# Visualización y Matemáticas

**por**

**Fernando Castañeda, Universidad del País Vasco**

Esta conferencia se pronunció el 21 de Abril de 2004. Una semana antes, el día 14, había fallecido el Profesor Miguel de Guzmán. Al comienzo de la conferencia pude compartir con todos los asistentes nuestro pesar por su muerte. Quiero dedicar a su memoria estas sencillas reflexiones sobre un tema del que Miguel era un experto, además de tener para él un cariñoso recuerdo.

## 1. La importancia de las matemáticas.

Las siguientes palabras, de Galileo, son citadas con mucha frecuencia:

"La filosofía está escrita en el gran libro del Universo, constantemente abierto para nuestro deleite, pero que no puede ser entendido salvo que aprendamos primero a comprender el lenguaje en que está escrito.

El libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra suya; sin ellos uno está vagando a través de un oscuro laberinto". Galileo ($\approx 1623$).

Esta misma idea la podemos encontrar expresada de otras formas:

" La ciencia es muy útil, importante y hermosa, pero su apreciación exige el conocimiento del lenguaje de las matemáticas. [...] Por eso es tan importante el bachillerato, porque es el eje vertebral donde se forman las personas [...]." P. M.

Etxenike (2003).

Mencionemos otros comentarios en el mismo o parecido sentido de los profesores Caffarelli, de la Universidad de Austin, Texas, (septiembre de 2003): “Picasso encontraba la armonía de lo geométrico en lo estético y yo la encuentro en lo matemático”; Ball, presidente de la Unión Matemática Internacional (octubre de 2003):“Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia, pero tienen su propia estructura”; Vázquez, Premio Nacional de Investigación 2003 en el área de Matemáticas y Tecnología (octubre de 2003): “[...] Los matemáticos ven cómo sus números, figuras y funciones permiten montar los modelos del mundo real: la mecánica de sólidos y de fluidos, la electricidad y el magnetismo, la energía, el calor, las ondas; todo parece estar implícito en las leyes, fórmulas y números”.

El Profesor Sánchez Ron, físico e historiador de la ciencia y académico de la RAE (Real Academia española de la Lengua) dice que “hay que introducir la ciencia en la sociedad” y añade: “Creo que su conocimiento [de la ciencia] es imprescindible para conseguir un mundo mejor. La ciencia es el mejor instrumento inventado para librarnos de los mitos, para facilitar el intercambio racional entre las personas. La ciencia es también un instrumento de poder económico, por eso hay que conocerla. Para hablar del futuro de la biogenética [...], no se puede partir de prejuicios sino que es imprescindible tener conocimiento científico. (El País, 19 de octubre de 2003.)

Otros lo han dejado dicho de otras maneras: “Sólo las sociedades con una componente científica podrán competir en el futuro” (P. M. Etxenike, El Diario Vasco, septiembre de 2003).

Ha dado que hablar (o, mejor, que escribir) un artículo del Prof. Sánchez Ron publicado en prensa (El País, 27 de septiembre de 2003) y con el provocador título: *¡Vivan las matemáticas!*. En él, entre otras muchas e interesantes cosas, se dice: “... la mayoría de los alumnos de selectividad suspendió en Matemáticas;[...]. Nos escandalizamos, o al menos algunos se escandalizan, al saber de los malos resultados de nuestros jóvenes en matemáticas, pero ¿no recordamos la mala fama social, la leyenda negra, que desde hace generaciones afecta a esta venerable, varias veces milenaria, materia?¿Es que alguien no ha oído, cuando no dicho él mismo, alguna vez: “pobre hijo/a mío/a, que debe padecer este tormento que es estudiar matemáticas”? Es consolador asignar las responsabilidades a otros cuando nos encontramos con un problema, y desde luego en materia de enseñanza pública de Ciencias existen motivos sobrados para criticar un sistema que está permitiendo que las asignaturas científicas decaigan de una forma tan preocupante como escandalosa, pero en lo que a la imagen social de las matemáticas el problema no es ni nuevo ni institucional. Malo es para el futuro del país tantos suspensos en Matemáticas, [...]".

En relación con la Selectividad (a la que según parecía le quedaban pocas convocatorias) resulta que mientras la nota media de la prueba crece año tras año y el porcentaje de aprobados está, por ejemplo en la Universidad del País Vasco (UPV) en el entorno del 95%, la nota media en Matemáticas en ésta y en otras muchas universidades apenas llega al aprobado. En concreto, en la convocatoria ordinaria del año 2003, en la UPV las notas medias fueron: Matemáticas, 5,49 y Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, 4,60 (las dos notas más bajas de todas las asignaturas).

Todo indica que algo, y no precisamente bueno, está pasando.

