Un paseo por el círculo: un paseo de más de 2.000 años

por

Alberto Bagazgoitia González, Berritzegune de Vitoria

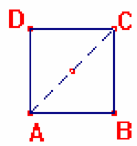
El problema que nos va a ocupar no es otro que el, bien conocido y resuelto definitivamente hace más de 100 años, problema de la "cuadratura del círculo", pero cuya historia merece la pena reconstruir pues nos llevará a recorrer la historia de más de 2.000 años de matemáticas. Saltaremos de la geometría, de donde surge el problema, al análisis (series y productos infinitos, curvas trascendentes) y a las ecuaciones y estructuras algebraicas para terminar con una comprensión profunda del número real.

Además, pondrá de manifiesto la doble vertiente en la que históricamente se ha movido el desarrollo de las matemáticas: la vertiente utilitaria, respondiendo a la necesidad de resolver problemas prácticos y reales, y la vertiente más teórica que prioriza el conocimiento profundo de las situaciones, el placer de la comprensión de los conceptos y estructuras, aunque se alejen de las necesidades prácticas.

1. Orígenes del problema

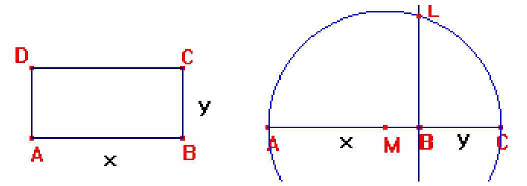
Los 3 problemas clásicos griegos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo están envueltos en un mundo de leyenda. Pero más allá de leyendas, su origen seguramente se encuentra en la insaciable curiosidad del espíritu humano, en la necesidad de conocer y de resolver problemas análogos a otros de los que ya se conocía la solución.

Así el problema de LA DUPLICACIÓN DEL CUBO era la generalización al espacio del problema que en el plano es de resolución inmediata, la duplicación del cuadrado. Para duplicar el cuadrado $ABCD$ basta construir otro de lado AC.



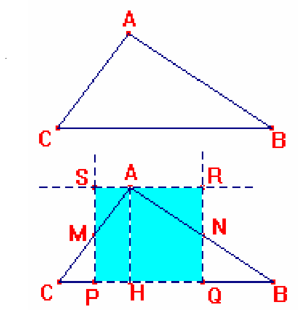
El problema de la TRISECCIÓN DEL ÁNGULO que consistía en dividir, con la única ayuda de la regla y el compás, un ángulo dado en 3 partes iguales podría tener como antecedente el hecho de que se sabía dividir un segmento en n partes iguales y también se sabía bisecar un ángulo.

El problema de LA CUADRATURA DEL CÍRCULO consistía en construir (con la única ayuda de la regla y el compás) un cuadrado de la misma área que un círculo dado. Los griegos sabían cuadrar otras figuras. **Sabían cuadrar un rectángulo**.

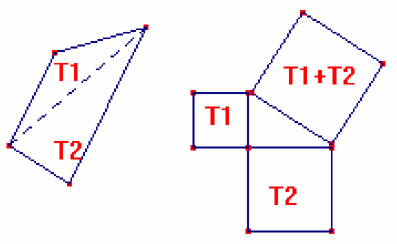


El segmento BL es media proporcional entre los segmentos x e y: $BL^2 = x \cdot y$. Luego BL es el lado del cuadrado buscado.

Sabían cuadrar un triángulo. Es fácil construir un rectángulo que tenga la misma área que un triángulo:



- Se traza por A una paralela al lado BC.
- Por los puntos M y N (puntos medios de los lados AC y AB) se trazan paralelas a la altura AH. Así se forma el rectángulo $PQRS$.



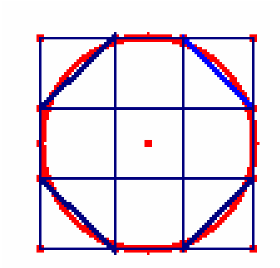
- El triángulo ABC y el rectángulo $PQRS$ tienen la misma área, ya que el triángulo $CPM = MAS$ y el triángulo $QBN = NRA$.
- Y como ya sabemos cuadrar un rectángulo queda resuelto el problema de cuadrar un triángulo,
- y con él el problema de cuadrar cualquier polígono de n lados. Bastaba con dividirlo en $n-2$ triángulos y cuadrar estos triángulos, luego sumaremos los cuadrados mediante el Teorema de Pitágoras.

Definiendo el problema

Ya en el antiguo Egipto se interesaron por las relaciones entre el cuadrado y el círculo. En el papiro de Rhind (comprado en 1858 por un egiptólogo escocés del que toma el nombre y copiado por el egipcio Ahmes en 1650 a.C. de un documento que era unos 200 años más viejo) ya se planteó: "Hallar un cuadrado equivalente a un círculo dado". Se propuso tomar como lado del cuadrado los $8/9$ del diámetro del círculo, lo que da un valor aproximado de π de $3,16$.

¿De dónde sale este valor? Se considera una circunferencia inscrita en un cuadrado dividido en 9 partes iguales.

El área del círculo puede considerarse semejante a la del octógono. Si cada cuadrado pequeño tiene 3 unidades de longitud, el área del octógono será $7\,x\,9 = 63$. Entonces el área del círculo de radio $9/2$ será ≈ 63, que es próximo a $64 = \pi \cdot (9/2)^2$. Lo que da para π un valor aproximado de $4 \cdot (8/9)^2 = 3,16$.



