además, y lo que es más interesante, cada triángulo de la envolvente inferior del cierre convexo determina un plano que deja todos los demás puntos por encima de él y que corta al paraboloides en una elipse que se proyecta en el plano XY en una circunferencia circunscrita a los puntos proyectados de los vértices del triángulo. El hecho de que los demás puntos estén por encima del plano, equivale a que la circunferencia proyección de la elipse no contenga a ningún punto de los de partida. Esta condición caracteriza los triángulos de la triangulación de Delaunay: tres puntos de un conjunto de puntos del plano son los vértices de un triángulo en la triangulación de Delaunay si, y sólo si, el círculo circunscrito no contiene a ningún punto del conjunto en su interior (aquí suponemos que no hay cuatro puntos concíclicos entre los dados).

En consecuencia, las observaciones anteriores llevan al siguiente resultado sorprendente:

La proyección de la envolvente convexa inferior de los puntos $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$ sobre el plano XY es la triangulación de Delaunay de los puntos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

En resumen, si disponemos de un algoritmo para calcular cierres convexos en 3D, tenemos además un algoritmo para calcular triangulaciones de Delaunay en el plano.

3. Diagramas de Voronoi

Supongamos que, centrados en cada uno de los n puntos del plano que tenemos como datos de partida, comienzan a crecer círculos a la misma velocidad. Cada punto se apropia del área que ocupa el círculo centrado en él siempre que no esté previamente ocupada por otro. Al final, cuando los radios de los círculos tienden a infinito, ¿Qué región del plano corresponderá a cada uno de los puntos?

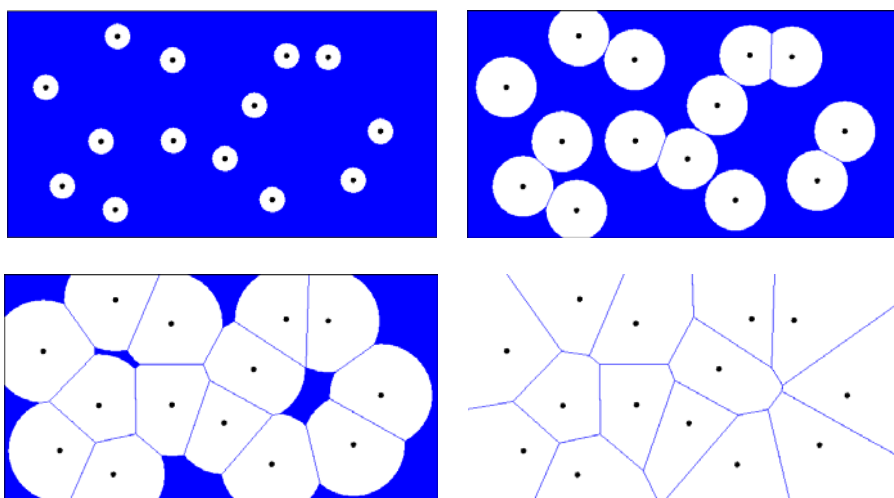


Figura 1: Proceso de obtención de un diagrama de Voronoi mediante la expansión de círculos

En numerosos procesos naturales ocurre un fenómeno de este estilo. De hecho, una imagen como la de la figura 2 recuerda a la imagen de un tejido celular:

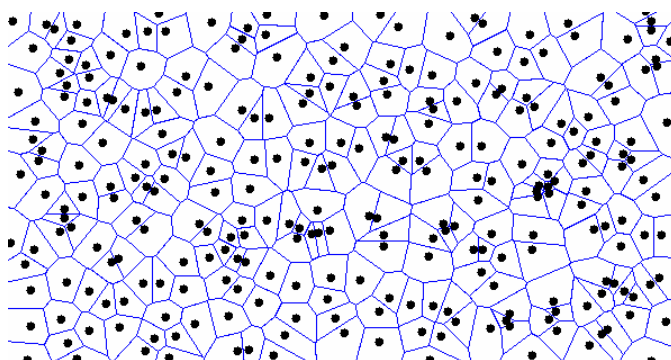


Figura 2: Simulación de un tejido celular mediante un diagrama de Voronoi

Es fácil observar que si el conjunto de puntos de partida tiene un solo punto, la región que le corresponderá será todo el plano. Si se trata de un conjunto de dos puntos, la mediatriz de esos puntos será la frontera que separará las regiones correspondientes a cada uno. Si se trata de tres puntos no alineados, las fronteras de las regiones las determinarán tres semirrectas contenidas en las mediatrices de los puntos tomados dos a dos. En el caso de estar alineados, las fronteras serán las dos de las tres mediatrices, que serán paralelas. En general, ¿cómo es la región de uno de los puntos? Se puede observar que será la intersección de $n - 1$ semiplanos, cada uno de los cuales está determinado por la mediatriz del punto con cada uno

de los demás. En consecuencia, la región de un punto tiene que ser una región poligonal convexa como se observa en las figuras 1 y 2.

Cada una de estas regiones se denomina **región de Voronoi** del punto correspondiente y a la partición del plano producida por todas ellas se denomina **diagrama de Voronoi**. Los diagramas de Voronoi son estructuras geométricas muy útiles y han sido redescubiertas en numerosas ocasiones en diferentes campos científicos (de ahí la variedad de denominaciones diferentes también: polígonos de Thiesen, polígonos de Dirichlet, zonas de influencia, regiones de proximidad, ...)

Pues bien, quitémosle esta apariencia tan diferente a las anteriores a esta estructura geométrica para descubrir que, en realidad, se trata de la misma que ahora conoce bien el lector: La triangulación de Delaunay.

Podemos hacerlo en los dos sentidos: Si partimos de un diagrama de Voronoi, vamos a descubrir en él una triangulación de Delaunay. Si partimos de una triangulación de Delaunay, veremos que de ella se obtiene de forma muy sencilla un diagrama de Voronoi.

Si conectamos mediante un segmento rectilíneo dos de los puntos si sus correspondientes regiones de Voronoi comparten parte de su frontera, el resultado será la triangulación de Delaunay de los puntos (lo mismo que ocurre con la triangulación de Delaunay, supondremos que no hay cuatro puntos concíclicos)⁷.

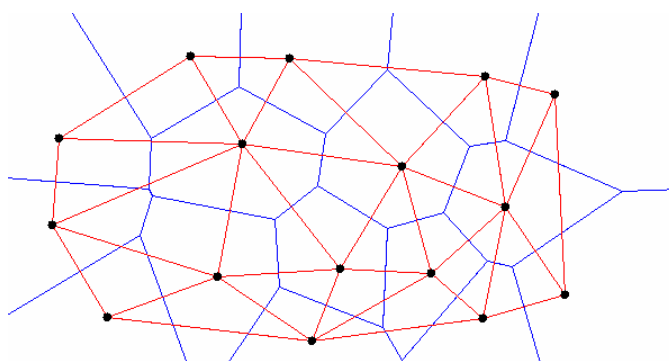


Figura 3: Diagrama de Voronoi y su estructura dual, la triangulación de Delaunay

A partir de la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos se puede obtener su diagrama de Voronoi de la siguiente forma: La región de un punto la determinan las mediatrices de ese punto con sus puntos vecinos (los que están conectados con él por una arista en la triangulación de Delaunay). El orden angular de los vecinos determina el orden en que las mediatrices intervienen formando la

⁷Más ejercicios para el lector que siga atento: a) ¿Porqué se obtiene una triangulación? b) ¿Porqué es precisamente la triangulación de Delaunay?.

frontera de la región de Voronoi del punto. Las regiones de los puntos que son vértices del cierre convexo son no acotadas y las del resto son polígonos acotados⁸.

Esta relación entre la triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos es una **dualidad** punto-región y arista-arista: En efecto, podemos asociar a cada vértice de la triangulación, que son los puntos del conjunto dado, su correspondiente región de Voronoi. De forma análoga, cada triángulo de la triangulación se corresponde con su circuncentro, que es precisamente un vértice del diagrama de Voronoi. Por su parte, cada arista del diagrama de Voronoi, como hemos dicho, determina una arista de la triangulación de Delaunay. Esta dualidad, como muchas otras, permite resolver problemas diferentes con las mismas técnicas. A partir de este descubrimiento, hablar de diagramas de Voronoi o de triangulaciones de Delaunay, es hablar de la misma estructura en lenguajes diferentes. Las propiedades de una se transforman en propiedades de la otra.