## 2. Lo que no debería ocurrir.

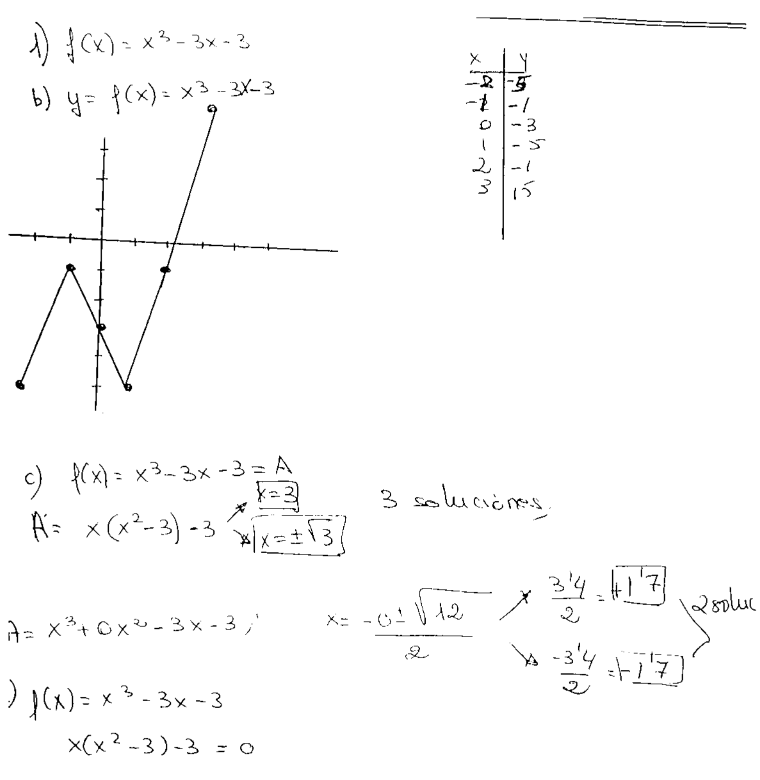


*Figura 1: Gráfica de una cúbica (???).*

En la Figura 1 se reproduce la representación gráfica de la cúbica $y = x^3 - 3x - 3$ hecha por un alumno de primero de Biología en el examen de Matemáticas (año 2001).

Esto no debería ocurrir. La cúbica *pincha*, probablemente porque se ha dibujado con la tabla de valores de $x$ e $y$; por cierto, los puntos son *gordos* para que luego puedan ser unidos, eso sí, con regla, perfectamente. Además es curioso observar cómo se resuelve algo que quiere ser una ecuación de tercer grado.

Tampoco debería ocurrir algo como lo siguiente. En la Figura 2 se reproduce la representación gráfica de una curva, en este caso $y = x^2 e^{-x}$, y su recta **tangente !!!** en un punto, hecha por un alumno de la asignatura Matemáticas de primero de Biología.

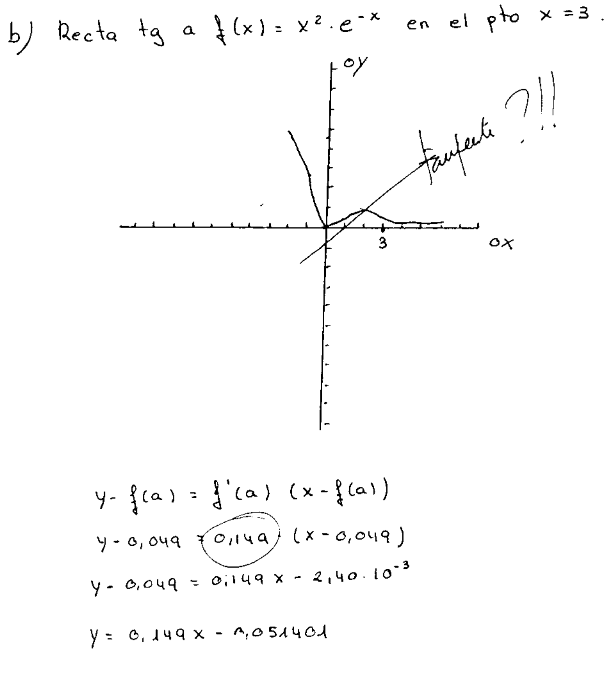


*Figura 2: Una curva y su recta tangente (???) en un punto.*

Si miramos con cuidado observamos que el alumno casi se *sabe* la teoría, aunque, luego, lamentablemente, se equivoca en las cuentas. Lo peor de todo este asunto es que a pesar de que el resultado (el dibujo) es *absurdo*, se queda tan tranquilo.

En fin, se dirá que es por la presión del examen; que hay que hacer cosas, lo que sea. Bueno, pues seguro que hubiera sido mejor que estos alumnos no hubieran *enseñado tanto la patita.*

Claro que no son sólo los estudiantes quienes cometen errores. En algunos casos lo más probable es que se trate de simples erratas, pero, en otros, es evidente que no son sólo erratas, ¿verdad? Si uno se fija con atención, cada vez se publican en la prensa más gráficos y, en algunos casos, están mal hechos. Seguro que todos ustedes recuerdan casos concretos con los dichosos porcentajes, las cifra en euros, ... Hace unos meses se inauguró en la Universidad del País Vasco un centro mixto de investigación UPV-CSIC. Las autoridades presentes pudieron hacer un pequeño juego con las cifras: "En los últimos 22 años el País Vasco ha multiplicado **también** por 22 su inversión en I+D." El titular de prensa del día siguiente era: "El gasto en I+D crece un 22 %"

Esto que acabamos de ver no debería ocurrir. Seguro que usted puede poner otros muchos ejemplos.

## 3. Y, ¿qué podemos hacer?

Después de los ejemplos (malos, por negativos) que se han presentado en el apartado anterior, parece que algo habrá que hacer. Quizás, una nueva (?) forma de enseñar matemáticas.

En este sentido, debería ocurrir y lamentablemente creo que no ocurre, algo como lo siguiente: Después de un primer curso de licenciatura (cualquier licenciatura de ciencias o cualquier ingeniería), los estudiantes deberían tener suficientes herramientas como para responder en tiempo finito (es decir, en unos pocos minutos y sin hacer demasiadas cuentas) a la siguiente cuestión:

Se sabe que el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} \sin^{10} x \, dx,$$

es uno de estos cuatro números:

$$\pi, \quad \frac{63\pi}{256}, \quad \frac{3\pi}{90} - 1, \quad \frac{\pi}{2}$$

Se trata de decir cuál de ellos es, sin calcular (claro !!!) dicha integral.

