Arte y Matemáticas

por

Mª Francisca Blanco Martín, Universidad de Valladolid

En esta etapa del *Paseo* pretendemos realizar un recorrido a través de algunas construcciones geométricas sencillas generadas a partir de una figura simple como el cuadrado, para mostrar algunas aplicaciones en el Diseño y especialmente en la Arquitectura.

Para realizar dichas construcciones utilizaremos procedimientos iterativos que permitan elaborar una sucesión rítmica de figuras semejantes, susceptibles de utilizarse en la generación de formas para el proceso del diseño.

Los ejemplos mostrados se han elegido de diferentes épocas y estilos artísticos tratando de poner de manifiesto lo intemporal del método.

1. Introducción

Partimos del cuadrado como figura geométrica básica para el Diseño, el Arte y la Arquitectura.

Este polígono regular de cuatro lados, fue considerado por los antiguos geómetras como símbolo del mundo comprensible, en contraposición al círculo como símbolo del mundo desconocido e incomprensible. Una figura intermedia entre ambas es el octógono, representado en las cúpulas de los templos, como enlace entre el hombre y la divinidad.

El cuadrado juega un papel fundamental a lo largo de todas las épocas, no sólo por sí mismo y sus propiedades, sino como generador de rectángulos y parte de composiciones geométricas de gran valor estético. Así por ejemplo el rectángulo diagonal es utilizado por Vitrubio y Palladio:

Vitruvio, arquitecto romano del siglo I a. C. señala *"...A partir de la anchura del atrio se construye un cuadrado, se dibuja la diagonal de este cuadrado y se toma como longitud del atrio la longitud de esta diagonal..."*. [19].

Palladio, arquitecto del siglo XVI, escribe en "Los cuatro libros de arquitectura". *"Los tipos de habitaciones más hermosas y proporcionadas, y que mejor salen, son de siete tipos; se harán, pues: redondas (raramente) o cuadradas; o bien, su longitud será la línea diagonal del cuadrado de la anchura, o de un cuadrado y un tercio, o de un cuadrado y un medio, o de un cuadrado y dos tercios, o de dos cuadrado."* [17].

Entre los arquitectos del siglo XX que utilizan el cuadrado como forma básica en sus obras, citamos por ejemplo a Kahn, Botta, Meier.

Mostraremos construcciones, que pueden realizarse con regla y compás a partir de un cuadrado, explícitamente, rectángulos diagonales, de plata o de oro.

Estos rectángulos tienen la propiedad que, aplicándoles un proceso iterativo, se pueden conseguir diferentes ritmos en la creación de formas semejantes, para posteriormente poder manipular y transformar estos modelos.

2. Rectángulos derivados del cuadrado

Definimos la proporción en un rectángulo R, como la tangente del ángulo α, ángulo mayor o igual que $\pi/4$, que forma una de sus diagonales con uno de sus lados, o bien como el cociente entre la longitud del lado mayor y el lado menor.

Como consecuencia inmediata de la anterior definición se deduce que rectángulos con diagonales paralelas o perpendiculares tienen la misma proporción, y que la proporción en un rectángulo es un número mayor o igual a uno.

En lo que sigue construiremos y estudiaremos propiedades de:

- rectángulos diagonales, de proporción $\sqrt{2}$,
- rectángulos de plata, de proporción $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$,
- rectángulos de oro, de proporción $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1. Rectángulo $\sqrt{2}$

Dado un cuadrado, que notamos por $ABCD$, y tomando como unidad de medida la longitud de su lado, su diagonal AC mide $\sqrt{2}$.

Con centro en un vértice, por ejemplo A, del cuadrado y radio la diagonal AC, se traza un arco de circunferencia hasta cortar a la prolongación del lado AB, en el punto E. Por E se traza la perpendicular a AE hasta la intersección con la prolongación del lado CD.

El rectángulo $AEFD$ tiene proporción $\sqrt{2}$, sus lados miden 1 y $\sqrt{2}$.

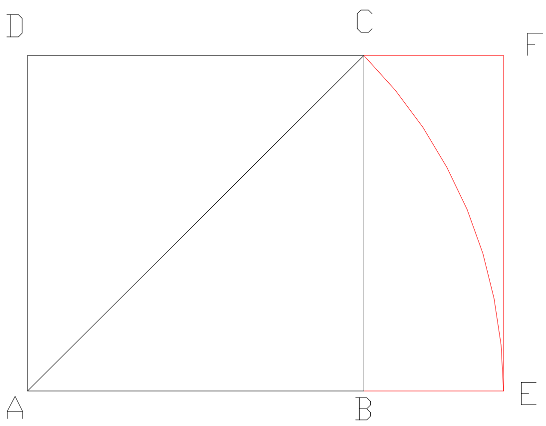


Figura 1: Rectángulo $\sqrt{2}$

Propiedades características de este rectángulo, son:
1) Si dividimos por la mitad el lado mayor, obtenemos dos rectángulos iguales, de lados $\sqrt{2}/2$ y 1, cuya proporción es la misma que la del rectángulo inicial.

Este proceso de dividir un rectángulo diagonal por la mitad del lado mayor puede iterarse indefinidamente, obteniéndose una sucesión decreciente de rectángulos semejantes con proporción $\sqrt{2}$ (en la fig. 2 puede verse hasta la sexta división).
2) Si duplicamos el lado menor de un rectángulo diagonal, el nuevo rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y 2, tiene la misma proporción que el rectángulo inicial. La iteración de este proceso nos proporciona una sucesión creciente de rectángulos semejantes, con proporción $\sqrt{2}$ (en la fig. 2, leída desde el rectángulo $LNPQ$ hacia fuera, aparecen seis iteraciones).

Podemos resumir estas propiedades en la forma siguiente:
Si a un rectángulo diagonal le aplicamos el algoritmo iterativo:

- D1: dividir el lado mayor por la mitad;

o bien el algoritmo "inverso"

- D2: duplicar el lado menor,

se obtiene como resultado una sucesión infinita decreciente o creciente respectivamente de rectángulos semejantes, es decir diagonales.

Esta propiedad, autogenerativa de rectángulos diagonales a partir de uno dado, se encuentra en la base de los formatos normalizados DIN, rectángulos de proporción $\sqrt{2}$. Así el DIN A0, es un rectángulo diagonal de área 1 m^2, obteniéndose los siguientes formatos DIN A1, DIN A2, etc., aplicando sucesivamente el algoritmo D1 al rectángulo DIN A0.

