Pedro P. Alegría Ezquerra
Matematika Saila, Euskal Herriko Unibersitatea
(Departamento de Matemáticas Universidade do País Vasco)

Un curso de maxia e matemáticas: teoría e 1000 problemas resoltos.

¿PARA QUÉ MEZCLAR UNA BARAJA?

Las mezclas son la única cosa que la Naturaleza no puede deshacer.
Sir Arthur Eddington

En la Naturaleza, muchos procesos espontáneos que requieren de mezclas son irreversibles: al mezclar dos gases que se ponen en contacto, la unión obtenida no puede deshacerse; no es posible volver a reconstruir un vaso de cristal después de roto.
Estos hechos tienen relación con la ley universal de la Entropía, que afirma que el desorden de un sistema tiende a aumentar.
Un paradigma espléndido de los hábitos unidireccionales de la Naturaleza lo constituye la mezcla de una baraja. Así, por ejemplo, se puede afirmar que, después de mezclar una baraja es imposible que los colores se separen. En realidad, la probabilidad de que eso ocurra con una baraja francesa de 52 cartas es

$$\frac{(26!)^2}{52!} = 2,02 \cdot 10^{-15}$$

pues hay 52! disposiciones distintas (que es un número de 68 cifras) de las cartas de la baraja, que es el cardinal del grupo simétrico de orden 52.

1. LA MEZCLA AMERICANA

Una permutación es una reordenación de un conjunto de elementos. Si dichos elementos son cartas, la permutación recibe el nombre de mezcla. Mezclas sucesivas equivalen a la composición de permutaciones que, como es sabido, no conmutan.

Un problema surgido en las mesas de juego de Bridge (alrededor de 1970, época en que se sustituye la mezcla manual por la realizada por máquinas) consiste en averiguar cuántas mezclas son necesarias para conseguir la aleatoriedad perfecta de una baraja. Es lógico pensar que pocas mezclas permiten a un experimentado jugador extraer alguna información remanente de la distribución original y tomar ventaja de ello. Por otra parte, demasiadas mezclas ralentizan el juego y disminuyen por tanto la ganancia del dueño de la mesa.

Algunos matemáticos se han puesto a la labor y han logrado establecer la formulación necesaria para resolver este problema. Actualmente hay dos enfoques:
El modelo probabilista propuesto por **Gilbert** y **Shannon** en 1955, e independientemente por **Reeds** en 1981, ha sido comprobado por **Diaconis**. Las ideas básicas son las siguientes:

1. Se considera una mezcla como una función de densidad de una variable aleatoria. Cada permutación del conjunto de cartas tiene asignada una probabilidad, de tal manera que la suma de todas ellas es igual a uno.
   [Por ejemplo, la mezcla que consiste en insertar la primera carta entre el resto con probabilidad uniforme tiene por densidad la función f(P) = 1/n, para cualquier permutación del tipo
   P = (2 3 ... k-1 1 k k+1 ... n-1 n)
   y f(P) = 0 para cualquier otra permutación.]
   Al realizar mezclas sucesivas, la función de densidad es la convolución de cada una de las mezclas sencillas, definida como
   $$f * f(P) = \sum_{P_1 \circ P_2 = P} f(P_1) f(P_2).$$
2. En la mezcla por hojeo, una baraja con n cartas se corta en dos paquetes, el superior con k cartas y el inferior con n – k cartas.
   La probabilidad de cortar por la carta k sigue una distribución binomial de parámetro 1/2:
   $$P(X = k) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$
   El máximo se alcanza en n/2 y la región donde se concentran la mayoría de resultados es el intervalo
   $$\left(\frac{n}{2} - \sqrt{n}, \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right)$$
3. Se entremezclan entre sí los dos paquetes dejando caer sucesivamente cartas de uno y otro. Si tenemos k cartas en el primer paquete y n – k cartas en el segundo paquete, la primera carta del primer paquete cae con probabilidad k/n y la primera carta del segundo paquete cae con probabilidad (n – k)/n. Se continúa el proceso con k – 1 cartas en el primer paquete y n – k en el segundo, o bien con k cartas en el primer paquete y n – k – 1 cartas en el segundo.
   Esto significa que la mezcla se realiza según una distribución uniforme: como hay $\binom{n}{k}$ posibles entrelazamientos de cartas (pues basta elegir aleatoriamente las posiciones de las k primeras cartas, el resto mantendrá su posición relativa), cada uno tiene probabilidad $1/\binom{n}{k}$. Entonces la probabilidad conjunta de un corte de tamaño k seguido de una mezcla por hojeo es
   $$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^n}$$