Son los griegos (600 a.C.) los que se empiezan a preocupar por verdades "inútiles", abandonando la utilidad de las matemáticas. Para entender esta evolución hay que situarse en el ambiente filosófico griego. Los filósofos estaban preocupados por "conocer" y muchas veces la realidad estaba oculta por "apariencias". Ejemplos de "verdades inútiles" son los cinco teoremas de Tales:

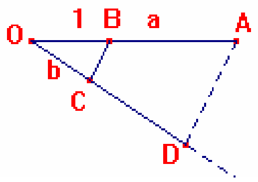
- Todo diámetro divide al círculo en dos partes iguales.

- Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

- Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.

- El ángulo inscrito en un circunferencia que abarca un diámetro es recto.

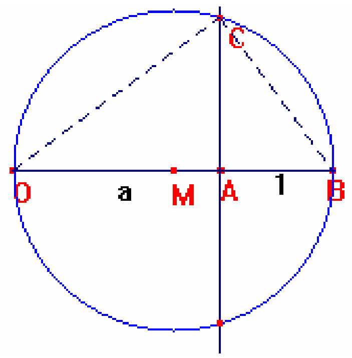
A la hora de medir dos segmentos aparecieron los inconmensurables y así los griegos abandonaron la idea de número y se quedaron con el segmento. El rigor estaba en la geometría y así utilizaban un álgebra geométrica: sumaban, restaban, multiplicaban, dividían segmentos o extraían la raíz cuadrada.

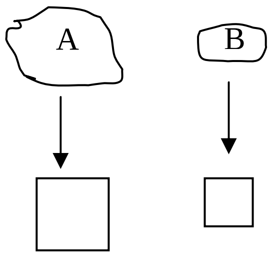


Por ejemplo para multiplicar los segmentos a y b basta hacer la construcción siguiente: $a = OA$, $b = OC$, $1 = OB$. Se verifica que $1/b = a/OD$, luego $OD = a \cdot b$.

Así todos los procesos algebraicos racionales pueden efectuarse por medio de construcciones geométricas.

La raíz cuadrada de un segmento también podía realizarse con regla y compás: $a = OA$, el segmento AC es la raíz cuadrada de a, $AC^2 = a \cdot 1$. Esta construcción es la que nos permitirá salir del cuerpo racional.





Para comparar figuras se comparaba su extensión (sin medir). Así $A > B$ si A es equivalente a un cuadrado y B es equivalente a otro menor. Los cuadrados se comparan poniendo uno dentro de otro. De aquí el problema de la CUADRATURA: Encontrar un cuadrado que tuviera la misma extensión (sin medir) que la figura a medir. Como ya hemos comentado los griegos sabían cuadrar rectángulos y polígonos. El problema era cuadrar el círculo.

¿Por qué la limitación a la regla y el compás?

Platón, cuyo magisterio filosófico influye en todo el pensamiento de la Grecia clásica, consideraba la recta y la circunferencia como las únicas figuras geométricas perfectas. Platón, por una premisa estética, trata de imponer que los tres problemas se resuelvan con regla y compás.

Se distinguía por tanto, entre el problema del cálculo aproximado del área del círculo y el de su construcción teórica exacta. En el primero, Arquímedes hizo grandes progresos con su método de aproximación a través de polígonos inscritos y circunscritos y el segundo se orientó hacia la posibilidad de construir π con regla y compás. Por otra parte, hay que decir que, como veremos, los griegos no tenían ningún reparo en utilizar otros instrumentos o figuras para obtener π, pero queda claro que con esto no se resolvía el problema. Queda así definido con precisión el problema:

Construir, con regla y compás, un cuadrado
que tenga la misma área que un círculo dado.

Un problema que Felix Klein englobaría dentro de la llamada "matemática inútil".

Insistimos en que el problema no es el de dibujar figuras con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar que, sin más ayuda que la regla y el compás, la solución puede hallarse teóricamente, suponiendo que nuestros instrumentos tienen precisión ideal.

Primera etapa

Nos situamos en la antigua Grecia, en el siglo **V a.C.**: A Anaxagoras (428 a.C.) se le atribuye el ser el primer griego que se interesó por el problema. Plutarco nos cuenta que mientras Anaxagoras estaba en prisión (estuvo encarcelado en Atenas por impiedad, por afirmar que el sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo y que la luna era una tierra deshabitada que recibía y reflejaba su luz del sol) se ocupó del problema de la cuadratura del círculo.

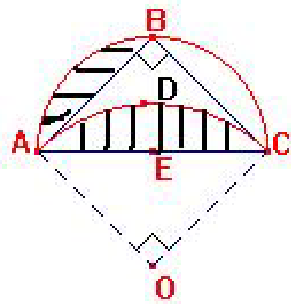
Posteriormente a **Anaxagoras**, hacia el año 430 a.C., **Antifon** y **Brison**, sofistas, inscribiendo un polígono en el círculo y duplicando su número de lados obtenían un polígono que se aproximaba cada vez más al círculo. Esto les permitía afirmar que como los polígonos son cuadrables también lo sería el círculo. Aristóteles criticó este razonamiento argumentando que los polígonos así construidos nunca llenarían el círculo. Aquí hay que decir que el problema planteado no era el de asegurar la existencia de la solución sino el de construirla con regla y compás.

Lo que sabemos (no ha sobrevivido ningún tratado matemático del siglo V a.C.) es un fragmento sobre **Hipócrates** que Simplicio (siglo VI) dice haber copiado literalmente de la Historia de las Matemáticas de **Eudemo** (perdida también). Describe una parte de la obra de **Hipócrates** que se refiere a la cuadratura de las lúnulas (problema que debió surgir de la cuadratura del círculo).

Una lúnula es una figura plana cerrada limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos. El fragmento de Eudemo atribuye a **Hipócrates** el siguiente teorema: "Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases". Y previo a este resultado: "Dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros".