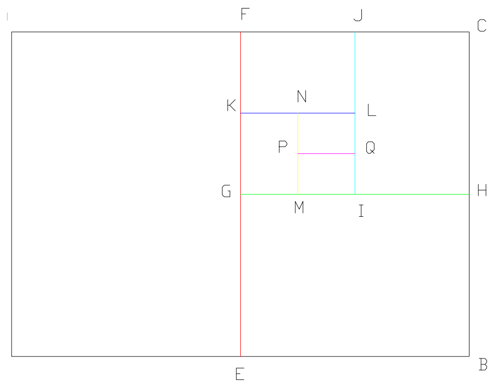


Figura 2: Sucesión de rectángulos diagonales

Este rectángulo ha sido utilizado con frecuencia en la arquitectura a través de la historia. A título de ejemplo mostramos aquí la planta de la Sacristía Vecchia de Brunelleschi (siglo XV), podemos observar que está enmarcada en un rectángulo diagonal derivado del cuadrado proyección de la cúpula.

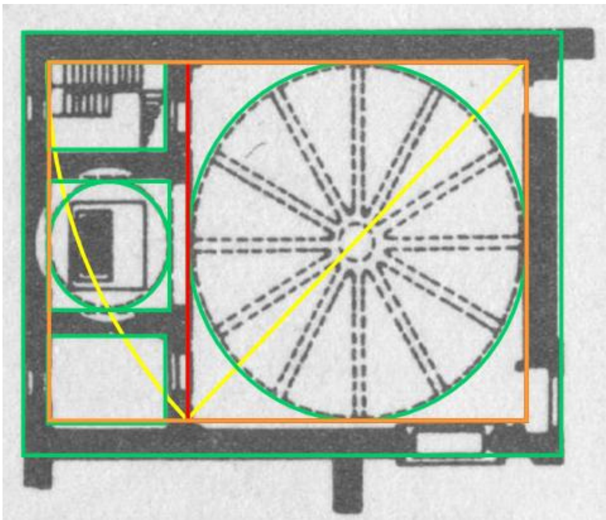


Figura 3: Planta de la Sacristía Vecchia

2.2. Rectángulo de plata: $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$

Una manera de extender el rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, por ejemplo para dar esbeltez a una fachada, es añadir a dicho rectángulo un cuadrado, obteniéndose otro rectángulo de proporción $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$, llamado rectángulo de plata. (Ver fig. 4, 5 y 6).

En la figura 4 podemos ver la fachada principal del Palacio del Colegio de Santa Cruz de Valladolid enmarcada por un rectángulo de plata.

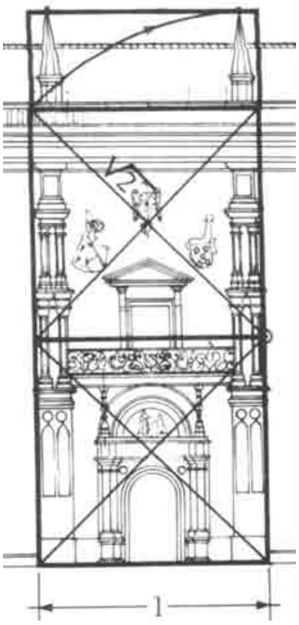


Figura 4: Fachada Palacio Santa Cruz, Valladolid

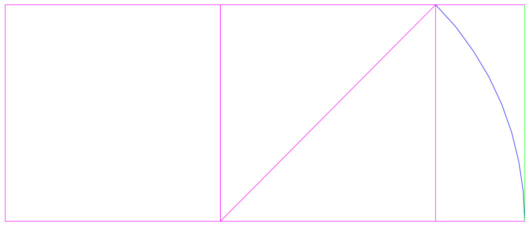


Figura 5: Rectángulo de Plata
$\vartheta = 1 + \sqrt{2}$

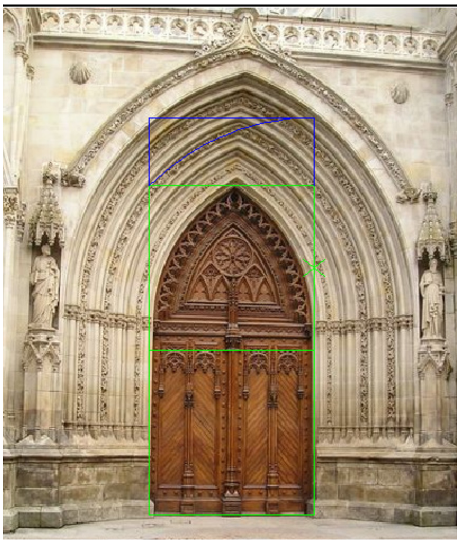


Figura 6: Catedral de Santiago, Bilbao

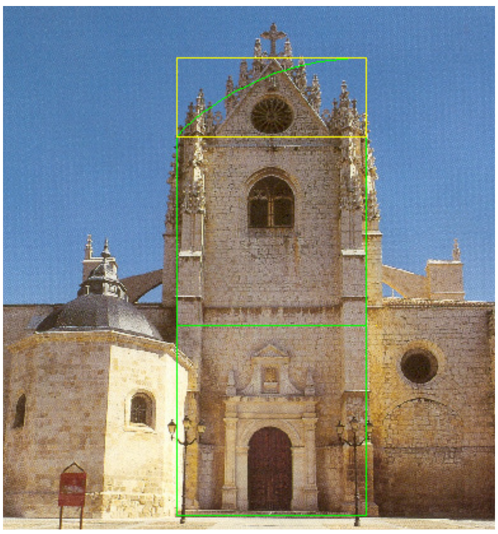


Figura 7: Catedral de Palencia, Puerta de San Antolín

En la figura 6, observamos como la puerta de la Catedral de Bilbao está enmarcada en un doble cuadrado de lado el ancho de la puerta y hasta el tercer arco es un rectángulo de plata.

La figura 7 nos muestra la vista, desde la plaza de San Antolín, de la fachada de la Catedral de Palencia, la cual está enmarcada en un rectángulo de plata.

El número de plata ϑ es la solución positiva de la ecuación de segundo grado: $x^2 - 2x - 1 = 0$. En consecuencia, $\vartheta^2 = 2\vartheta + 1$, $\vartheta(\vartheta - 2) = 1$, $\vartheta^{-1} = \sqrt{2} - 1$.

Observemos que si a $\sqrt{2}$ le sumamos 1, se tiene el número de plata, $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$, y que si a $\sqrt{2}$ le restamos 1, se tiene el inverso del número de plata, $\vartheta^{-1} = \sqrt{2} - 1$.

Estas propiedades algebraicas admiten la siguiente interpretación geométrica: 1) Si a un rectángulo de plata de lados 1 y ϑ, le sumamos por el lado mayor dos cuadrados de lado ϑ, obtenemos un nuevo rectángulo de plata, sus lados miden ϑ y $2\vartheta + 1 = \vartheta^2$. Este proceso puede proseguirse indefinidamente, obteniendo una sucesión creciente de rectángulos de plata, cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\vartheta^n\}$ (ver fig. 8, leída desde el rectángulo $YUVX$ hacia fuera).