valor que resulta independiente del lugar por donde se corta.
El resultado de la mezcla, cuya densidad denotamos por R, es una permutación del conjunto de cartas. De las n! permutaciones del conjunto, después de una mezcla sólo son posibles 2^n permutaciones (en realidad $2^n - n$ pues la permutación identidad puede obtenerse de n + 1 formas).

4. Se repite el proceso de cortar y mezclar cartas de cada montón hasta que la baraja esté perfectamente mezclada, es decir que la función de densidad obtenida por la convolución de R consigo misma corresponda a la distribución uniforme U(P) = 1/n!.
   Como dicho objetivo es imposible (pues la identidad es siempre más probable que cualquier otra permutación), lo que se busca es minimizar la distancia a la aleatoriedad perfecta.
   Por ejemplo, con una baraja de 52 cartas, al cabo de cuatro mezclas se obtiene un máximo de $2^4 \cdot 52$ permutaciones, alrededor de 2 millones de veces más pequeño que 52!, lo que significa que la baraja no puede considerarse suficientemente mezclada.

Aldous y **Diaconis** [AD] definen la distancia entre dos distribuciones de probabilidad por

$$\|f_1 - f_2\| = \frac{1}{2} \sum_{P \in S_n} |f_1(P) - f_2(P)|$$

(esencialmente la distancia en l_1 normalizada para que tome valores entre 0 y 1). Para calcular dicha distancia definen el concepto de sucesión creciente en una permutación (subsucesión maximal de puntos consecutivos que mantienen el orden creciente). Observemos que el orden relativo de las cartas de cada montón en el corte previo no se altera con la mezcla. Así, si suponemos que las cartas están inicialmente colocadas en orden creciente, después de una mezcla habrá como máximo dos sucesiones crecientes de cartas, tras dos mezclas habrá un máximo de 4 sucesiones crecientes, y así sucesivamente.
Con estas ideas, **Aldous** y **Diaconis** prueban que, con una baraja de 52 cartas, la distancia a la distribución uniforme es menor que 0,5 después de siete mezclas; concluyen así que con siete mezclas por hojeo se elimina toda idea del orden inicial de la baraja. Además existe un valor crítico a través del cual la distancia pasa de valores próximos a uno a valores próximos a cero.
Más generalmente, mediante el análisis asintótico muestran que, para una baraja con un número n suficientemente grande de cartas, una cantidad k = (3/2) log n de mezclas es suficiente para que la distancia a la uniformidad sea razonablemente próxima a cero.

En otra dirección han trabajado **Trefethen** y **Trefethen** [TT]. Ellos definen otro concepto de medida basado en considerar la baraja como paquete de información. Esta información varía desde cero (cuando no se conoce la distribución de ninguna carta) hasta uno (en la que se conoce la información de todas las cartas). A partir de esta noción demuestran que seis mezclas son suficientes para destruir ostensiblemente toda información sobre la baraja y conseguir que las cartas queden en un orden completamente aleatorio.

Sin embargo, en los juegos de ilusionismo, no de azar, es a veces conveniente eliminar dicha aleatoriedad. Para ello se introducen y perfeccionan las mezclas perfectas.

2. LA MEZCLA FARO

El suave aleteo de las cartas barajadas con una mezcla faro, interpenetrándose alternativamente, se dejará oír en todo el reino del ilusionismo.