A partir de este teorema Hipócrates consiguió la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de las matemáticas. Comenzó con un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles ABC y sobre la base (hipotenusa) construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo. Como AC es la hipotenusa de ABC isósceles: $AC^2 = 2AB^2$ y aplicando el resultado anterior:

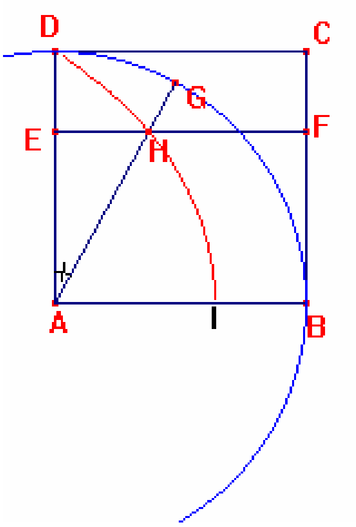
$$\frac{segmento\,AB}{segmento\,ADC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{2}.$$



Por tanto la lúnula $ABCD$ tiene la misma área que el triángulo ABC.

Una vez cuadrada esta lúnula podría pensarse que el círculo sería fácil de cuadrar. Hipócrates logró cuadrar tres lúnulas.

A **Hipias de Ellis** se le atribuye la invención de la curva trisectriz también llamada posteriormente **cuadratriz**. Esta curva fue la primera definida cinemáticamente. Su construcción es la siguiente: un segmento AD gira alrededor de A con un movimiento uniforme de rotación y al mismo tiempo el segmento DC se traslada paralelamente a sí mismo con un movimiento uniforme de traslación, de manera que ambos segmentos coinciden en AB. La intersección en cada instante de los segmentos móviles AG y EF determina un punto H de la cuadratriz DHI.



El desplazamiento del punto E sobre el segmento DA y el ángulo DAG son proporcionales, de forma que cuando E alcanza el punto A, el ángulo DAG sea DAB.

El punto H, intersección de EF y AG, describe la CUADRATRIZ.

Una vez construida esta curva la trisección de cualquier ángulo se realiza con facilidad pero no es seguro que **Hipias** conociese la aplicación de esta curva a la resolución del problema de la cuadratura del círculo. **Dinostrato** se ocupó de esto y por eso a la trisectriz se le conoce también como la cuadratriz de Dinostrato.

Dinostrato hacia el año 350 a.C. descubrió una propiedad sorprendente del punto I extremo de la trisectriz de Hipias. (Con nuestra notación la trisectriz puede representarse como $\pi\, r \operatorname{sen}\theta = 2a\theta$ siendo a el lado del cuadrado asociado a la curva, (r, θ) las coordenadas polares del punto H).

La clave está en el punto I donde la curva corta a AB, y que no puede obtenerse como los demás puntos de la curva, pues en esta posición final ambos segmentos móviles coinciden y, por tanto, no tienen punto de intersección. **Dinostrato** demostró que el lado a del cuadrado es la media proporcional entre AI y el arco DB.

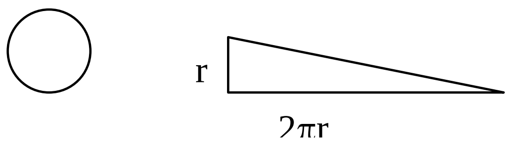
$$\frac{arco\, DB}{a} = \frac{a}{\overline{AI}} \Rightarrow arco\, DB = \frac{\pi\, a}{2} = \frac{a^2}{\overline{AI}}$$

(observar que el valor de r del punto I lo podemos obtener como: $\lim_{\theta\to 0} r = \frac{2a}{\pi}$) de manera que mediante este segmento AI era posible rectificar la circunferencia.

El último paso lo dará **Arquímedes** al demostrar cómo se podía pasar, con regla y compás, de la circunferencia rectificada a la cuadratura del círculo. A partir de esto la trisectriz, inventada dos siglos antes por Hipias, fue más conocida como cuadratriz, aunque los griegos tenían claro que el uso de esta curva violaba las reglas de juego pues no se podía construir con regla y compás. Por consiguiente, continuó la investigación.

Arquímedes (287 - 212 a.C.), sin duda el mayor matemático de la antigüedad y uno de los más grandes de toda la historia de las matemáticas también se ocupó de la medida del círculo. En su "Medida del círculo" (breve escrito, pero uno de los más importantes, que consta sólo de 3 proposiciones) establece la equivalencia del problema de la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia y el cálculo de π con notable aproximación. Éstas son las tres proposiciones:

1ª Proposición: Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo.



Al conseguir la equivalencia entre el círculo y un triángulo (que es cuadrable) podría parecer resuelto el problema de la cuadratura, pero el triángulo no es construible con regla y compás porque un cateto es la longitud de la circunferencia que implica construir π con regla y compás.

2ª Proposición: La razón de un círculo al cuadrado de su diámetro es aproximadamente de $11/14$.

Esto da un valor aproximado para π de $22/7$. Arquímedes, como si intuyera la imposibilidad de construir un segmento de longitud π (con regla y compás) se conforma con obtener una magnífica aproximación.

3ª Proposición: La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro y una parte de éste menor que la séptima, y mayor que diez setenta y unavos del diámetro

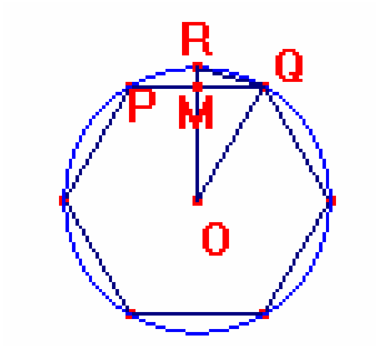
$$3 \cdot 2r + \frac{10}{71} 2r < C < 3 \cdot 2r + \frac{1}{7} 2r.$$

Lo que nos da para π una aproximación : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Es decir,

$$3,1408 < \pi < 3,1428.$$

Arquímedes calculó la longitud de la circunferencia inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares, a partir del hexágono, y duplicando su número de lados hasta llegar a 96 lados ($96 = 2^4 \cdot 6$). A partir del método de Arquímedes, el cálculo del valor de π es, como dice Boyer, más una cuestión de resistencia calculística que de inteligencia teórica. De hecho basta con el Teorema de Pitágoras para obtener una aproximación tan buena como se quiera. Si partimos del perímetro conocido de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia, entonces el perímetro del polígono regular de $2n$ lados se puede obtener aplicando dos veces el teorema de Pitágoras.