La Figura 3 puede ayudar

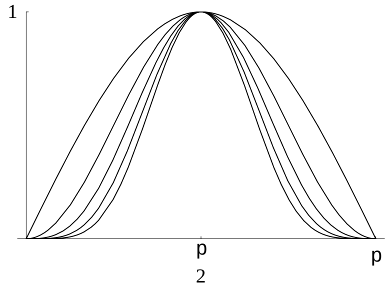


*Figura 3: Gráficas de las funciones $y = \sin^n x$, para distintos valores de $n$.*

junto con las siguientes igualdades (que habrá que demostrar sin hacer las integrales, con un simple cambio de variables):

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$$

Es evidente que

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

luego, resulta que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

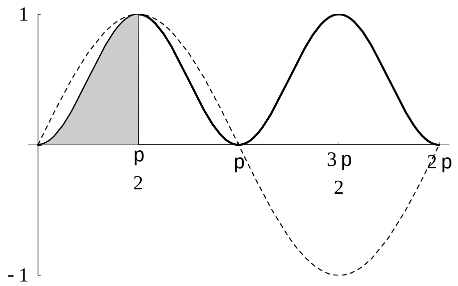


*Figura 4: Gráficas de las funciones $\sin x$ y $\sin^2 x$.*

A la vista de la Figura 4 (observar las simetrías y la periodicidad), resulta inmediato que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

por lo que tenemos que

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

La respuesta a la pregunta que nos hemos hecho más arriba es ya evidente. Sin más que mirar las Figuras 3 y 4, la respuesta no puede ser ni $\pi$ ni $\pi/2$. Como tampoco puede ser $\frac{3\pi}{90} - 1$, ya que este número es negativo, sólo queda la respuesta correcta:

$$\int_0^{\pi} \sin^{10} x \, dx = \frac{63\,\pi}{256}.$$

Es evidente que la integral se puede calcular directamente (uf !!), o mejor, haciendo uso de la función $beta$, para dar la respuesta correcta.

Se trata, por lo tanto, de proporcionar buenas herramientas a los estudiantes y de enseñarles a hacer un uso adecuado de las mismas. En definitiva, se trata de algo aparentemente tan sencillo como es obligar a los alumnos a que usen lo que ya saben.

A partir de la publicación del artículo del Profesor Sánchez Ron mencionado antes, han aparecido algunas respuestas que, entre otras muchas cuestiones plantean preguntas como las siguientes: "[...] ¿Podría hacerse una mejor pedagogía?¿No sería conveniente alternar la pizarra con un poco más de laboratorio? [...]" (Angel Valero, *La enseñanza de las matemáticas*, El País, 3 de octubre de 2003).

El Profesor John M. Ball, presidente de la Unión Matemática Internacional, en la conferencia inaugural del Encuentro de Sociedades Latinoamericanas de Matemáticas (Santiago de Compostela, septiembre de 2003) se refería también a las matemáticas como "el lenguaje de la ciencia" y por eso su gran importancia; y, a la pregunta: "¿Por qué muchos encuentran difíciles las matemáticas?", contestaba: "Nuestro comite más importante [en la UMI] es el de educación, porque las matemáticas no tienen por qué ser difíciles de aprender. Depende de como se enseñen. Yo creo que es especialmente útil [...] aprender geometría".

El Profesor Caffarelli (Universidad de Austin, Texas) decía en una reciente entrevista en relación con esta cuestión: "Para poder explicar [...] las matemáticas de forma atractiva hay que saber muchas, muchas matemáticas y ser muy, muy especial". "Por otra parte, las matemáticas requieren una profundidad de pensamiento [...] que a veces no es el adecuado al grado de madurez del alumno".

Tendremos que saber bien, quizás mejor que ahora, qué matemáticas debemos explicar en cada momento, y, también cómo deben explicarse estas matemáticas. Seguramente habrá que hacer un gran esfuerzo en formación del profesorado para, también, procurar cambiar algunos hábitos y de esta forma poder utilizar todas las nuevas herramientas de las que hoy disponemos.

En numerosas ocasiones, en conversaciones con otros compañeros, se suelen plantear preguntas del tipo: ¿y, qué cosas **concretas** se pueden hacer? Pues bien, se pueden proponer en las aulas algunas cosas que pueden resultar interesantes y además son sencillas. Por ejemplo, se puede en los cursos de bachillerato calcular algunos límites importantes; con muy poco trabajo, basta con el binomio de Newton, se puede comprobar que:

Si $0 < a < 1$, entonces $a^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Y a partir de esto, teniendo en cuenta cómo son las gráficas de una función y de su inversa, calcular también otros límites interesantes:

Si $0 < a < 1$, entonces $\sqrt[n]{a} \to 1$ cuando $n \to \infty$. En fin, más difícil todavía, podemos calcular el límite de la sucesión $\sqrt[n]{n}$. Además, todos estos límites se pueden visualizar fácilmente (ver Figura 5).

Con ayuda del programa Mathematica, o de cualquier otro ya que hay muchos de este tipo (Derive, Mapple, ...), se puede plantear, en los distintos cursos, un Laboratorio de Matemáticas que permita hacer cosas posiblemente sencillas pero, sin duda, interesantes.

Los siguientes son algunos de esos ejemplos que se pueden desarrollar en el laboratorio:

• Una curva y sus tangentes avanzando a lo largo de ella.

• Manipulando gráficas. Cómo son las gráficas de las funciones $y = f(x + a)$, $y = f(ax)$ o $y = a + f(x)$ conocida la gráfica de $y = f(x)$.