***John Braun**, en su prólogo al libro "Faro Fantasy" de **Paul Swinford** (1968)*

Una mezcla faro, también llamada **mezcla perfecta**, consiste en lo siguiente:

- ♣ Se divide un paquete de cartas exactamente por la mitad.
- ♣ Se mezclan las cartas, imbricándolas de modo que se vayan alternando las cartas de cada montón, una por una y de forma exacta.

Para la segunda parte, tenemos dos alternativas (según la terminología ideada por **Alex Elmsley**):

- ♣ Si las cartas superior e inferior del paquete inicial mantienen sus posiciones después de la mezcla, ésta recibe el nombre de faro exterior (**faro-out**).
- ♣ Si la carta superior pasa al segundo lugar y la inferior al penúltimo lugar después de la mezcla, ésta recibe el nombre de faro interior (**faro-in**).

En el caso de que la baraja tenga un número impar de cartas, al dividirla por la mitad habrá un paquete con una carta más que el otro. Durante la mezcla, las cartas del paquete menor deberán intercalarse entre las del paquete mayor. Esta mezcla recibe el nombre de **faro straddle** (nombre dado por **Ed Marlo** por el efecto "a horcajadas" que produce). Esta también puede ser interior o exterior según si el paquete superior es más pequeño o más grande que el inferior, respectivamente.

Se llama **antifaro** al proceso inverso, es decir, de separar una baraja en dos montones, dejando alternativamente una carta en cada montón. Al recomponer finalmente los dos montones formados se llega a la situación inversa a la de una mezcla faro. Las propiedades de regularidad de la antifaro son las mismas que las de la faro pero a efectos prácticos es más fácil de realizar.

2.1. ORIGEN DE LA MEZCLA FARO

Las raíces de la mezcla perfecta se remontan a un viejo juego de cartas llamado faro, en boga en los Estados Unidos durante el siglo XIX. En la corte del rey **Luis XIV** recibía el nombre de faraón. Como durante el juego las cartas se debían colocar por parejas, para perder dicha colocación en la siguiente partida, debía mezclarse la baraja de forma exacta.

La primera manifestación escrita de esta mezcla se remonta al año 1726 con el libro *"Whole Art and Mystery of Modern Gaming"* de autor desconocido. No es hasta 1843 cuando encontramos la siguiente referencia, con el libro *"An Exposure of the Arts and Miseries of*

Gambling" de **J.H. Green**, en el que desenmascara las técnicas utilizadas por los tramposos en las mesas de juego. Otro libro dedicado al estudio de las trampas en el juego, publicado en 1894 pero todavía en circulación, es el titulado *"Sharps and Flats"* de **John Nevil Maskelyne**. La primera aplicación a los juegos de magia se encuentra en *"Thirty Card Mysteries"*, publicado en 1919 por **Charles Jordan**. A pesar de ello,En la actualidad, muchas propiedades sobre dicha mezcla han sido publicados por **Alex Elmsley** [El].

Tres son pues las utilidades de una correcta realización de esta mezcla perfecta:

- ♣ Ordenación adecuada de cartas en el póquer.
- ♣ Separación de cartas consecutivas en una baraja.
- ♣ Realización de efectos de ilusionismo.

2.2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA MEZCLA FARO

❖ <u>¿Cuál es la situación de las cartas después de una mezcla faro?</u>

Si llamamos S al conjunto formado por las n cartas, cualquier mezcla es una aplicación biyectiva de S sobre sí mismo, o bien una permutación del conjunto S. Llamaremos I a la aplicación que consiste en realizar una faro-in y O a la faro-out. Es fácil comprobar que:

$$I(k) = \begin{cases} 2k(\text{mod } n+1) & \text{si } n \text{ es par} \\ 2k(\text{mod } n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$O(k) = \begin{cases} 2k-1(\text{mod } n-1) & \text{si } n \text{ es par} \\ 2k-1(\text{mod } n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

❖ <u>¿Es posible volver a la posición inicial después de una sucesión de mezclas faro?</u>