Si $OQ =$ r . Sea $PQ = s$ el lado conocido del polígono regular inscrito de n lados. Entonces $OM = u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ y entonces $MR = r - u = v$, de donde el lado del polígono de $2n$ es $RQ = w = \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ (o tomando $r = 1$, $l_n = s$, $l_{2n} = w$ queda $l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$).

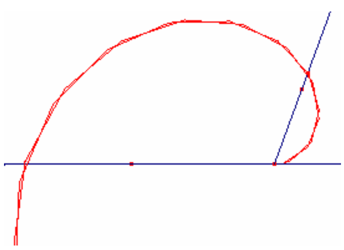


Arquímedes así hubiera podido calcular, partiendo del hexágono $l_6 = 1$,

$$
\begin{aligned}
l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \pi \approx 3,105828\,,\\
l_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad \pi \approx 3,132629\,,\\
l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}, \quad \pi \approx 3,139350\,,\\
l_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \quad \pi \approx 3,141032\,.
\end{aligned}
$$

En realidad Arquímedes no obtuvo estos valores sino que evitó el cálculo de raíces cuadradas utilizando desigualdades para obtener la acotación $3,1408 < \pi < 3,1428$. Variaciones de este método se usaron en los siguientes 1.800 años para mejorar su aproximación. Hay que decir que ni Arquímedes ni ningún otro matemático griego utilizó nuestra notación π, ni la idea de un número como razón de la circunferencia al diámetro.

Arquímedes y la cuadratura del círculo



Arquímedes se vio atraído por los 3 famosos problemas. La espiral que lleva su nombre fue construida con toda probabilidad en relación con el problema de la cuadratura del círculo (o rectificación de la circunferencia).

Arquímedes define su espiral de la forma siguiente: "Si permaneciendo fijo uno de los extremos de una recta, ésta gira en un plano con velocidad uniforme hasta volver a la posición inicial y un punto, también con velocidad uniforme, recorre al mismo tiempo la recta que gira a partir del extremo fijo, este punto describirá una espiral". En la proposición 20 del libro "Sobre las espirales" afirma: "Si se traza una tangente a la espiral en un punto cualquiera de su primera revolución, se une el punto de contacto con el origen y haciendo centro en éste con radio igual a la recta así construida se describe un círculo y desde el origen de la espiral se traza a esta recta una perpendicular, la perpendicular y la tangente se cortarán, y la parte de la perpendicular comprendida entre la tangente y el origen de la espiral será igual al arco de círculo comprendido entre el punto de contacto y el de intersección del círculo con la recta origen de la espiral, tomando el arco en el sentido del movimiento".

El trazado arquimediano de tangentes a la espiral permite construir un segmento rectilíneo igual a la longitud de un arco circular de radio y ángulo central dados y, por tanto, rectificar la circunferencia y resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Así pues, Arquímedes trabajó en las dos direcciones en lo que se refiere a la cuadratura del círculo. Buscando una buena aproximación de π y construyendo un segmento de longitud igual a un arco dado. Para ello utilizó su espiral, que no era construible con regla y compás.

Estos fueron los pasos dados en la Grecia antigua.

¿Qué se sabía sobre π en otras civilizaciones?

En **CHINA**: en los primeros siglos de la era cristiana se conocían: $3,1547$, $\sqrt{10}$, $92/29$, $142/45$ y en el siglo III Liu Hui obtiene $3,14$ con un polígono regular de 96 lados y $3,14159$ con un polígono de 3.072 lados. Tsu Ch'ung-Chih (430-501) conocía la fracción $22/7$ que calificó de inexacta. El valor exacto, según él, era $355/113$. También dio $3,1415927$ como valor por exceso y $3,1415926$ como valor por defecto.

Los **HINDÚES**: en el siglo VI en Aryabhatiya escrito por Aryabhata se toma π como $3,1416$ con un polígono de $768 = 3 \cdot 2^8$ lados. Este valor ya lo conocía Ptolomeo en el año 150. También hay que citar a Madhava quien hacia el año 1400(?) descubre los desarrollos en serie de seno, coseno y arcotangente y consigue calcular 11 cifras decimales de π sumando 21 términos de la serie que, 200 años después, redescubriría Gregory.

2. Del Renacimiento a la Matemática Moderna

El gran avance en el cálculo de π vendría del desarrollo del Análisis y no de la Geometría.

Antes de Vieta (1540-1603) se habían dado ya muchas aproximaciones de la razón de la circunferencia al diámetro. Merece la pena destacar a **Nicolás de Cusa** (1401-1464), que aunque fue mejor eclesiástico que matemático, en el campo de la matemática se le conoce como un "cuadrador del círculo" mal orientado. Creyó haber llegado a una cuadratura basándose en un ingenioso proceso de promedio entre polígonos inscritos y circunscritos. Aunque su método fue erróneo, fue uno de los primeros europeos modernos en intentar resolver un problema que había fascinado ya a las mejores mentes de la antigüedad y que sus esfuerzos estimularon a algunos de sus contemporáneos a hacer más crítica su obra.