• Un ejemplo, de Riemann, de una función siempre continua y nunca derivable:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

• Sobre la *derivada de Nora*. ¿Existen valores del parámetro $\lambda$ para los que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \lambda(1 - e^{-x}) & \text{si} \quad 1 < x < 6 \end{cases}$$

es derivable en todos los puntos del intervalo $(0, 6)$? La tentación es proponer que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \log x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \lambda e^{-x} & \text{si} \quad 1 < x < 6 \end{cases}$$

y calcular $\lambda$ para que las cosas vayan bien en $x = 1$. Pero, ¿es cierto, sin más, que:

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a)?$$

- Un ejemplo visual de sumas de Riemann.
- La integral definida y las primitivas.
- Una función integrable Riemann en el intervalo $(0, 1)$ y muy discontinua:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q \quad \text{si} \quad x = p/q & \text{(irreducible).} \end{cases}$$

Son sólo algunos ejemplos de lo que se puede hacer en la enseñanza de las matemáticas en los cursos preparatorios de ingreso en la universidad (al menos en carreras de ciencias o de ingeniería) y también en los primeros cursos de estos estudios. Se trata de aprovechar la visualización para acercarse de otra manera a cuestiones sencillas de las matemáticas intentando que no ocurran cosas como las que mencionábamos antes y además que pueda ser atractivo para los estudiantes plantearse problemas e intentar resolverlos. A esto, nada menos, es a lo que se dedican las matemáticas.

## 4. Visualización y matemáticas.

El gran matemático francés J. Dieudonné, añade al título de su libro: *Fundamentos de análisis moderno* lo siguiente: "Obra que procura auxiliar al estudiante a lograr la **intuición de lo abstracto**, tan esencial en la mente de un matemático moderno".

En el libro de M. de Guzmán citado en la bibliografía: *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*, se puede leer, en respuesta a la pregunta ¿Qué es la visualización?: "[...] Nuestra percepción es muy primordialmente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, [...]. Y aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales [...] que les acompañan en su trabajo [...]. La visualización aparece así como algo profundamente natural [...] en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático".

En este apartado vamos a **ver** algunos ejemplos, muchos de ellos ya clásicos, del posible uso de la visualización para la resolución de problemas en matemáticas.

Este es el momento de anotar que aquí sólo vamos a ver en **foto fija** lo que en la charla vimos en **animación**. Por ejemplo vimos las gráficas de las funciones $x^n$ acercándose a su límite (foto fija en Figura 5) o los distintos triángulos inscritos en la circunferencia aproximándose al de área máxima (foto fija en Figura 6). También los otros ejemplos que se mencionan.

• Sobre la convergencia uniforme.

Uno de los conceptos más dificiles de explicar a los alumnos de un primer curso de análisis es el de la convergencia **uniforme** de una sucesión de funciones. En este caso, un buen dibujo será no sólo una gran ayuda, será absolutamente necesario.

En la Figura 5 se representan varias funciones de la sucesión $\{x^n\}$, en el intervalo $[0, 1]$.

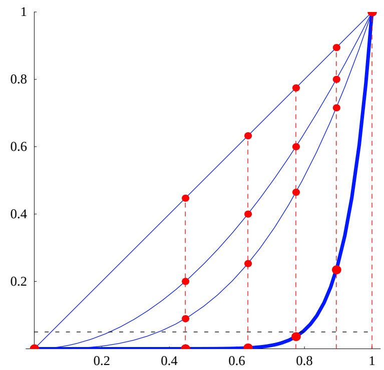


*Figura 5: Sobre la convergencia de una sucesión de funciones.*

Y, una vez calculado el límite puntual, en este caso la función vale $0$ si $x < 1$ y vale $1$ en $x = 1$, se trata de comprobar si la convergencia de la sucesión es uniforme. Se ve si la banda de anchura $\epsilon$ se *come* los puntos y luego la gráfica completa de las distintas funciones de la sucesión.

• Desarrollos en serie de Taylor y en serie de Fourier.

Es interesante ver juntas la aproximación (local) de los polinomios de Taylor y la aproximación (global) de los polinomios trigonométricos para una función.

• Dibujos de curvas dadas en coordenadas paramétricas.

Esta es una cuestión que no se hace mucho en clase. Ahora se puede ver moverse en una **animación** el punto de la gráfica de la función $(x(t), y(t))$ según avanza el parámetro.

• Un problema de optimización.

Este problema es ya un clásico. Se trata de encontrar el triángulo de área máxima inscrito en una circunferencia. La Figura 6 nos enseña la solución, al ver los distintos triángulos moverse hacia el de área máxima, pues todos tienen la misma base y éste tiene mayor altura.

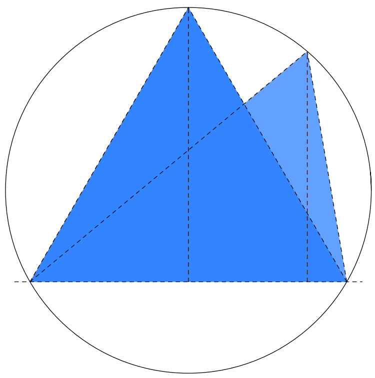

*Figura 6: Triángulo de área máxima inscrito en una circunferencia.*

• El teorema de la cuerda universal o el viaje en coche (o en AVE.)