Vamos a demostrar que lo anterior es cierto por reducción al absurdo.
Para ello, llamamos d_k a la posición de las cartas después de k mezclas y f a la biyección $f(d_k) = d_{k+1}$.
Por un lado es evidente que alguna posición d_k se repite después de un número determinado de mezclas (basta realizar un número de mezclas mayor que n!). Si suponemos que la posición inicial d_0 no se repite pero d_n es la primera posición que se repite (después de p mezclas), entonces
$f^n(d_0) = d_n$
$f^{n+p} (d_0) = d_{n+p} = d_n$
Como f es biyectiva, tiene inversa g. Así,
$g^n(d_{n+p}) = g^n(d_n)$, es decir $d_p = d_0$, lo que es absurdo.
En resumen, después de un número finito de mezclas iguales, la baraja recupera su distribución original, antes de pasar por otra distribución intermedia.

❖ <u>¿Cuántas mezclas perfectas hacen falta para volver a su posición inicial una baraja?</u> (**Conway** y **Guy**, 1996):
El número de mezclas necesarias para volver una baraja de n cartas a su posición inicial, llamado orden de la permutación, es el menor entero k que verifica:
$2^k = 1 \pmod n$ (si n es impar)
$2^k = 1 \pmod{n - 1}$ (si n es par, y la mezcla es faro-out)
$2^k = 1 \pmod{n + 1}$ (si n es par, y la mezcla es faro-in).

Tabla general:

N	o(I,n)	o(O,n)
2	2	1
3	2	2
4	4	2
5	4	4
6	3	4
7	3	3
8	6	3
9	6	6
10	10	6
11	10	10
12	12	10
13	12	12
14	4	12
15	4	4
16	8	4
17	8	8
18	18	8
19	18	18
20	6	18
21	6	6
22	11	6
23	11	11
24	20	11
25	20	20
26	18	20
27	18	18

N	o(I,n)	o(O,n)
28	28	18
29	28	28
30	5	28
31	5	5
32	10	5
33	10	10
34	12	10
35	12	12
36	36	12
37	36	36
38	12	36
39	12	12
40	20	12
41	20	20
42	14	20
43	14	14
44	12	14
45	12	12
46	23	12
47	23	23
48	21	23
49	21	21
50	8	21
51	8	8
52	52	8
53	52	52
54	20	52

Observación. Un problema relacionado es el de encontrar el número máximo de mezclas iguales (no necesariamente mezclas perfectas) que deben realizarse para devolver el orden original a una baraja. Como el orden de una permutación es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos en los que se descompone la permutación, el problema consiste en encontrar el valor máximo del mínimo común múltiplo de las particiones del conjunto de cartas. Se

puede probar que dicho máximo se alcanza con una partición P = {x_1, ..., x_n} en donde x_i es la unidad o potencia de un número primo y donde x_i y x_j son primos entre sí (con $x_i \leq x_j$).
En el caso de una baraja de 52 cartas la estructura cíclica que representa la longitud mayor es (1, 1, 1, 4, 5, 7, 9, 11, 13) lo que representa un número de mezclas igual a 180180, realmente muy inferior al total de permutaciones posibles de las 52 cartas.

Propiedades:

1) En una baraja impar, es equivalente la sucesión de faros-in que la de faros-out.
2) El número de mezclas necesarias en una baraja con 2n – 1 cartas es el mismo que el de faros-out para una baraja con 2n cartas.
3) El número de faros-in para 2n – 2 cartas equivale al de faros-out con 2n cartas (lo que refleja el hecho de que las cartas de los extremos son invariantes en una faro-out y el resto se comporta como una faro-in).
4) El número de mezclas necesarias para recomponer la baraja es el mismo que se necesita para volver la carta que ocupa el segundo lugar a su posición inicial.
5) Si 2n+1 es primo, la baraja vuelve a su posición original después de 2n faros-in.
6) Si 2n-1 es primo, la baraja vuelve a su posición original después de 2n-2 faros-out.
7) Con 2^n cartas, hacen falta n faros-out para volver al inicio.