En 1593 **Vieta** calculó π con 10 decimales exactos utilizando un polígono de $393216 = 3 \cdot 2^{17}$ lados. Fuera de Europa también se realizaban avances en este terreno. En la primera mitad del siglo XV, más de 150 años antes que Vieta, Al Kashi (1380-1429), astrónomo persa, calculó π con 17 cifras decimales. Efectuó 27 duplicaciones del hexágono para componer una tabla de senos con paso $1'$).

En 1596 **Ludolph Van Ceulen** (1540-1610) publicó π con 20 decimales exactos obtenido del polígono regular de 15 lados y duplicando sucesivamente el número de lados 37 veces. Posteriormente lo calculó con 30 decimales exactos y su viuda lo hizo grabar en su tumba. En homenaje se le llamó a π en algunos países "la constante ludolphina".

Sin embargo este tipo de hazañas no tiene ningún significado teórico; más importante sería obtener una expresión exacta y a este respecto fue Vieta, en 1579, el primero que dio una expresión numérica exacta para π (fórmula todavía sacada de la geometría, pero que ya implica un producto con una infinidad de factores, -que es ya un concepto sacado del análisis-), inscribiendo un cuadrado en un círculo dado y aplicando la fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n \sec \frac{\pi}{n}$:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Así pues, fue Vieta el primero que expresó π analíticamente, un resultado muy importante porque el lenguaje de la aritmética, el álgebra y la trigonometría estaba invadiendo los dominios de lo infinitamente pequeño, hasta entonces controlado por la geometría.

En la primera mitad del siglo XVII el holandés **Willebrod Snell** (1580-1626) obtuvo 34 decimales mejorando las acotaciones del arco x, (Huygens lo demostró correctamente) y destacó también la aportación de **Gregory de Saint Vincent** (1584-1667) quien, por cierto, fue tutor en la corte de Felipe IV de España. En su obra "Obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas" vino a rellenar una laguna dejada por **Fermat**. Éste en 1629 descubrió un teorema relativo al área encerrada bajo las curvas de la forma $y = x^m$. Con nuestra notación:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \quad \text{enteros y fraccionarios.}$$

Para $n = -1$ el método evidentemente fallaba pero Gregory demostró que según crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva de la hipérbola $xy = 1$ lo hace aritméticamente. O sea que aunque de modo impreciso obtuvo la igualdad:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a.$$

Gregory de Saint Vincent creyó haber conseguido cuadrar el círculo, error que perjudicó su reputación, pero la investigación del problema seguía produciendo resultados matemáticos.

Es en la segunda mitad del siglo XVII donde podemos considerar que comienza una nueva etapa en la resolución del problema.

Wallis (1616-1703) fue el matemático (y teólogo) inglés anterior a Newton más importante. Es un ejemplo del hecho, tan frecuente en la historia de las matemáticas, de que un descuido ocasional por las exigencias del rigor lógico puede tener saludables efectos en el progreso matemático. Obtuvo su fórmula del producto infinito para π, pero a diferencia de Vieta, éste utilizaba solamente operaciones racionales:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}$$

aplicando sus principios de inducción e interpolación, no muy rigurosos, a la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Hobbes (1588-1679) creyó haber demostrado la cuadratura del círculo. Cuando, por primera vez, ojeó los textos de Euclides ya había cumplido 40 años (no se enseñaban matemáticas a los ingleses cultivados) y al llegar al teorema de Pitágoras exclamó asombrado: ¡Por Dios! ¡Esto es imposible! Comprobó la demostración y a partir de ahí se entregó a la geometría con ardor: "La geometría tiene algo que la asemeja al vino" escribió. Criticó la aritmetización de la geometría llevada a cabo por Wallis, y tuvo en éste a su mayor crítico poniendo en evidencia sus errores y a la vez aprovechaba para poner en duda sus opiniones políticas y religiosas. En 1665, a los sesenta años, publicó un libro en el que figuraba un ingenioso método para cuadrar el círculo. En realidad no era más que una excelente aproximación pero Hobbes estaba convencido de su exactitud. A lo largo de su vida realizó varias demostraciones (con 90 años insiste en otra demostración). Huygens, considerado el matemático más importante de la época, dice que no merece la pena emplear más tiempo en refutar sus continuos errores.

James Gregory (1638-1675), que extendió el algoritmo arquimediano a las cuadraturas de elipses e hipérbolas, intentó demostrar, sin éxito, la imposibilidad de la cuadratura del círculo por métodos algebraicos. Huygens (1629-1695) estaba convencido de que π se podría expresar algebraicamente y se produjo una disputa acerca de la validez de los métodos de Gregory.

Gregory conocía los desarrollos en serie de MacLaurin de $\tan x$, $\sec x$, $\arctan x$ y $arcsecx$ pero sólo la del arco tangente lleva su nombre: $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$.

La cuestión de la trascendencia de π era un problema difícil y todavía tendrían que pasar dos siglos antes de que se resolviese definitivamente y dando la razón a Gregory.

Newton (1642-1727) y **Leibniz** (1646-1716). El nombre de Leibniz ha quedado asociado a la serie infinita $\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$ cuya suma constituyó uno de sus primeros descubrimientos matemáticos. Esta serie, que aparece en su cuadratura del círculo, es sólo un caso particular del desarrollo del arco tangente que había sido dado anteriormente por Gregory. El hecho de que Leibniz fuera prácticamente un autodidacta en matemática explica en parte la frecuencia con que aparecen en su obra casos de redescubrimiento de resultados ya conocidos.