Si el AVE de Madrid a Lérida recorre los 400 km. de distancia en 4 horas, ¿hay algún instante en el que el tren va a una velocidad de 100 km/h? y, más difícil, ¿existe un intervalo de tiempo de una hora de duración en el cual el tren recorre 100 km? Pues bien, este problema está relacionado con una propiedad de las funciones continuas que se conoce como *el teorema de la cuerda universal.*

Sea $F$ un conjunto de funciones continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$ y que verifican que $f(0) = f(1)$ Se dice que un número $c \in [0, 1]$ es una *cuerda universal* para el conjunto $F$ si, cualquiera que sea $f \in F$ existe un punto $x \in [0, 1]$ (el punto depende de la función $f$) tal que

$$f(x+c) = f(x)$$

Por ejemplo, $c = 1$ es una cuerda universal para $F$, puesto que existe $x = 0$ tal que $f(0+1) = f(1)$.

**Teorema de la cuerda universal**. Existen cuerdas universales de todas las longitudes $a$, con $a = 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots$, pero (atención !!!) **no** necesariamente de cualquier otra longitud $b$ dada que no sea el inverso de un número entero. En la Figura 7 se puede ver el ejemplo de Halmos de una función que **no** tiene una $2/3$-cuerda.

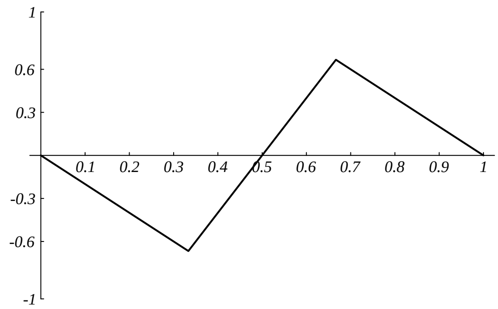


*Figura 7: Gráfica del ejemplo de Halmos para $b = 2/3$.*

Si volvemos al AVE, es muy evidente que tiene que haber un instante, al menos, en el que la velocidad es 100 km/h., y, no es tan evidente pero es cierto que sí existe un intervalo de una hora de duración en el cual el tren recorre 100 km. (100 es igual a 1/4 de 400); tampoco es nada evidente que **no** existe necesariamente un intervalo de una hora de duración en el cual el tren recorre 60 km. (400 no es un múltiplo entero de 60).

• Sobre los números de Fibonacci.

Sea $\{f_n\}$ la sucesión de los números de Fibonacci. Cada término de la sucesión se obtiene sumando los dos inmediatamente anteriores y empezamos por $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$. Los primeros términos de la sucesión son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n\, f_{n+1}$$

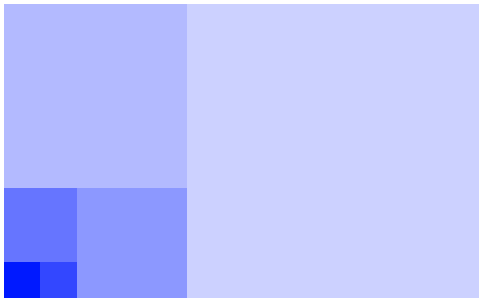

*Figura 8: Demostración visual de la igualdad.*

La Figura 8 es una preciosa demostración visual de dicha igualdad. Basta ir añadiendo a $f_1^2$ el siguiente sumando $f_2^2$, luego $f_3^2$, después $f_4^2$, y así sucesivamente.

• Fórmula de sumación de Euler.

De todos los dibujos que yo he hecho en mi ordenador con el programa Mathematica, el mejor creo que es el siguiente:

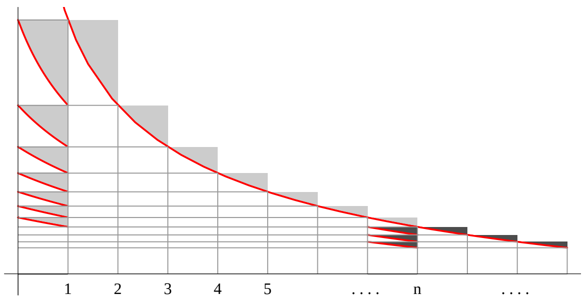


*Figura 9: La fórmula de sumación de Euler.*

Este dibujo está tomado del artículo de Apostol: *An Elementary View of Euler's Summation Formula*, citado en la bibliografía. El dibujo es prácticamente una **demostración sin palabras** de que la sucesión

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

es convergente.

Como se observa en la Figura 9, estos números son la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos sombreados (gris claro), dentro del intervalo $[1, n]$. La sucesión $d_n$ es evidentemente creciente y, como muestra el dibujo está acotada superiormente por $f(1) = 1$, ya que todos los triángulos curvilíneos, del intervalo

$[1, n]$ se pueden trasladar al rectángulo de área $f(1) = 1$ sin solapamiento. Por lo tanto,

$$0 < d_n < d_{n+1} < f(1) = 1 \ , \qquad \text{para todo } n$$

con lo que resulta que la sucesión $d_n$ es convergente.

Escribimos

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

La constante $\gamma$ se conoce como **constante de Euler** y representa la suma de las áreas de **todos** los triángulos curvilíneos. Se verifica

$$0 < \gamma < f(1) = 1$$

El valor de la constante de Euler, con 20 decimales correctos, es

$$\gamma = 0.57721566490153286060\ldots$$

En realidad el dibujo proporciona más información ya que permite considerar otros casos, con otras funciones $f(x)$ que tengan propiedades similares a la función $1/x$, básicamente que sean positivas, decrecientes y tendentes a cero cuando $x$ se hace grande, dando lugar a lo que se conoce en la literatura matemática como constantes de Euler generalizadas.

Hablando de **Demostraciones sin palabras**, el conocido libro de R. B. Nelsen del mismo título tiene, en su portada, la demostración visual, **visualización**, de la conocida identidad, válida para todo $n \geq 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)^2 = n^2$$

Por cierto, este dibujo forma parte de la nueva imagen corporativa de nuestra Facultad de Ciencia y Tecnología.