La sucesión $\{u_n = \vartheta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, (progresión geométrica de razón ϑ) es una sucesión recurrente que satisface la relación $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$, conocida en la literatura matemática como sucesión de Pell, sucesión que tiene la propiedad $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \vartheta$.

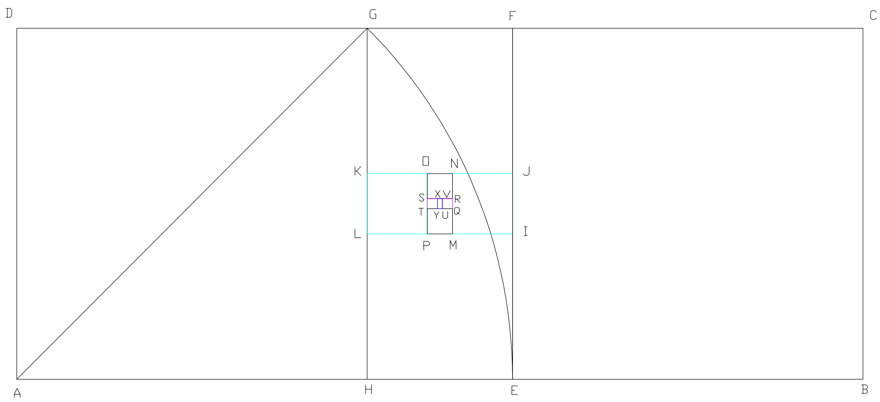


Figura 8: Descomposición de un rectángulo de plata

2) De forma análoga, si a un rectángulo de plata de lados 1 y ϑ, le restamos dos cuadrados, obtenemos otro rectángulo de plata de lados 1 y $\vartheta - 2 = \vartheta^{-1}$. Este proceso puede seguirse indefinidamente, obteniendo una sucesión decreciente de rectángulos de plata, cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\vartheta^{-n}\}$ (ver la fig. 8, leída desde el rectángulo $ABCD$ hacia dentro).

Dicha sucesión cuyos términos están en progresión geométrica, de razón ϑ^{-1}, menor que 1, tiene por suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vartheta^{-n} = \dfrac{1}{1 - \vartheta^{-1}} = \dfrac{\vartheta}{\vartheta - 1} = \dfrac{\vartheta}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 + \vartheta}{2}$.

Las propiedades algebraicas del número de plata, descritas anteriormente, tienen una traducción geométrica y de composición dinámica interesante para la generación de formas en el diseño. Así, si tomamos como germen o inicio del proceso un rectángulo de plata, y le aplicamos cualquiera de los dos procesos iterativos:

1. A.2: añadirle dos cuadrados (por el lado mayor),
2. R.2: restarle dos cuadrados,

obtenemos un rectángulo semejante al germen inicial.

Relación entre los rectángulos diagonales y de plata

Las expresiones del número de plata y de su inverso en términos de $\sqrt{2}$, nos permiten establecer relaciones compositivas entre rectángulos diagonales y rectángulos de plata, obteniendo unos a partir de los otros, operando a través de cuadrados.

Como vimos más arriba, el rectángulo de plata se obtiene añadiendo un cuadrado al rectángulo diagonal. Si a este rectángulo de lados 1 y φ le añadimos un cuadrado por el lado mayor, obtenemos un rectángulo (diagonal), de lados ϑ y $1+\vartheta$, de proporción $\dfrac{(1+\vartheta)}{\vartheta} = 1+\vartheta^{-1} = \sqrt{2}$.

Este proceso infinito y creciente podemos enunciarlo como sigue:

a) Si utilizamos como semilla un rectángulo diagonal y le aplicamos el proceso iterativo de añadirle un cuadrado, obtenemos en los pasos impares un rectángulo de plata y en los pasos pares un rectángulo diagonal semejante a la semilla.

La "dualidad"que existe entre los rectángulos diagonales y de plata, nos permite enunciar el proceso "dual":

b) Si utilizamos como semilla un rectángulo de plata y le aplicamos el mismo proceso iterativo de añadirle un cuadrado, obtenemos en los pasos impares un rectángulo diagonal y en los pasos pares un rectángulo de plata semejante a la semilla.

De forma análoga podemos obtener familias decrecientes de rectángulos de plata y diagonales:

Si a un rectángulo diagonal, le restamos un cuadrado, obtenemos un rectángulo de plata y si a un rectángulo de plata, le restamos un cuadrado, obtenemos un rectángulo diagonal. Dicho de otra forma, si utilizamos como semilla un rectángulo $\sqrt{2}$, en el proceso iterativo de restar un cuadrado, en los pasos impares obtenemos un rectángulo de plata y en los pasos pares un rectángulo $\sqrt{2}$.

c) Si utilizamos como semilla un rectángulo de plata (resp. diagonal), en el proceso iterativo de restar un cuadrado, en los pasos impares obtenemos un rectángulo diagonal y en los pasos pares un rectángulo de plata (resp. diagonal).

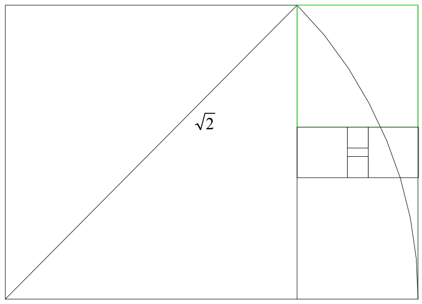


Figura 9: Relación entre los rectángulos diagonales y de plata

• Como ejemplo puede verse en la figura 10 una interpretación geométrica de la distribución de distintos elementos arquitectónicos en la planta de la Catedral de Palencia. Tanto la planta general como la girola están contenidas en un rectángulo diagonal.

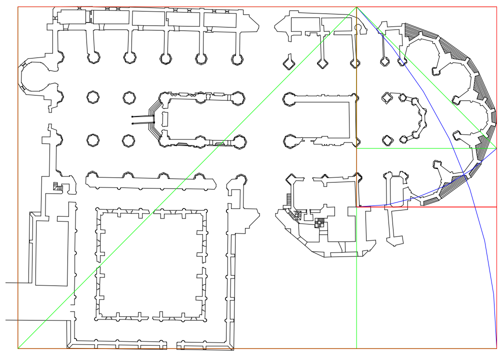


Figura 10: Planta de la catedral de Palencia-Bella desconocida

• En la figura 7, fachada de la Catedral de Palencia vista desde la plaza de San Antolín, observamos que toda la fachada está enmarcada por un rectángulo de plata, formada por un rectángulo de proporción 2, y el tímpano contenido en otro rectángulo de plata obtenido del primero al restarle dos cuadrados.