En resumen, si disponemos de un buen algoritmo para calcular cierres convexos en dos y tres dimensiones, disponemos de un buen algoritmo para calcular triangulaciones de Delaunay y diagramas de Voronoi en el plano. Esto justifica el título de la exposición: son tres estructuras geométricas diferentes, pero estrechamente relacionadas entre sí.

4. Aplicaciones

Son numerosas las aplicaciones de los cierres convexos, las triangulaciones de Delaunay y los diagramas de Voronoi. Aquí vamos a mostrar dos a modo de ejemplo con ánimo de estimular la curiosidad del lector. Si tenemos éxito en esto último, estamos seguros de que el lector sabrá encontrar mucha más información y mejor detallada en la red o incluso generarla por sí mismo.

Reconstrucción de curvas

Supongamos que tenemos una muestra de puntos de una curva y hemos perdido la curva de la que proceden. Más que una expresión algebraica más o menos elegante de la ecuación de la curva, nos interesa recuperar su topología. Por ello nos basta en realidad saber o descubrir en qué orden aparecen los puntos en la curva, y cuáles son las componentes y ramificaciones de la misma. Sabido esto, podemos conectar los puntos formando poligonales que darán una idea aproximada de la curva de la que proceden. La idea básica que subyace es que debemos conectar puntos próximos entre sí, y no conectar puntos que no sean relativamente próximos. En la figura 4 se muestra un ejemplo de lo que se pretende hacer empleando para ello un algoritmo que lo haga de forma automática. Se quiere que los puntos dados se conecten obteniendo el número 50 del que proceden. De hecho, el diseño del número 50 se realizó a mano y no se corresponde, por tanto, con

⁸Aquí hay de nuevo más ejercicios para el lector. Suponemos que si ha llegado hasta aquí es porque le interesa, así que mejor es descubrir las cosas por uno mismo. Es más estimulante.

ninguna curva de ecuaciones predeterminadas.

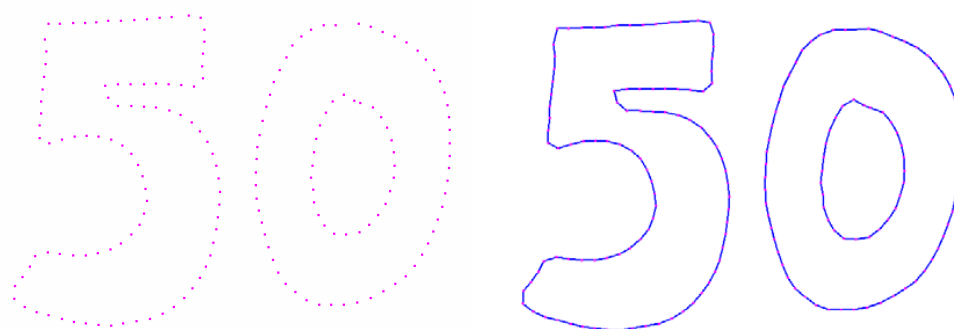


Figura 4: Muestra de puntos tomados de una curva y su reconstrucción mediante el algoritmo "crust"

Este problema se enmarca dentro de los problemas conocidos como problemas de reconstrucción. Existen múltiples versiones de este tipo de problemas y con diferentes condiciones tanto en los datos como en el objeto que se desea obtener a partir de ellos. Para el caso propuesto existe una buena solución basada en el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay de los puntos, siempre que la muestra de puntos sea **buena**, lo que esencialmente significa que sea suficientemente densa y uniforme (para explicar esto el dicho andaluz viene muy bien: "*Lo que no puede ser, no puede ser, y además es imposible*", que equivale a "*de donde no hay, no se puede sacar*").