En este libro se pueden ver desde clásicas **Demostraciones sin palabras** del teorema de Pitágoras hasta visualizaciones de identidades algebraicas; desde demostraciones gráficas del teorema del coseno hasta las clásicas sustituciones para convertir en funciones racionales al seno y al coseno, que siempre se nos olvida al calcular primitivas cuando hacemos el cambio de variable $t = \tan x/2$; el hecho, sin duda muy visual, de que la gráfica de una función y de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$. También podemos ver algunas desigualdades entre las medias aritmética, geométrica y armónica o las clásicas desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Napier.

Nos vamos a detener un instante en una desigualdad cuya prueba visual es muy sencilla. Se trata de probar que

$$\pi^e < e^\pi$$

Para ello basta comprobar que la función $f(x) = \log x/x$ es decreciente en el intervalo $[e, \pi]$; y, esto es evidente, pues $f'(x) = (1 - \log x)/x^2$, con lo que, si $x \in (e, \pi)$ entonces $f'(x) < 0$. El siguiente dibujo, Figura 10, visualiza esta cuestión:

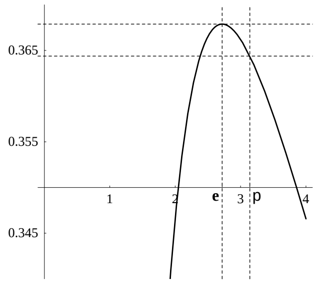


*Figura 10: Gráfica de la función $f(x) = \log x/x$.*

También pueden encontrarse en el mencionado libro de Nelsen visualizaciones de otras conocidas identidades: Sumas de enteros; sumas de enteros impares; sumas de cuadrados o de cubos; sumas de números triangulares.

No es demasiado conocida una propiedad de la sucesión de los números impares que está atribuida a Galileo ($\approx$ 1615) y que dice:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots = \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(4n-1)}$$

y cuya *prueba* podemos ver en la Figura 11

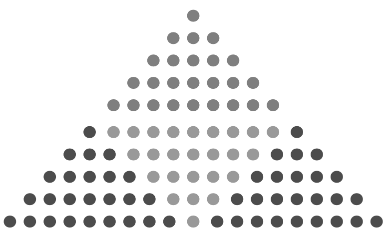

*Figura 11: Sumas de impares.*

En fin, para cerrar este apartado, citaremos el denominado *Problema de los Calissons*. Un *calisson* es un caramelo con forma de diamante, es decir, dos triángulos equiláteros unidos por uno de sus lados. Se trata de empaquetar un hexágono regular de lado $n$ con *calissons* de lado 1. Existen sólo tres tipos de *calissons*, teniendo en cuenta la orientación de una de sus diagonales. Pues bien, se verifica el siguiente

Teorema: *En todo empaquetamiento el número de calissons con una orientación dada es la tercera parte del total de calissons de la caja.*

La Figura 12 es un ejemplo de empaquetamiento en la que se pone de manifiesto claramente que llevar el problema de su espacio natural, dimensión 2, a $\mathbb{R}^3$ (sólo hemos sombreado el dibujo), permite resolver el problema. Lo único que tenemos que hacer ahora es **mirar**:

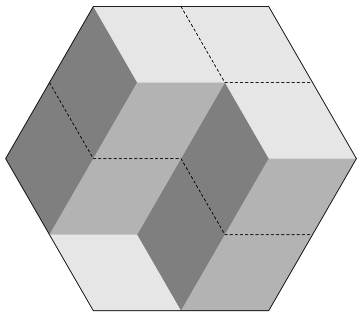

*Figura 12: Un ejemplo de empaquetamiento de* 12 *calissons en un hexágono.*

Una buena pregunta en relación con esta cuestión podría ser la siguiente: si llamamos $n$ a la relación entre la longitud del lado del hexágono y la de los lados del calisson, ¿cuántas soluciones (empaquetamientos) distintos se pueden hacer para un $n$ fijo? La respuesta no parece trivial.

## 5. Atención (!!): Cuidado con la visualización.

En algunas ocasiones podemos pasar sin demasiado cuidado en éstas como en cualesquiera otras cuestiones de un extremo a otro y cometer, una vez más, graves errores. Si no tenemos cuidado podemos intentar hacer sólo con dibujos todo tipo de demostraciones y en algunos casos obtener malos resultados.

Seguro que todos ustedes recuerdan aquella *pseudo-demostración* en la que se divide un rectángulo en dos trapecios y dos triángulos (ver Figura 13) que se recortan y luego se unen formando una nueva figura, otro rectángulo (ver Figura

14), cuya área es distinta de la del rectángulo de partida; por el camino se ha añadido una unidad cuadrada.

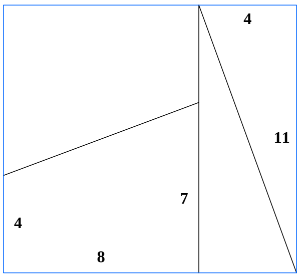


*Figura 13: La división del rectángulo:* $12 \cdot 11 = 132$.

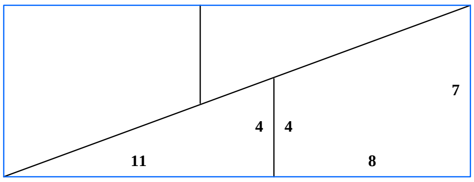


*Figura 14: Sobra una unidad:* $19 \cdot 7 = 133$.