• La figura 11 nos muestra un mueble realizado por los hermanos Herter en el siglo XIX. Podemos observar que está formado por un cuerpo central que se corresponde con un cuadrado azul, a partir del cual y por tres de sus lados, se construyen los rectángulos diagonales correspondientes, para situar tres cuerpos del mueble, en los laterales y en la parte superior, que son rectángulos de plata.

El cuadrado del cuerpo central está formado por dos rectángulos iguales cuya composición es análoga a la anterior, un cuadrado y dos rectángulos de plata; observamos que el diseñador utiliza el mismo esquema geométrico en todas las partes del mueble pero varia el diseño y distribución de los elementos ornamentales para darle gracia y evitar la monotonía en la composición básica.

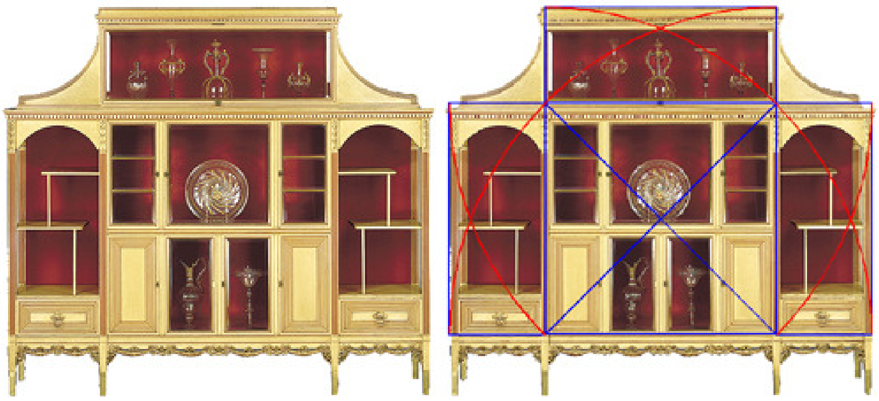


Figura 11: Armario diseñado por los hermanos Herter

2.3. Rectángulo áureo

A partir de un cuadrado $ABCD$, se traza el arco de centro M, punto medio del lado CD, y de radio $MA = MB$, hasta el punto P (o bien hasta el punto R), intersección con la prolongación del lado CD. Se traza la perpendicular a la recta DC por el punto P, (o por el punto R), hasta la prolongación del lado AB, se cortan en el punto Q, (o en el punto S). Los lados del rectángulo $CPQB$ (resp. $ASRD$) están en proporción $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, número de oro, rectángulo que llamamos áureo (ver fig. 12).

Si realizamos dos veces la construcción anterior a ambos lados del cuadrado obtenemos dos rectángulos áureos que poseen en común el cuadrado inicial. El rectángulo total obtenido $QSRP$ tiene proporción $\sqrt{5}$.

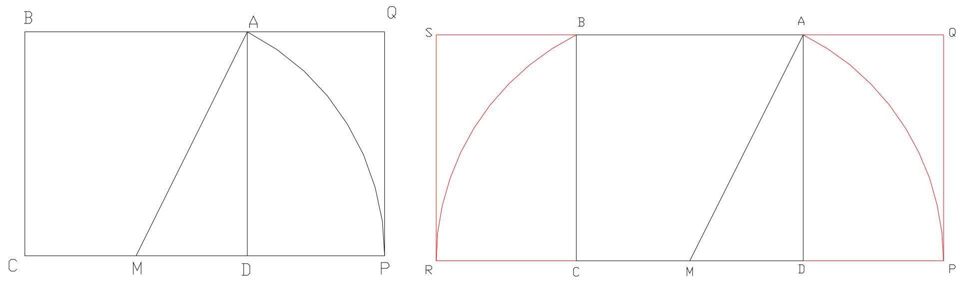


Figura 12: Rectángulos de oro

El número de oro φ, es la solución positiva de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$, en consecuencia $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi(\varphi - 1) = 1$, $\varphi^{-1} = \varphi - 1$.

Si tomamos la longitud del lado del cuadrado como unidad, el rectángulo áureo $CPQB$ se ha construido añadiendo al cuadrado original $ABCD$ un rectángulo $BQPC$, de lados $\varphi - 1 = \varphi^{-1}$, y 1 que también es áureo. Otra posible lectura de la construcción es, que si partimos del rectángulo áureo $CPQB$, le restamos un cuadrado $ABCD$, obtenemos otro rectángulo áureo.

En la figura 13, puerta de la Catedral de Santiago de Bilbao, podemos ver como el ancho de la puerta y la altura hasta la última arquivolta, determinan un rectángulo de proporción $1 + \varphi = \varphi^2$.

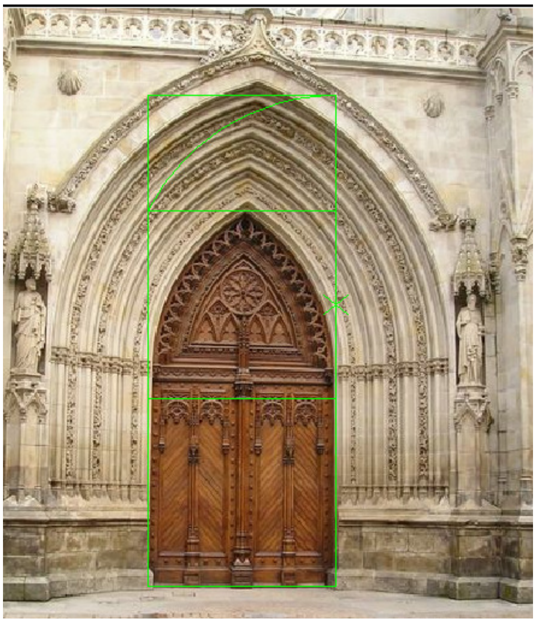


Figura 13: Cuadrado más rectángulo áureo, proporción φ^2

En la figura 14 podemos observar un análisis de la Villa Foscari, de Palladio, (1549-1563), notando que tanto la planta como la fachada están enmarcadas en un rectángulo áureo (azul).