Newton también obtuvo una expresión para $\pi = 3\sqrt{3}/4 + 24(1/12 - 1/5 \cdot 2^5 + 1/28 \cdot 2^7 - \cdots)$ con la que calculó 15 cifras decimales y confesó sentirse avergonzado por ello: "Me da vergüenza confesar a cuántas cifras llevé esos cálculos que realicé por no tener otra cosa que hacer en aquel momento".

En 1706 **John Machin** descubrió su fórmula $\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$ siendo $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Para obtener la fórmula Machin se parte de un ángulo α tal que $\tan\alpha = 1/5$. De aquí se obtiene $\tan 2\alpha = 5/12$ y $\tan 4\alpha = 1 + 1/119$. Por tanto $\arctan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1 + \tan 4\alpha} = \frac{1}{239}$, lo que implica que $\arctan 1/239 = 4\alpha - \pi/4$. Luego $\pi/4 = 4\arctan 1/5 - \arctan 1/239$. Esta serie proporciona un método bastante eficiente de cálculo y Machin obtuvo 100 cifras decimales de π. Superó los dos problemas principales: lentitud de la convergencia de la serie y evitó el cálculo de raíces.

En los siguientes 200 años hay pocos cambios en los métodos de cálculo de π, que se basan fundamentalmente en variaciones de a fórmula de Machin. El cenit de los cálculos a mano se alcanza con **William Shanks** (1812-1882) quien publica en 1853 primero 607 cifras y luego 707. Sin embargo comete un error en la cifra 528, error que pasó desapercibido hasta que en 1945 D. F. Ferguson, en uno de los últimos cálculos hecho a mano, halla 530 cifras. En 1947 usando una calculadora de mesa, calcula 808 mediante la fórmula $\pi/4 = 3\arctan 1/4 + \arctan 1/20 + \arctan 1/1985$.

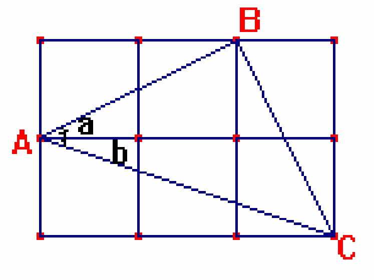
Euler (1707-1783), uno de los mayores matemáticos de la historia, también aportó sus esfuerzos al cálculo de π. De hecho la consolidación definitiva del uso de la letra griega π para representar la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro se debe a Euler. Ya en 1647 **Oughtred** usó el símbolo d/π para la razón del diámetro de un círculo a su circunferencia, **David Gregory** en 1697 usó π/r para la razón de la circunferencia a su radio, pero fue **William Jones** en 1706 quien dio el primer uso a π con su significado actual.

Euler adoptó el símbolo en 1737 y rápidamente se convirtió en notación estándar. Hay que decir que muchas de las notaciones que utilizamos actualmente se deben a Euler: el número e, la unidad imaginaria i, la forma moderna de la trigonometría, sen, cos, tan como funciones de una magnitud angular. Fruto de la relación entre la función exponencial y las funciones trigonométricas $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ es su famosa fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$. Esta expresión será decisiva en la resolución definitiva del problema.

También calculó cifras de π y encontró varias fórmulas notables en las que aparece π: $\pi = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 - 1/10 + \cdots$ donde el signo, a partir de los dos primeros, se determina así:

- si el denominador es primo de la forma $4m + 1$ le corresponde signo $-$,
- si el denominador es primo de la forma $4m - 1$ le corresponde signo $+$,
- si el denominador es compuesto el signo sería el del producto que corresponde a sus factores primos

Y obtuvo la fórmula "tipo Machin": $\pi/4 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$. Es fácil probar este resultado geométricamente. En la figura el triángulo ABC es rectángulo en B e isósceles. Por tanto el ángulo $A = a + b$ mide $\pi/4$ radianes, mientras que $a = \arctan 1/2$ y $b = \arctan 1/3$.



3. Tercer período: estructuras algebraicas

Durante el siglo XVIII se descubrieron más fórmulas del tipo Machin. Se había avanzado mucho en el cálculo de π pero muy poco sobre el conocimiento de su naturaleza.

Podemos dar por terminado el período anterior en 1761 cuando **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) demuestra que π es irracional (Euler había demostrado en 1737 que e es irracional). Demostró que si x es racional ($\neq 0$) entonces $\tan x$ es irracional, y como $\tan \pi/4 = 1$ se sigue que $\pi/4$ y π no pueden ser racionales. Este resultado no zanjaba el problema de la cuadratura del círculo, puesto que los irracionales cuadráticos sí son construibles con regla y compás.

Pero, ¿qué números eran construibles con regla y compás? La respuesta a esta pregunta la daría Wantzel en 1.837.

Cada construcción con regla y compás consiste en una sucesión de operaciones de las que enumeramos a continuación:

1.- Unir dos puntos por una recta.

2.- Hallar el punto de intersección de dos rectas.

3.- Trazar una circunferencia de centro y radio dados.

4.- Hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra o con una recta.

Un elemento (punto, recta o circunferencia) se considera conocido si se da desde el principio o si se ha construido en algún paso previo. Así con regla y compás podemos construir todos los números que puedan deducirse de la unidad mediante pasos racionales $(+, -, \cdot, /)$: r/s (r, s enteros). Podemos obtener también números irracionales haciendo uso del compás. (Ej. $\sqrt{2}$), y operando con éste también obtendremos $a + b\sqrt{2}$, $(a + b\sqrt{2})/(c + d\sqrt{2})$, $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Todos estos números nuevos también son de la forma $r + s\sqrt{2}$.

En general, si k es un número racional no cuadrado ($k \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$) podemos construir $a + b\sqrt{k}$ y $\mathbb{Q}\left(\sqrt{k}\right) = \left\{a + b\sqrt{k} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$:

- es un cuerpo conmutativo, el menor que contiene a $\mathbb{Q}$ y $\sqrt{k}$,
- es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de base $(1, \sqrt{k})$,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$ es una extensión cuadrática de grado 2 de $\mathbb{Q}$.