Un buen ejemplo de lo peligroso que puede resultar dejarse llevar de *lo que se ve*, puede ser el siguiente tomado del libro de Stewart citado en la bibliografía.

En un triángulo equilátero de lado $l$ (podemos suponer que $l = 1$) se inscribe un círculo como se indica en la Figura 15.

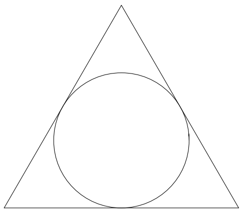

*Figura 15: Un círculo inscrito en el triángulo*

A continuación, en el mismo triángulo, se inscriben en dos filas 3 círculos como se indica en la Figura 16.

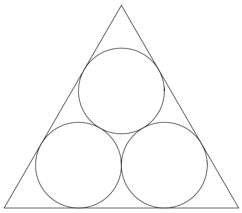

*Figura 16: Tres círculos inscritos en el triángulo*

En la tercera etapa, se inscriben seis círculos en 3 filas siguiendo la disposición indicado en la Figura 17.

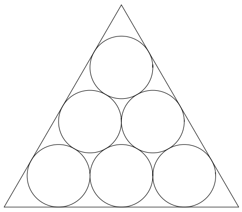

*Figura 17: Seis círculos inscritos en el triángulo*

En cada etapa los círculos son todos del mismo radio y tangentes entre sí. La disposición es similar a la que tienen las bolas del juego de billar metidas en su triángulo antes de comenzar la partida.

Nos planteamos el siguiente problema:

*Supongamos que unos círculos de igual radio se agrupan estrechamente en $n$ filas dentro de un triángulo equilátero. Si $A$ es el área del triángulo y $A_n$ es, para cada $n$, la suma de las áreas de los círculos, se trata de calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A}$$

Antes de dar lo que a simple vista parece la respuesta, conviene hacer algunas cuentas. La Figura 18 corresponde a la etapa $n = 4$.

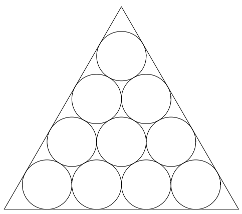

*Figura 18: Diez círculos inscritos en el triángulo.*

Otro ejemplo interesante, tomado del libro de Hairer y Wanner, es el siguiente problema. Con centro en el punto $(1, 0)$ trazamos una circunferencia de radio igual a $1$. Dado un punto $M$ de la misma, sea $N = (0, y)$ un punto sobre el eje vertical, de tal suerte que $y$ sea la longitud del arco $OM$ (es decir, la rectificación del arco). La recta que une los puntos $N$ y $M$ corta al eje horizontal en un punto $P = (x, 0)$. Ver figura 19.

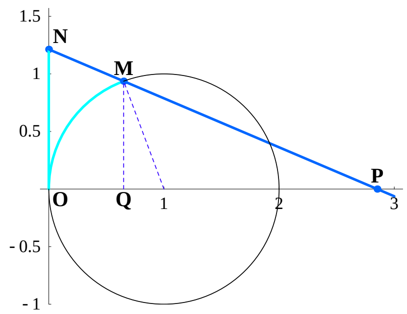


*Figura 19: Rectificación de un arco de curva.*

Se trata de calcular el límite del punto $P$ cuando el ángulo (o el arco $OM$) tiende a $0$.

Para terminar este apartado, un último problema que también puede servir para entretenerse con los amigos *de letras*, estos que dicen siempre eso de: "... haz tu la cuenta que eres de ciencias".

Los números del $1$ al $2004$, ambos inclusive, se escriben en orden creciente:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ \ldots \ \ldots \ , 2000, 2001, 2002, 2003, 2004.$$

Ahora se borran los que ocupan el primer lugar, el cuarto, el séptimo, el décimo, ..., etcétera. De esta forma queda una nueva lista. Pues bien, en ella se realiza la misma operación, es decir, se borran los números que ocupan el primer lugar, el cuarto, el séptimo, el décimo, ..., etcétera. Queda una nueva lista en la se hace lo mismo y así sucesivamente se repite este proceso hasta que se borran todos los números.

La pregunta es ¿qué número se borró el último?

Dejamos estos problemas planteados para que el lector pueda resolverlos. Éste deberá tener en cuenta el título de este apartado; por lo tanto, la respuesta quizá no sea la que **visualmente** pudiera parecer.

## 6. A modo de resumen.

Las cuestiones que nos hemos planteado en estas notas no son más que una muestra de como la visualización permite resolver, y a veces de forma sencilla, problemas que en algunas ocasiones pueden resultar complicados. Con los ejemplos que hemos mostrado y las herramientas que hemos utilizado, tratamos de poner de manifiesto que no sólo se pueden evitar errores (y se deben evitar, claro): recordar las rectas tangentes que no lo son, las cúbicas que *pinchan* etcétera, sino que además se puede, de forma muy poco costosa, por ejemplo interiorizar desde el bachillerato los elementos esenciales de las gráficas de las funciones más habituales y utilizar estos conocimientos en la resolución de otros y variados problemas.

El posible interés de estas notas quedaría más patente *viviendo* lo que aquí sólo se puede escribir. Si usted ha llegado hasta este punto, con toda seguridad que se habrá dado perfecta cuenta de ello. Le animamos a que se siente con su ordenador, entre en su programa Mathematica y resuelva los problemas que hemos planteados a lo largo de estas páginas u otros similares. Llevar luego todas estas *historias* al aula creemos que puede tener cierto atractivo y, desde luego, resultar muy positivo para los estudiantes.