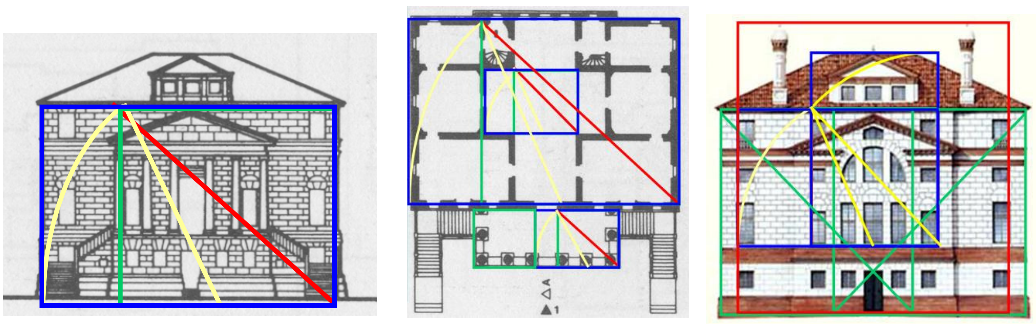


Figura 14: Villa Malcontenta

En la planta, podemos observar como el espacio central es un rectángulo de proporción $\sqrt{5}$, construido a partir del cuadrado marcado en azul, prolongándole de manera áurea a la derecha y a la izquierda. El porche es un cuadrado más un rectángulo áureo, es decir, un rectángulo de proporción φ^2.

Mostremos a continuación (figura 15) un análisis de la planta del ayuntamiento de Saynatsalo, obra de Alvar Aalto del siglo XX, donde podemos observar la presencia de todos los rectángulos estudiados previamente, diagonales, de plata y de oro.

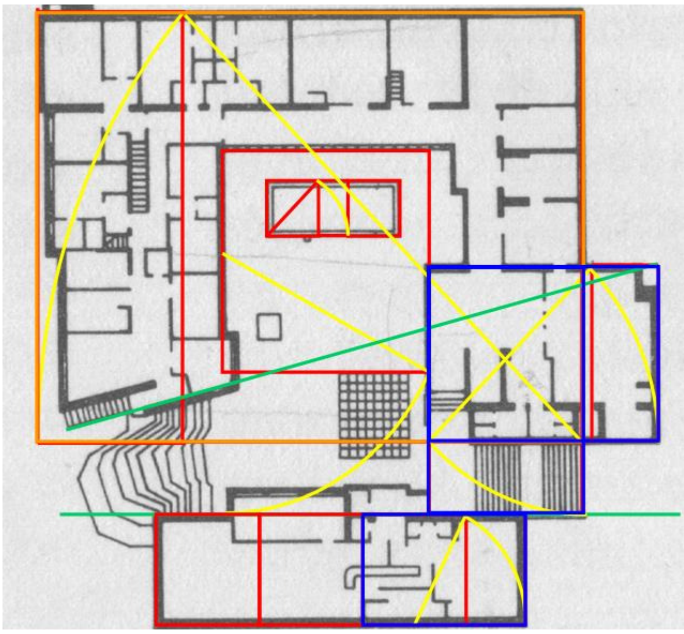


Figura 15: Ayuntamiento de Saynatsalo

Las propiedades algebraicas del número de oro tienen una interpretación geométrica que permiten desarrollos compositivos dinámicos en el diseño morfológico (la generación de formas).

Así, si tomamos como germen o inicio del proceso un rectángulo de oro, y le aplicamos cualquiera de los dos procesos iterativos:

3. A.1: añadirle un cuadrado (por el lado mayor),
4. R.1: restarle un cuadrado,

obtenemos un rectángulo semejante al germen inicial.

Si a un rectángulo áureo le aplicamos el algoritmo A.1 obtenemos una sucesión creciente de rectángulos áureos cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\varphi^n\}$ (ver fig. 16, leer comenzando por el rectángulo $SUTM$ hacia fuera).

La sucesión $\{\varphi^n\}$, progresión geométrica de razón φ, es una sucesión recurrente que satisface la relación $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, llamada sucesión de Fibonacci, que tiene la propiedad $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$.

Análogamente, si a un rectángulo áureo le aplicamos el algoritmo R.1, obtenemos una sucesión decreciente de rectángulos áureos cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\varphi^{-n}\}$ que es una progresión geométrica de razón φ^{-1}, cuya suma es $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} = \frac{1}{1-\varphi^{-1}} = \frac{\varphi}{\varphi^{-1}} = \varphi^2 = \varphi + 1 = \varphi^2$ (ver la fig. 16, leer comenzando por el rectángulo $ABCD$ hacia dentro).

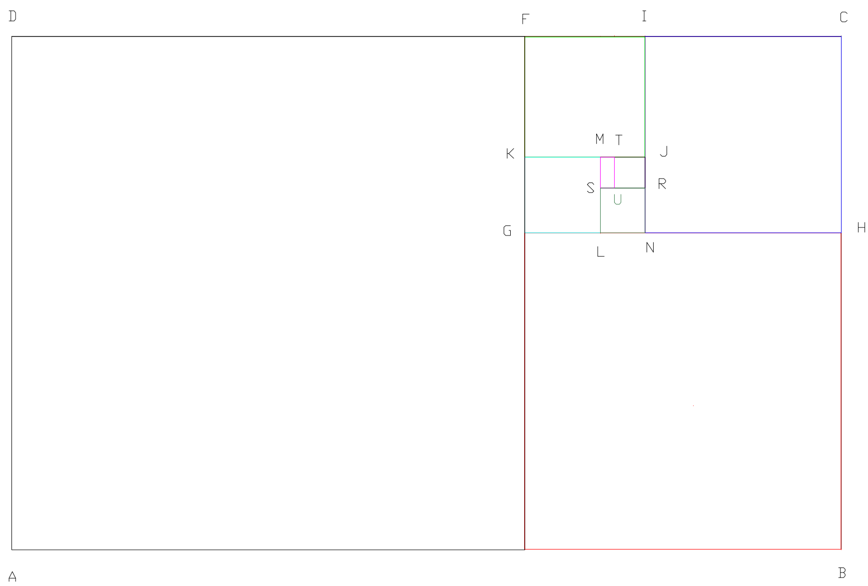


Figura 16: Particiones áureas de un rectángulo de oro

3. Aplicaciones del rectángulo áureo

La utilización de un rectángulo áureo y la aplicación al mismo del proceso iterativo R.1 se ha utilizado con frecuencia tanto en procesos de diseño como en Arquitectura; a continuación presentamos dos ejemplos.

3.1. Danteum

El arquitecto italiano Terragni (1904-41), principal exponente de la arquitectura del Movimiento Moderno en Italia, recibe el encargo de realizar un edificio que se dedicará a la recopilación y el estudio de la obra de Dante.

En 1938 realiza un proyecto, no construido debido a las circunstancias políticas del momento, como homenaje a Dante, denominado Danteum. A pesar de que este proyecto no se ejecutó, su planteamiento se considera como una de las ideas más sutiles y complejas dentro de la tradición del movimiento moderno, siendo objeto de amplios estudios.

Terragni toma como "modelo", la obra más característica de Dante, la Divina Comedia y plantea una analogía de la composición del proyecto arquitectónico con la estructura de la composición poética.