2.3. PRINCIPIO DE SIMETRÍA DE LA BARAJA

J. Russell Duck, de nombre artístico Rusduck, publicó en la revista *“The Cardiste”* (1957) la siguiente propiedad:
“En una baraja par, cartas que ocupan lugares equidistantes de los extremos vuelven a quedar equidistantes después de una mezcla faro.
Con barajas impares, si suponemos que está ordenada cuando las cartas mantienen el mismo orden cíclico, independientemente del lugar que ocupe la primera carta (es lo mismo As-2-3 que 2-3-As), el resultado de las mezclas es el mismo si las faros (o antifaros) se intercalan con cortes arbitrarios a la baraja.”

Este principio, cuya prueba es elemental, tiene consecuencias interesantes que permiten realizar efectos mágicos sorprendentes para la mayoría del público.

2.4. PRINCIPIO DE PENÉLOPE

En el libro *“The Collected Works of Alex Elmsley”* de **Stephen Minch**, se explica el siguiente principio, consecuencia directa de la fórmula por la que se conoce la posición de una carta después de una mezcla faro.

"En una baraja de 2n cartas, si se retiran k cartas de la parte inferior, una mezcla faro (faro-out si k es par o faro-in si k es impar) hace que la carta que ocupa la posición n pase a ocupar la posición k."

De este modo, basta saber la posición de la carta central de la baraja para colocarla en el lugar indicado por el número de cartas retiradas. Teniendo en cuenta que el resultado no depende del número de cartas retiradas de la baraja, este principio se presta a presentarlo como un efecto de predicción. Si no se domina la técnica de la mezcla faro, puede realizarse con un número pequeño de cartas.

2.5. OTRAS PROPIEDADES

(1) **Elmsley**, en 1957, descubre que una combinación adecuada de mezclas faro-in y faro-out permite pasar la primera carta a cualquier posición n de la baraja.
Basta escribir n – 1 en el sistema de numeración binaria (o el propio n si empezamos a numerar las cartas por cero) y realizar faros-in en los lugares cuya cifra es "1" y faros-out en los lugares cuya cifra es "0". [Observar la ¿coincidencia? de la representación O para faro-out e I para faro-in, con las cifras 0 y 1 del sistema binario, además del hecho de que **Elmsley** es un experto en Computación.]
Debemos destacar además que la regla es válida independientemente del número de cartas de la baraja.
En la tabla siguiente mostramos algunos ejemplos:

n	**n-1**	**$(n-1)_2$**	**Mezclas necesarias**
23	22	10110	In-Out-In-In-Out
9	8	1000	In-Out-Out-Out
42	41	101001	In-Out-In-Out-Out-In

La sucesión equivalente de antifaros realizada en orden inverso permite pasar al primer lugar cualquier carta de la baraja.

(2) Por el principio de simetría, si el número n de cartas es par, la misma regla que permite pasar de la primera carta a la p-ésima, mediante una sucesión de mezclas faro, hace pasar la última carta a la posición n – p + 1.

(3) **Ramnath** y **Scully** [RS], en 1996, generalizan esta propiedad y encuentran que existe una combinación más eficiente de faros-in y faros-out para colocar una carta determinada en cualquier posición pre-establecida.

(4) **Solomon Golomb** [Go], experto en teoría de información e inventor de los pentominós, prueba que, con barajas pares, se puede

conseguir cualquier permutación de la baraja combinando cortes y mezclas faro-in y faro-out.
Sin embargo, un mazo impar sólo permite obtener una mínima fracción del total de sus permutaciones posibles.
Por ejemplo, con nueve cartas hay, aparte del inicial, cinco órdenes cíclicos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	2	7	3	8	4	9	5
1	8	6	4	2	9	7	5	3
1	9	8	7	6	5	4	3	2
1	5	9	4	8	3	7	2	6
1	3	5	7	9	2	4	6	8