Todo este pequeño programa de trabajo que aquí hemos sólo esbozado, se puede desarrollar simultaneando la pizarra en el aula clásica con las prácticas en el laboratorio de matemáticas. Por ejemplo, para la representación gráfica de funciones se puede hacer de la siguiente forma: en primer lugar, dedicar un cierto tiempo a identificar los elementos esenciales de las gráficas de las funciones elementales: polinómicas, racionales, radicales, exponenciales y logarítmicas y trigonométricas, primero con problemas directos de representación gráfica, luego con otros inversos o de emparejamiento de gráficas y expresiones analíticas. Después se puede jugar con manipulaciones sencillas que permitan obtener rápidamente unas gráficas a partir de otras ya conocidas: cambios en las variables, sumas, productos o composición de funciones. Esto permitirá, además de evitar errores como los mencionados, el relacionado con las derivadas laterales nos parece especialmente grave (está publicado en conocidos libros de texto de bachillerato), incrementar, sin duda, el espíritu crítico, auto-crítico, de los alumnos. A partir de aquí, las bibliotecas están llenas de magníficos libros cuya lectura seguro que impulsa a trabajar en problemas de visualización y matemáticas. Y, sentados delante del ordenador, si usted pregunta a cualquier buscador por las palabras: Visual & Mathematics, yo acabo de hacerlo en este momento, se encontrará con centenares de miles de páginas dedicadas a estas cuestiones; por ejemplo, la página

http://home.gwu.edu/%7Erobinson/vm/visual.html; o, la página

http://dmc.utep.edu/mouratt/; o, en fin,

http://members.tripod.com/vismath/, entre muchas otras.

Los dibujos que aparecen en estas lineas han sido realizados con el programa Mathematica e incorporados posteriormente al texto.

## 7. Bibliografía.

Apostol, Tom M.: *An Elementary View of Euler's Summation Formula*. Amer. Math. Monthly, May, 1999.

Bartle, R. G.: *The Elements of Real Analysis*. John Wiley, 1976.

Bilbao, M; Castañeda, F; Peral, J. C.: *Problemas de Cálculo*. Pirámide, 1998.

Boas, R. P.: *A primer of real functions*. C. M. n. 13, The Mathem. Asoc. of Amer.,1981.

Buck, R. C.: *Advanced Calculus*. Third Edition. McGraw-Hill, 1978

Castañeda, F.: *Visualización con Mathematica*. Sigma, n. 22, Vitoria, 2003.

David, G:; Tomei, C.: *The problem of the calissons*. Amer. Math. Monthly, May, Vol. 96, 1989.

Dieudonné, J..: *Fundamentos de Análisis Moderno*. Editorial Reverté, 1966.

Enzensberger, H. M.: *El Diablo de los Números*. Siruela, 1997.

Euler, L.: *Introducción al Análisis de los Infinitos*. SAEM y RSME, 2000.

Guzmán, M. de; Rubio, B.: *Problemas conceptos y métodos del Análisis Matemático*. (3 tomos). Pirámide, 1993.

Guzmán, M. : *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Pirámide, Madrid, 1996.

Hairer, E.; Wanner, G.: *Analysis by Its History*. Springer, 1996.

Nelsen, R.B.: *Demostraciones sin palabras. Ejercicios de pensamiento visual*. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 2001.

Ortega, J.: *Introducción al Análisis Matemático*. Labor, 1993.

Polya, G.: *Mathematical Discovery*. John Wiley, 1981.

Rudin, W.: *Principios de Análisis Matemático* Ediciones del Castillo, 1966.

Stewart, J.: *Cálculo. Conceptos y contextos*. International Thomson Editores, 1998.

Algunos comentarios sobre la bibiografía.

Los libros y artículos que aparecen aquí son, fundamentalmente, los libros, clásicos por otro lado, en los que el autor ha aprendido análisis matemático. El fantástico libro de Rudin; los de Bartle, Buck, Dieudonné, Guzmán (en el rincón de la pizarra los buenos profesores resuelven, visualmente, muchas dificultades que surgen en las clases), Guzmán y Rubio (con una presentación distinta y muy interesante aunque plantea, más que ningún otro, la necesidad de un buen profesor delante), Ortega, Stewart. Son sólo una pequeña muestra a la que se podría invitar a otros varios.

El artículo de Apostol (por cierto, sus libros de análisis y cálculo podrían perfectamente incluirse en la lista) se dedica a la fórmula de sumación de Euler.

El excelente libro de Boas se puede leer después de un primer ciclo de una licenciatura de ciencias. En otras muchas cosas, allí está todo lo necesario sobre el teorema de la cuerda universal.

El artículo de David y Tomei contiene algunas claves del problema de empaquetamiento con calissons.

El divertido libro de Enzensberger, una especie de cuento con números.

El extraordinario libro de Euler es de obligada lectura para un graduado. ¡Cómo hacían matemáticas hace 350 años! Y esas matemáticas siguen vivas hoy.

El contenido del libro de Hairer y Wanner es el de un primer año de cálculo, con la novedad de que los distintos resultados aparecen en el orden en que fueron descubiertos. Está lleno de notas históricas, muchos ejemplos y muy buenos dibujos. En él se encuentra el problema de la rectificación del arco.

El título del libro de Nelsen ya lo dice todo sobre su contenido. Es una pequeña fiesta para la vista.

El libro de Polya no podía faltar cuando hablamos de hacer, si se puede, más fáciles las matemáticas difíciles.

Y para terminar, quiero agradecer a los organizadores del ciclo de conferencias: “Un paseo por la geometría”, mis compañeros Marta y Raúl, la invitación que me hicieron para participar en el mismo. Gracias.