La composición poética de la Divina Comedia está formada por tres partes o cánticos: Infierno, Purgatorio y Paraíso, cada una de ellas compuesta por 33 cantos, más un canto preliminar o introducción, es decir 100, cuadrado de 10, número al que se le atribuye la perfección y narra un camino procesional ascendente en el que Dante, humanidad pecadora, parte del infierno, donde se castigan las culpas provocadas por los 7 pecados, consideración de la culpa, pasa por el purgatorio, expiación del arrepentimiento, para llegar al paraíso y alcanzar la perfección o la gracia.

El número 3, número perfecto símbolo de la trinidad y del equilibrio y la estabilidad en algunas culturas, está muy presente en el poema, escrito en versos endecasílabos, distribuidos en tercetos encadenados a lo largo de tres cánticos. Tres personajes principales, Dante, que personifica al hombre, Beatriz, que personifica a la fe, y Virgilio, que personifica a la razón.

El poeta describe, en primera persona, una visión en la cual se sitúa él a la edad de 35 años, "la mitad del camino de la vida".

Se encuentra perdido en una "selva oscura"la de los vicios humanos, amedrentado por las amenazas de unas fieras, los pecados capitales.

Por la intersección de su amada Beatriz que está en el Paraíso acude en su ayuda el poeta Virgilio, considerado profeta en la Edad Media.

Guiado por Virgilio, la sabiduría, Dante inicia el camino procesional ascendente, penetra en el Infierno (punitivo) y posteriormente pasa al Purgatorio (expiatorio) donde purgan las culpas los que incurrieron en alguno de los siete 7 pecados capitales. En el canto XXX, múltiplo de 3, desaparece Virgilio y le sustituye Beatriz como guía.

En el borrador de la memoria del proyecto arquitectónico elaborado por Terragni, que ha llegado hasta nosotros podemos leer:

..."la expresión Arquitectónica podía adecuarse a la Obra Literaria solo a través de un examen de la admirable estructura del Divino Poema, fidelísimo a un criterio de repartición y de interpretación de algunos números simbólicos, 1,3,7,10 y sus combinaciones que por su ulterior selección pueden sintetizarse en el 1 y 3 (unidad y trinidad)".

..."Solo hay un rectángulo que exprese con claridad la ley armónica de la unidad en la trinidad, y es el Rectángulo históricamente definido Áureo:"

..."El rectángulo áureo es, además una de las formas planimétricas adoptadas con frecuencia también en la antigüedad, Asirios, Egipcios, Griegos y Ro-

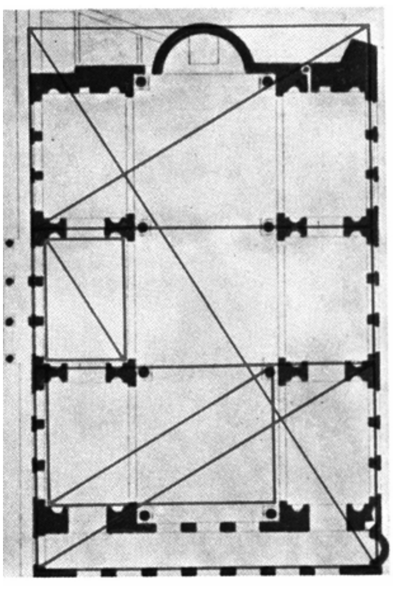
manos..." ..."El ejemplo más evidente lo tenemos en la Via dell´Imperio, con la Basílica Masencio, cuya planta coincide con un rectángulo áureo."

"La planta así fijada para el Danteum viene a ser, así, el rectángulo similar al de la planta de la Basílica, y con dimensiones derivadas directamente de las de aquella insigne Construcción Romana (el lado mayor del Danteum es igual al lado menor de la Basílica, mientras que el lado menor es igual, consecuentemente, a la diferencia entre los dos lados de la Basílica)". (Borrador de la memoria, 1938).

La planta del Danteum es un rectángulo áureo, cuyas dimensiones derivan de la sustracción del cuadrado mayor posible del rectángulo áureo correspondiente a la planta de la Basílica Majencio, figura 17, es decir el lado mayor del Danteum es igual al lado menor de la Basílica y el lado menor, en consecuencia, es igual a la diferencia entre los dos lados de la Basílica.

Observemos que la planta de la Basílica Majencio longitudinalmente se divide en tres naves, los módulos de la nave principal son cuadrados, mientras que los de las naves laterales son rectángulos áureos. Notemos también que los rectángulos señalados, como partes destacadas de la misma, tienen la misma proporción e igual a la proporción de la planta general, por tener todos ellos diagonales paralelas o perpendiculares a la diagonal del rectángulo total, es decir todos son rectángulos áureos (fig. 17 izqda).

Podemos observar que los cuadrado inscritos (superior e inferiormente) en el rectángulo áureo de la planta delimitan las líneas de pilares que divide el edificio transversalmente (fig. 17 izqda).



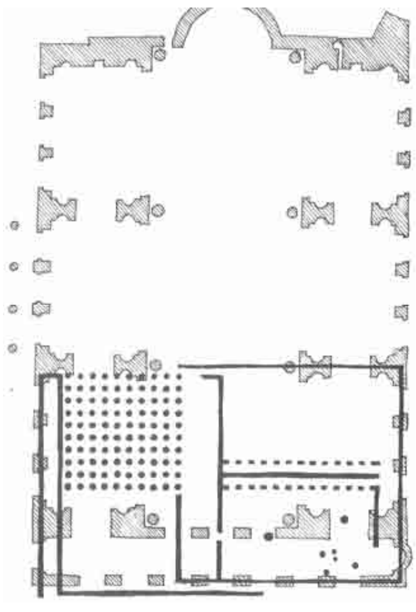


Figura 17: Plantas del Danteum y Basílica Majencio

La ley de la unidad y la trinidad está contenida en la propia forma del rectángulo tal como está en la división del Poema, formada por 3 cánticos de 33 cantos, más 1 de introducción.

Figura 18: Maqueta del Danteum

El rectángulo áureo de la planta del Danteum se divide en cuatro rectángulos iguales, (rectángulos que también son áureos, la proporción es invariante por semejanza, en este caso de razón 1/2), tres de ellos corresponden a las salas que representan los tres cánticos, Infierno, Purgatorio y Paraíso, situadas a tres niveles, $27 = 3^3$, $54 = 2x3^3$ y $81 = 3^4$ decímetros, medidas múltiplos de 3, representando la ascensión del camino procesional y el cuarto rectángulo un patio abierto, comparable al "ortus concluso"de la casa latina típica o al atrio abierto al cielo de la casa etrusca. Este cuarto rectángulo, espacio "voluntariamente derrochado", simboliza la juventud de Dante en pecado.