La idea original fue de Nina Amenta et al. [1] quienes llamaron al resultado de su algoritmo "crust" (corteza). Posteriormente, Gold et al. [5] modificaron el algoritmo para obtener el mismo resultado de forma más sencilla y eficiente. Esta es la idea del cálculo del crust en la versión de Gold: el crust está formado por las aristas de la triangulación de Delaunay de los puntos que verifiquen la siguiente condición: son aristas que se cortan con su arista dual del diagrama de Voronoi y además, los círculos que pasan por los extremos de la arista Delaunay y cada uno de los extremos de su arista dual no contienen ningún punto del conjunto original en su interior.

Los resultados de este algoritmo, para muestras buenas, como se ha mencionado, son espectaculares. Por otra parte, el algoritmo es bien sencillo. Su parte más complicada consiste en calcular la triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi del conjunto de puntos dado.

Estadística: análisis de centralidad

En el análisis de datos multiparamétricos juega un papel importante el estudio de la profundidad y la centralidad de los datos. La idea de profundidad de un punto respecto a la muestra a la que pertenece se puede definir de varias formas,

pero en todas ellas se quiere recoger la idea de cuán interno es un dato dentro de la muestra. Un dato con gran profundidad se dice que es un dato central y se considera un buen representante de la muestra.

Una de las definiciones clásicas de profundidad se basa en las envolventes convexas de un conjunto. Los puntos que pertenecen a la envolvente convexa se consideran exteriores y se dice que tienen profundidad cero. Si se suprimen de la muestra los puntos exteriores, los puntos exteriores del conjunto resultante se dice que son de profundidad dos. Iterando el proceso se definen los puntos de profundidad i como los puntos exteriores del conjunto resultante de eliminar de la muestra los puntos de profundidad menor a i . La profundidad de la muestra se define como la máxima profundidad de sus puntos. Las sucesivas envolventes convexas que definen la profundidad de los puntos de una muestra se denominan capas convexas y se pueden calcular empleando cualquiera de los algoritmos de cálculo de envolventes convexas. Si se emplea el algoritmo de Graham descrito antes, como el número de capas convexas puede ser lineal respecto del número de puntos, la complejidad total del método será de orden $O(n^2 \log n)$. Con el algoritmo de Jarvis se obtiene un resultado mejor, pues emplea un tiempo lineal por cada punto, por lo que la complejidad total para hallar las capas convexas es $O(n^2)$. Existe un algoritmo de Chazelle [4] que calcula todas las capas convexas de n puntos del plano con complejidad $O(n \log n)$.

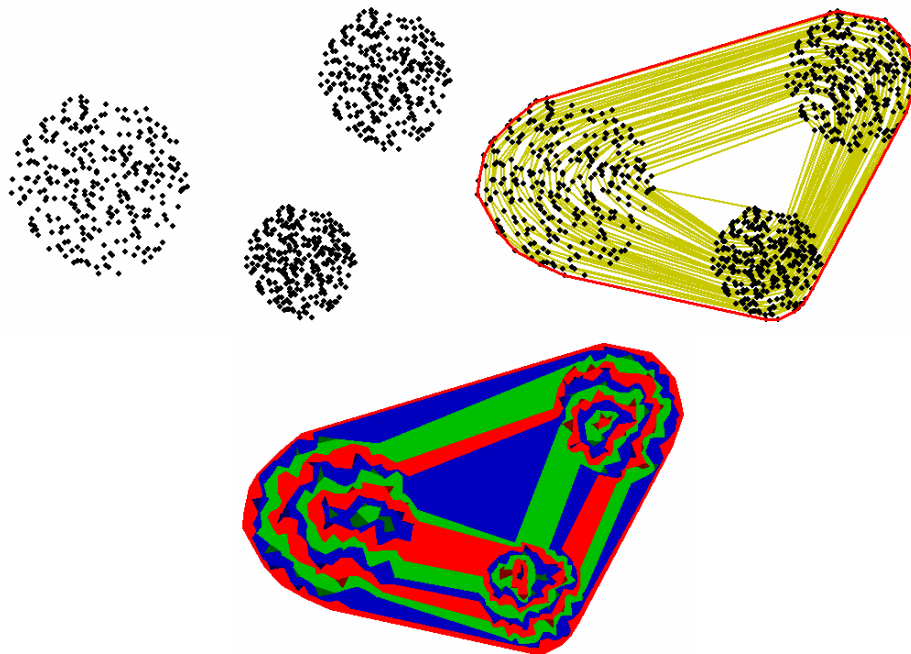


Figura 5: Una muestra de datos biparamétricos, sus capas convexas y sus capas Delaunay. Las capas Delaunay son más adecuadas si se quieren tener en cuenta posibles agrupaciones de los datos