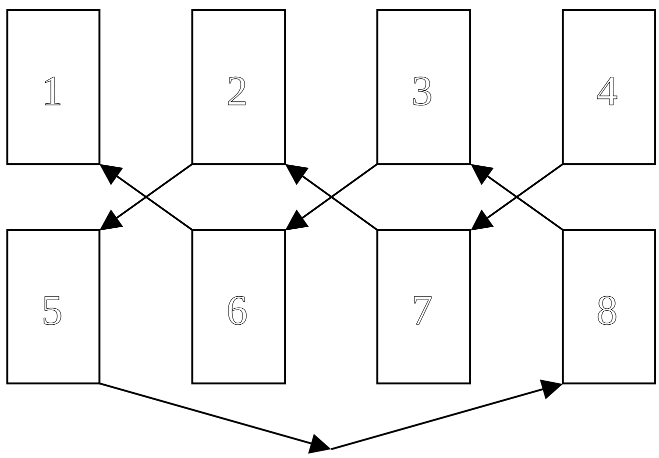
Cada uno de ellos permite 9 permutaciones distintas, lo que hace un total de $6 \cdot 9 = 54$ permutaciones contando mezclas y cortes, lo que es una ínfima fracción del total de $9! = 362880$ permutaciones posibles con 9 cartas.
Del mismo modo, con 51 cartas sólo es posible, mediante sucesivas mezclas faro, obtener 408 permutaciones sobre las 51! posibles. En general, para cualquier n impar, con mezclas faro y cortes de la baraja sólo se puede generar un total de $o(O,n) \cdot n$ permutaciones (donde $o(O,n)$ es el orden del grupo generado por las mezclas faro-out con las n cartas).

(5) **Diaconis**, **Graham** y **Kantor** [DGK] resuelven el problema de caracterizar todas las configuraciones posibles después de realizar sucesivas mezclas faro-in y faro-out. La solución que presentan está relacionada, tanto con problemas de teoría de grupos (para determinar el orden de un grupo de Weyl –que tiene un conjunto de generadores con cierta propiedad), como con problemas de computación (al tener que realizar simulaciones por ordenador para estudiar situaciones con barajas de cualquier tamaño).
Un primer paso consistió en calcular por ordenador todas las configuraciones posibles para después deducir una fórmula que proporcione el orden del grupo obtenido. Se encontró que, para barajas con más de 24 cartas, el esquema se repite cada ocho cartas. Una explicación de los resultados obtenidos por el ordenador se encontraba en el principio de simetría, de modo que bastaba agrupar la baraja en parejas de cartas equidistantes. Entre sus resultados, es sorprendente mencionar que el grupo de permutaciones que corresponde a una sucesión de mezclas faro-in y faro-out con una baraja de 24 cartas es el famoso grupo de Mathieu de orden 12, grupo finito simple esporádico (que no pertenece a una familia infinita de grupos simples) descubierto en 1861.