Podemos observar, en el rectángulo áureo de la planta, el cuadrado mayor sobre cada uno de los lados menores de dicho rectángulo (fig. 18), estos cuadrados se desplazan con el fin de conseguir el paso que permita iniciar el recorrido, donde se sitúa la escalera de 7 escalones, que se encuentra sobre el rectángulo intersección de los cuadrados anteriores, rectángulo de proporción φ^2 (en la basílica de Majencio este rectángulo intersección determina las líneas de pilares).

La sala hipóstila, "selva"de 100 columnas en un cuadrado de 20 metros de lado, y que soportan cada una un elemento del pavimento del Paraíso, sala situada encima, es el pórtico de ingreso a las salas dedicadas a los tres cánticos de la Comedia (o del Danteum).

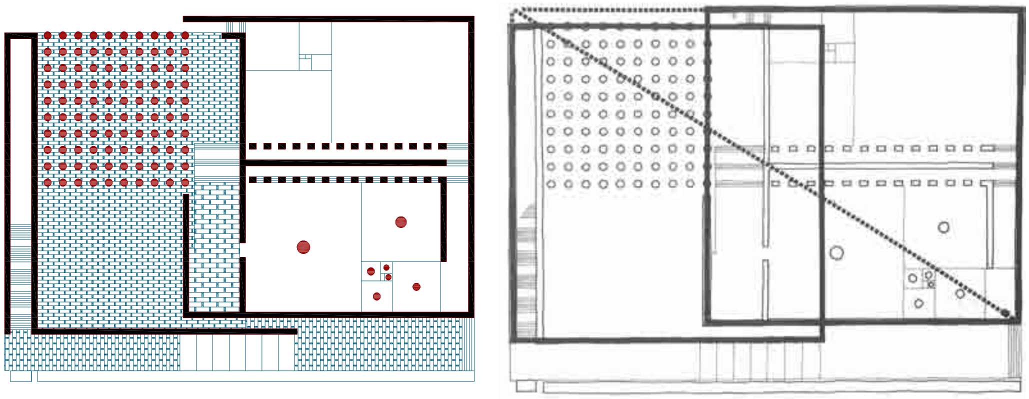


Figura 19: Planta del Danteum

La sala del Infierno, (fig. 20, inferior izquierda) se divide armónicamente aplicando el proceso iterativo R1 de restarle un cuadrado, obteniendo una sucesión decreciente e infinita de cuadrados, que para hacerlo realizable se detiene en el paso 7, en representación de los siete vicios capitales en contraposición de las 7 virtudes: 3 teologales y 4 cardinales, y los 7 días de la Creación.

En el centro de cada uno de los cuadrados obtenidos por la división armónica del rectángulo áureo de la planta se sitúa una columna, cada una de estas 7 columnas tienen un espesor proporcional al peso que soportan. Esta división armónica determina una espiral, espiral áurea, formada por arcos de circunferencia, cuyos radios que coinciden con los lados de los cuadrados, están en proporción áurea.

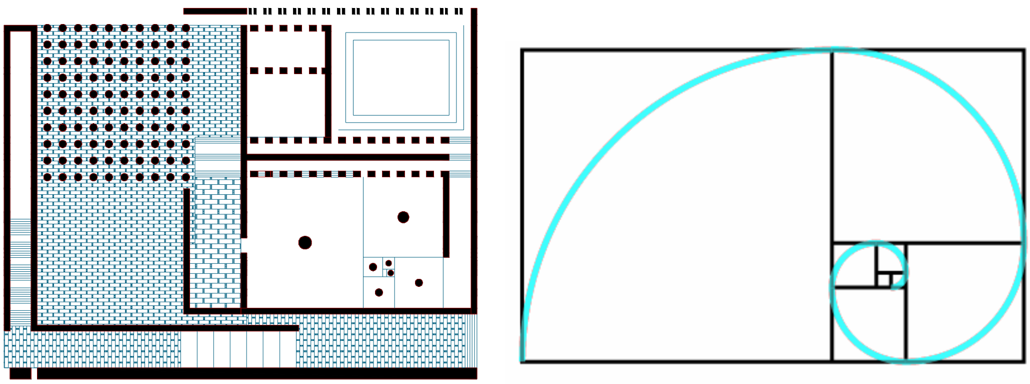
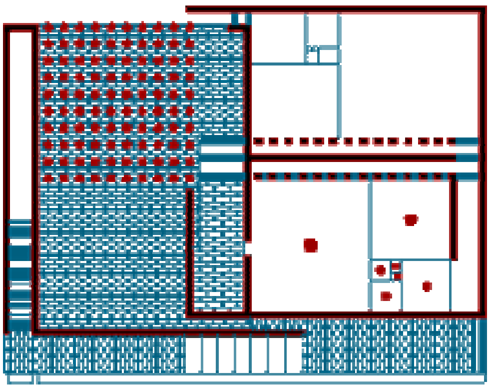


Figura 20: Sala del Infierno

La sala del Purgatorio obedece a la misma idea planteada en el Infierno, con la división del rectángulo áureo de la planta en 7 rectángulos áureos pero en dirección opuesta, para seguir el itinerario ascendente que debe recorrer el visitante (fig. 21).

En el techo aparece la misma disposición que en el suelo, estando los 7 cuadrados derivados de la descomposición áurea, abiertos para proporcionar luz y crear una sensación de descanso.



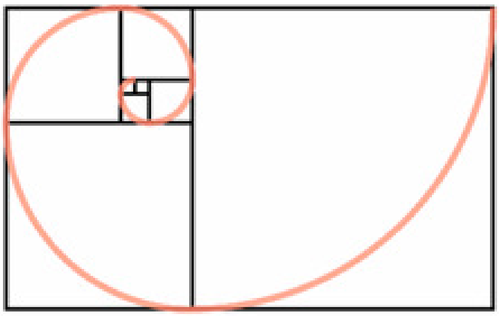


Figura 21: Sala del Purgatorio

La sala del Paraíso es un espacio abierto con una retícula de columnas de cristal ocupando el cuadrado asociado al rectángulo áureo (fig. 22).

Hay un acceso al Paraíso directo desde la calle, que se supone destinado a los Inocentes. En la memoria de Terragni no aparece la descripción literaria de esta sala.

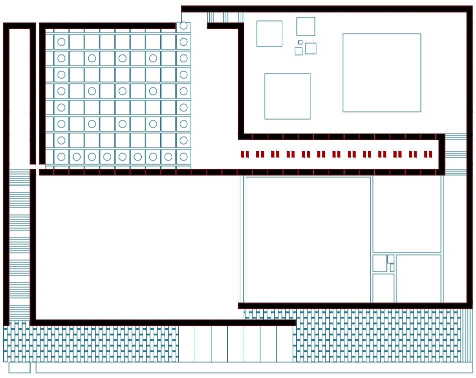


Figura 22: Sala del Paraíso

3.2. Aplicación al diseño de la descomposición armónica de un rectángulo áureo

A continuación mostraremos el resultado de una aplicación del algoritmo R.1 a un rectángulo áureo.