Así, con la regla y una única utilización del compás podemos construir $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$ y recíprocamente, es fácil ver que sólo se pueden obtener números de esta forma. Lo que el compás realiza en una construcción es definir puntos (o sea coordenadas) como intersección de dos circunferencias o de circunferencias y rectas. La circunferencia puede escribirse $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y al cortar con una recta $ax + by + c = 0$ se obtienen soluciones de la forma $p + q\sqrt{k}$ con $p, q, k \in \mathbb{Q}$, y lo mismo al cortar 2 circunferencias.

Si el proceso se repite obtendremos puntos cuyas coordenadas serán elementos de un cuerpo obtenido por extensiones sucesivas de orden 2 del cuerpo de los racionales

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \mathbb{Q}, \\
K_1 &= a_0 + b_0\sqrt{k_0} \,|\, a_0, b_0 \in K_0, k_0 \in K_0 \quad \text{pero} \quad \sqrt{k_0} \notin K_0, \\
K_2 &= a_1 + b_1\sqrt{k_1} \,|\, a_1, b_1 \in K_1, k_1 \in K_1 \quad \text{pero} \quad \sqrt{k_1} \notin K_1, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Los números construibles son aquellos y sólo aquellos que pueden hallarse mediante una tal sucesión de cuerpos ampliados, esto es, que pertenecen a un

cuerpo K_n del tipo anterior. La magnitud del número n de extensiones necesarias no importa, sólo medirá el grado de complejidad del problema.

En 1837 **M. L. Wantzel** (1814-1848) publica su artículo "Investigación sobre los medios de reconocer si un problema de geometría se puede resolver con regla y compás". En él caracteriza los números construibles con regla y compás: "$z \in \mathbb{C}$ es construible con regla y compás si y sólo si $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ es una potencia de 2".

Así, traduce los problemas geométricos de regla y compás al terreno del álgebra y reduce el problema de comprobar la constructibilidad de un número a la verificación del grado de un polinomio. Se logra así un punto de unión entre el álgebra y la geometría.

Aparecen en escena los números algebraicos y trascendentes. Un número **algebraico** es cualquier número x real o complejo que satisface una ecuación algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$) donde los coeficientes a_k son enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico , con $x^2 - 2 = 0$.

El concepto de número algebraico es una generalización natural de número racional que constituye el caso especial para $n = 1$. Que no todo número real es algebraico se puede demostrar por un procedimiento debido a Cantor, consistente en demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Los no algebraicos se llaman **trascendentes**, pues, como dijo Euler, "trascienden el poder de los métodos algebraicos". Ya Liouville, antes que Cantor, había demostrado la existencia de números trascendentes y construyó ejemplos de tales números.

Liouville (1809-1882) probó en 1844 que hay números irracionales que no son algebraicos, construyendo una amplia clase de números reales no algebraicos. Por ejemplo, $0'1001000100001...$

En la primera mitad del siglo XIX los problemas abordados desde el punto de vista del álgebra están ligados a la resolución de ecuaciones, a través de los trabajos de **Lagrange, Van der Monde o Gauss** (1777-1855) quien en 1801 publicó la caracterización de polígonos regulares construibles con regla y compás, estudiando la ecuación $x^n - 1 = 0$, y realizó la construcción del polígono de 17 lados.

Desde hacía más de 2000 años, se sabía como construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Gauss tras este descubrimiento decidió dedicarse a las matemáticas. El polígono regular de n lados es construible con regla y compás si, y sólo si, $n = 2^\alpha$ con $\alpha \geq 2$ o de la forma $2^\alpha p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ con $\alpha \in \mathbb{N}$ y p_i primos de Fermat distintos.

Abel probó en 1826 la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado y Galois en 1830 aproxima la noción de cuerpo engendrado por números algebraicos. Posteriormente Dedekind y Kronecker construirían la teoría de cuerpos.

Wantzel dio la primera prueba completamente rigurosa de la imposibilidad de trisecar un ángulo con la sola ayuda de regla y compás. También probó la imposibilidad de resolver la duplicación del cubo. Resolvió así dos de los tres famosos problemas griegos. Veamos brevemente su razonamiento.

TRISECCIÓN DEL ÁNGULO: Dado un ángulo cualquiera construir con regla y compás la tercera parte de ese ángulo. El problema no tiene solución general. Wantzel probó que un ángulo α es trisecable con regla y compás si, y sólo si, el polinomio $4x^3 - 3x - cos\alpha$ es reducible. Construir un ángulo α equivale a que el punto $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ se puede construir, pues este punto es la intersección de la circunferencia centrada en el origen con la semirrecta que parte del origen y forma un ángulo α con la parte positiva de la recta real. Como $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{(1-\cos^2\alpha)}$, se tiene que el ángulo α es construible si, y sólo si, $\cos\alpha$ es construible. Por ejemplo, el ángulo π se puede trisecar puesto que $\cos\pi/3 = 1/2$. Sin embargo $\pi/3$ no se puede trisecar porque $\cos\pi/9$ no es construible. En efecto, ya que $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha = \cos\alpha(\cos 2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = cos^3\alpha - 3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos 2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Por tanto, el coseno buscado será una raíz del polinomio $4x^3 - 3x - \cos 3\alpha$. Según como sea $\cos 3\alpha$ será el polinomio mínimo. Si $3\alpha = \pi/3$, entonces el polinomio será $4x^3 - 3x - 1/2$, luego $8x^3 - 6x - 1$ que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ pues no tiene raíces en $\mathbb{Q}$, luego $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 3$ y así $\pi/3$ no se puede trisecar.