La idea de ir quitando las capas de la muestra (algunos lo llaman "*pelar la cebolla*" - "*onion peeling*") para definir la profundidad de los puntos se puede aplicar empleando otras estructuras. En particular la triangulación de Delaunay: a los puntos de la envolvente convexa se les asigna profundidad cero, como antes. A los puntos que están conectados a éstos mediante una arista en la triangulación de Delaunay y no son de profundidad cero, se les asigna profundidad uno. Iterando el proceso, a los puntos conectados mediante una arista con los de profundidad i que no tienen profundidad asignada menor o igual a i , se les asigna la profundidad $i+1$. Si en la triangulación de Delaunay se conservan las aristas que conectan puntos de la misma profundidad eliminando el resto, se obtiene una estructura de capas como se muestra en la figura 5. Esta forma de definir las capas de una muestra tiene, sobre la de las capas convexas, la ventaja de que recoge la información sobre posibles agrupaciones de los datos (clustering).

5. Conclusión

Envolventes convexas, triangulaciones de Delaunay y diagramas de Voronoi son estructuras geométricas de gran utilidad asociadas a un conjunto de puntos. Como se ha visto, las tres estructuras están íntimamente relacionadas, pudiendo obtenerse una de otra con un número de operaciones proporcional al tamaño del conjunto de puntos. Esta condición es la que hace que, bajo el punto de vista de la algorítmica, se consideren estructuras equivalentes. Han sido y son uno de los centros de atención en el desarrollo de la Geometría computacional. Al lector interesado le recomiendo la lectura del libro de Marc de Berg et al. [3] en el que se hace una muy buena introducción a estas tres estructuras así como a la Geometría computacional y sus aplicaciones en general. Dos buenas referencias sobre diagramas de Voronoi son el artículo de Aurenhammer et al. [2] y el libro de Okabe et al [8]. En la red hay mucha información disponible, incluidas numerosas aplicaciones informáticas (programas) que permiten obtener las tres estructuras mencionadas y conocer el funcionamiento de los correspondientes algoritmos (hágase en Google la búsqueda con las palabras clave: "Voronoi", "Convex hull", "Delaunay". Si a cualquiera de ellas se añade la palabra "applet", se encontrarán programas como los mencionados).

Bibliografía

- [1] N. Amenta, M. W. Bern, D. Eppstein, *The Crust and the beta-Skeleton: Combinatorial Curve Reconstruction*, Graphical Models and Image Processing 60(2), 125-135, 1998.
- [2] F. Aurenhammer, R. Klein, *Voronoi diagrams*, J. Sack and J. Urrutia, editores, Handbook of Computational Geometry, Chapter V, 201-290. Elsevier Scien-

ce Publishing, 2000.

[3] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 1997.

[4] B. Chazelle, *On the convex layers of a planar set*, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-31:509-517, 1985.

[5] C. M. Gold, *Crust and anti-crust: a one-step boundary and skeleton extraction algorithm*, Proc. 15th Symp. Computational Geometry, ACM, Jun pp. 189-196, 1999.

[6] R. Graham, *An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Point Set*, Info. Proc. Letters 1, 132-133, 1972.

[7] R.A. Jarvis, *On the Identification of the Convex Hull of of a Finite Set of Points in the Plane*, Info. Proc. Letters 2, 18-21, 1973.

[8] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. Chiu, *Spatial Tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, (2nd ed.), Wiley, 2000.

Manuel Abellanas Oar

Universidad Politécnica de Madrid

Facultad de Informática

Departamento de Matemática Aplicada

Boadilla del Monte 28660 (Madrid)

e-mail: mabellanas@fi.upm.es

<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas>