En la figura 23, podemos observar el trazado de las diagonales de los cuadrados restados al rectángulo áureo, hasta el orden ocho en el proceso iterativo mencionado, siguiendo dos posibles órdenes en el trazado de las mismas:

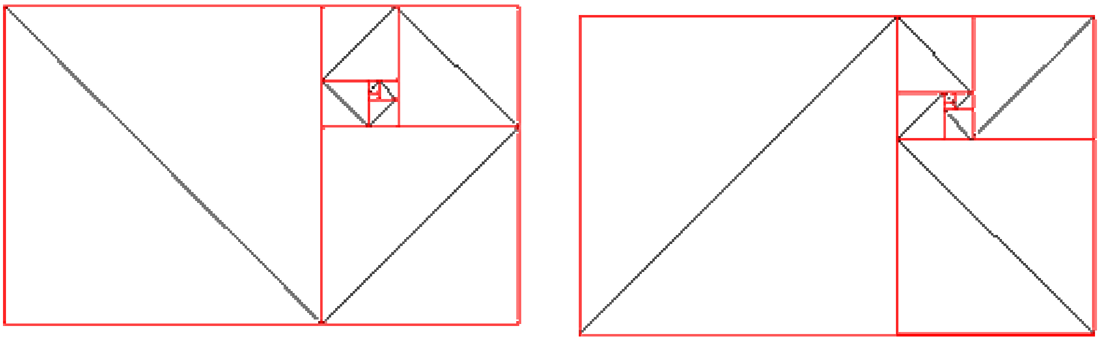


Figura 23: Diseños áureos

A estos diseños morfológicos o formales le podemos aplicar diferentes códigos de color para obtener diseños diferentes, como podemos ver en la figura 24.

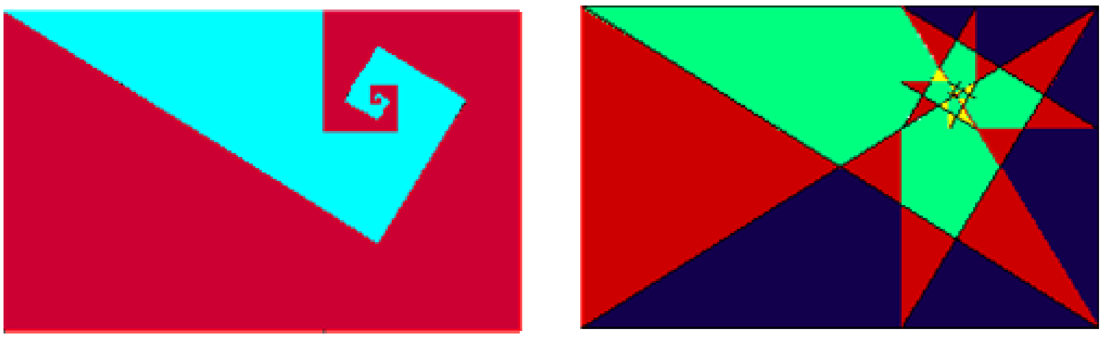


Figura 24: Diseños áureos

Terminamos esta charla con una poesía de Rafael Alberti

A la Divina Proporción

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cincos formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Nota: El análisis correspondiente a las figuras 3, 14 y 15 ha sido efectuado por los estudiantes: Miguel Ángel Padilla y Ricardo Samuel Señas

Bibliografía

[1] M. F. Blanco Martín, E. Nieto, *Morphological Interpretations of the golden rectangle*, ISAMA. First Interdisciplinary Conference of the International Society of The Arts, Mathematics and Architecture. pp 53-60, Universidad del País Vasco, San Sebastián, Junio 1999.
[2] M. F. Blanco Martín, E. Nieto, *Matemática y Diseño: el rectángulo áureo*, Actas del II Congreso Nacional de la Sociedad de Estudios Morfológicos de Argentina- SEMA, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, Octubre 1999.
[3] M. F. Blanco Martín, E. Nieto, *Rectángulos, Cuadrados, Orden y Belleza*, Proceeding 4º Congreso Nacional y 1º Encuentro Internacional de EGRAFÍA. Rosario, Argentina. Octubre 2004.
[4] M. F. Blanco Martín, *Análisis geométrico en Arquitectura*, Proceeding GRAPHICA. 2005 Recife, Brasil.
[5] M. F. Blanco Martín, E. Nieto, *New ways in symmetry*, Bridges London, 2006. pp 491-496, London, 2006.
[6] L. Cervera, *Arquitectura del colegio Mayor de Santa Cruz en Valladolid*, Ediciones de la Univ. de Valladolid, 1982.
[7] Ch. Bouleau, *Tramas. La Geometría secreta de los pintores*, Editorial Akal 1.996.
[8] R. Clark, M. Pausa, *Arquitectura: temas de composición*, Editorial G.G.,1984
[9] F. Ching, *Forma espacio y orden*, Editorial G.G., 1998.
[10] A. Durero, *De la Medida*, Editorial Akal.
[11] J. F. Eesteban, *Tratado de Iconografía*, Istmo, Madrid, 1998.
[12] M. Ghyka, *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidón.

[13] M. Ghyka, *El número de oro*, Editorial Poseidón. 1978.
[14] J. Hambidge, *The Elements of Dynamic symmetry*, Editorial Dover, 1967.
[15] Huntley, *The Divine Proportion*, Editorial Dover, 1970
[16] J. Kappraff, *Connections*, Editorial McGraw Hill, 2002.
[17] J. Kappraff, *Beyond Measure*, World Scientific Publishing, Singapore, 2002
[18] H. Koepf, *La arquitectura en sus planos*, Editorial Cátedra, 1999.
[19] A. Palladio, *Los cuatro libros de Arquitectura*, Editorial Akal ,1988.
[20] Th. L. Schumacher, *The Danteum : a study in the architecture of literature*, Princeton Architectural Press, 1975.
[21] G. Terragni, *Manifiestos, memorias, borradores y polémica / Giuseppe Terragni; prólogo de José Quetglas*, [traducción de Pere Vegé]. Murcia : Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Murcia, 1982.
[22] Vitrubio, *Los diez libros de Arquitectura*, Editorial Alianza.
[23] R. Witkower, *Los fundamentos de la Arquitectura en la edad del humanismo*, Editorial Alianza Forma, 1995.

Francisca Blanco Martín
Universidad de Valladolid
Escuela Tecnica Superior de Arquitectura
Departamento de Matemática Aplicada
Avda Salamanca s/n, 47014 - Valladolid
e-mail: ***fblanco@maf.uva.es***