DUPLICACIÓN DEL CUBO: Construir un cubo que tenga el doble de volumen de un cubo dado. Es imposible duplicar un cubo arbitrario pues $\sqrt[3]{2}$ no es construible con regla y compás ya que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ no es potencia de 2.

También se puede abordar la **CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES**. Los vértices de un polígono regular de n lados son las n raíces enésimas de la unidad.

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n} = (\cos 2\pi/n, \operatorname{sen} 2\pi/n).$$

Basta que $\cos 2\pi/n$ sea construible. Así se ve que el heptágono regular no es construible. Analíticamente podemos decir que la ecuación característica del heptágono $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ no puede ser resuelta por medio de un número finito de radicales cuadráticos. Para demostrarlo basta ver que si z es solución también lo será $1/z$ y haciendo el cambio $x = z + 1/z$ se obtiene la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Se demuestra 1) que este polinomio es irreducible (no puede descomponerse en dos factores cuyos coeficientes sean números racionales) y 2) una ecuación cúbica irreducible de coeficientes racionales no puede resolverse por medio de radicales cuadráticos.

El problema de **LA CUADRATURA DEL CÍRCULO** es mucho más difícil que los otros dos y requiere la técnica del análisis matemático superior. Como un círculo de radio 1 tiene área π, el problema de cuadrar el círculo es construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$. Y éste es construible si, y sólo si, π es construible.

Como todo número construible es algebraico bastará probar que π no es algebraico (o sea que π es trascendente) cosa que haría Lindemann en 1882.

Entramos en el tramo final: **La trascendencia de** π.

Demostrar que un número real concreto, tal como e o π, es trascendente suele ser muy difícil. Liouville sólo pudo demostrar en 1844 que ni e ni e^2 podían ser raíces de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros, por tanto dado un segmento unidad, los segmentos de longitud e y e^2 no son construibles con regla y compás. Y tuvieron que pasar otros 30 años antes de que Charles Hermite (1822-1901) consiguiese demostrar en 1873 que e no podía ser raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros: es decir, e era transcendente.

Cantor (1845-1918) demostró en 1874 que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Por tanto el conjunto de los trascendentes es no numerable. Resulta que "casi todos los reales son trascendentes".

Lambert había demostrado ya en 1767 que π era irracional y **Legendre** en 1794 que tanto π como π^2 eran irracionales, pero estas demostraciones no resolvían el viejo problema de la cuadratura del círculo puesto que muchos irracionales eran construibles.

Hermite en 1873 da una nueva prueba de la irracionalidad de π y de π^2 de interés por ser el germen de la demostración de la trascendencia de π. El problema alcanzó la solución definitiva en 1882 cuando Lindemann (1852-1939) demostró que π era trascendente generalizando la obra de Liouville y Hermite. Lindemann lo planteó así: se ha probado ya que una ecuación del tipo $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$ no puede existir si los coeficientes a_j y los exponentes de e son naturales. ¿No será posible probar algo similar si a_j y los exponentes de e fuesen números algebraicos cualesquiera? Y lo consiguió. De hecho su teorema más general sobre la función exponencial se enuncia así: "Una ecuación no puede existir si los a_j son números algebraicos arbitrarios y los b_j números también algebraicos distintos entre sí".

La trascendencia de π es, por tanto, un corolario de este teorema, pues como $e^{i\pi} + 1 = 0$, si π fuese algebraico lo sería también $i\pi$ y la existencia de esta ecuación contradiría el teorema de Lindemann. Aquí estaba la respueta al problema de la cuadratura del círculo. Para que la cuadratura fuese posible con regla y compás, π tendría que ser raíz de una ecuación algebraica y una raíz expresada por medio de raíces cuadradas.

Hilbert dio en 1893 una demostración más sencilla que la de Lindemann. Demostró la trascendencia de e y posteriormente la de π.

Cuarto período: Aparición de las computadoras

El problema estaba resuelto pero se continuaron y continúan calculando cifras de π y también surgieron nuevas preguntas. La primera computadora se utilizó en 1949 por Reitweisner y calculó 2037 decimales en 70 horas. En 1990 se calcularon más de 1000 millones de cifras en la Universidad de Columbia. En septiembre de 2002 Kanada y un equipo de la Universidad de Tokio calculó 1.241.100.000.000

cifras de π.

Una vez zanjado ese problema aparecen nuevos retos en los que interviene π. Otros problemas:

1.- En 1925 el matemático polaco Alfred Tarski (1902-1983) replanteó el problema de la siguiente forma: "¿Se puede dividir un círculo en un número finito de piezas que puedan ser recolocadas formando un cuadrado?". En 1989 el húngaro Miklos Laczkovich demostró que sí, en 39 páginas de matemáticas duras. Estableció que se podía hacer recortando un total de 1050 piezas.

2.- ¿Es π normal? (según la definición de Borel): las cifras del 0 al 9 aparecen de media 1 vez sobre 10, los números 00 al 99 aparecen 1 vez de 100,...

Bibliografía

[1] C. B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Universidad, 1986.
[2] R. Courant, H. Robbins, *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, 1962.
[3] F. Klein, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Nivola, 2006.
[4] J. L. Montesinos, *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*, Síntesis, 2000.
[5] AA.VV. *Científicos griegos*, Aguilar, 1970.
[6] J. Aymes, *Ces problèmes qui font les mathámatiques*, A.P.M.E.P. nº 70.
[7] F. J. Pérez Fernández, *Viaje a través de la cuadratura del círculo*, Conferencia plenaria en las X JAEM, 2001.

Alberto Bagazgoitia González
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz 93, 01009 Vitoria-Gasteiz
e-mail: ***albagaz@gmail.com***