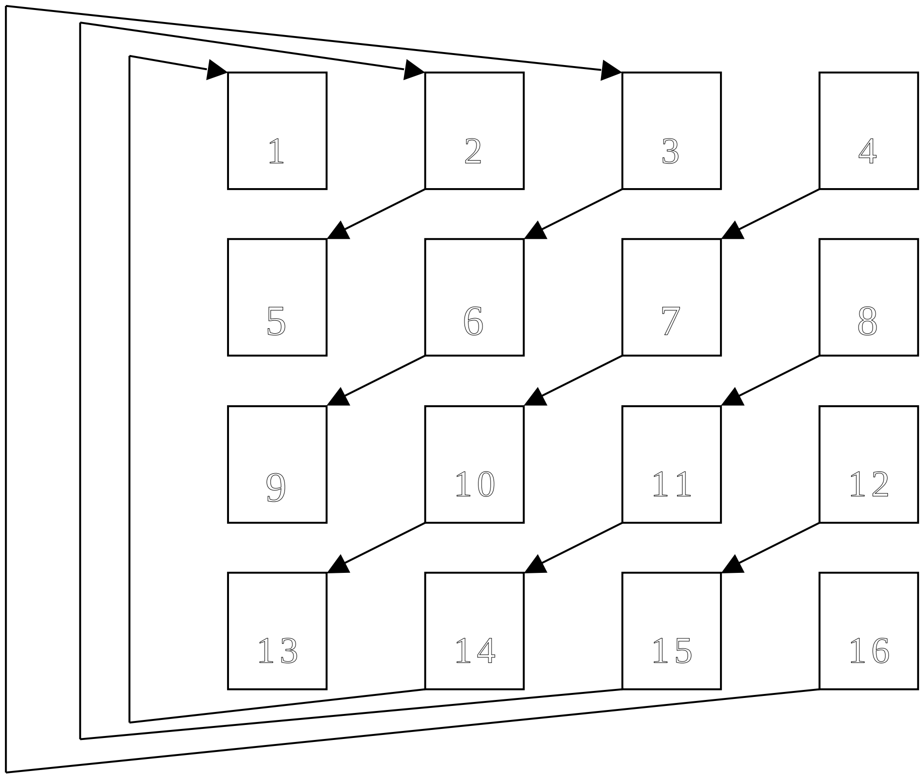
(6) En uno de los monográficos que edita la Escuela Mágica de Madrid, **Juan Tamariz** (1981) desarrolla métodos para realizar faros-out y faros-in mediante combinaciones adecuadas de antifaros. Para realizar una antifaro se separan las cartas en dos montones (sin invertir el orden), alternativamente a izquierda y derecha; al final, se coloca uno de los montones sobre el otro. Según se coloque uno u otro encima, tendremos una antifaro exterior o interior.
Como una antifaro corresponde precisamente a la permutación inversa, es evidente que, si son necesarias n faros del mismo tipo para volver la baraja a la posición inicial, realizar k faros equivale a n – k antifaros: si $O^n(P) = P$, entonces $O^k(P) = (O^{-1})^{n-k}(P)$.
El aporte de **Tamariz** consiste en realizar varias antifaros con un solo reparto. Así por ejemplo:

- Antifaro doble (inverso de dos faros-out).
  Se reparten cartas una a una sobre la mesa formando cuatro montones; a continuación se recoge el cuarto sobre el tercero, ambos sobre el segundo y todos sobre el primero.

- Antifaro triple (inverso de tres faros-out).
  Se reparten las cartas una a una en ocho montones, los cuales se recogen de la forma indicada en el gráfico siguiente:



- Antifaro cuádruple (inverso de cuatro faros-out).
  Se reparten 16 montones en un cuadrado y se recogen en el orden
  (4 – 7 – 10 – 13 – 16 – 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 1)
  como indica el gráfico:



De esta manera pueden obtenerse combinaciones adecuadas de antifaros con las que se consiga el mismo efecto que una sucesión de faros.

(7) **Morris** y **Hartwig** (1976) abordan el estudio de la mezcla faro generalizada, con un número infinito de cartas.

2.6. USOS DE LA MEZCLA FARO

- ♣ En Matemáticas: Morris (matrices de permutaciones, diseño de memoria dinámica de ordenadores), Stone (diseño de redes de ordenadores mediante de procesamiento paralelo), Diaconis (cadenas de Markov), ...
- ♣ En Matemática Recreativa: Gardner, ...
- ♣ En Magia: Marlo, Elmsley, ...

Una memoria dinámica es aquella que requiere para su funcionamiento una circulación constante de datos. Cada dato en una memoria dinámica puede no tener una dirección específica pero puede buscarse y ser enviado a un puerto. Todos los datos están contenidos en una celda y cada celda está conectada con otras dos, excepto las celdas simples que están conectadas también a un puerto de lectura o escritura. La clave para el acceso de datos estriba en desplazar los datos de una celda a la contigua hasta que dichos datos se encuentren en alguna celda conectada a un puerto.

El problema que se plantea es determinar cuántas veces debe desplazarse la memoria para acceder a un dato solicitado. Para responder a esto, se pueden aplicar los mismos principios que usa un mago para llevar una carta elegida a la parte superior de la baraja. Las permutaciones que se consiguen mediante una mezcla perfecta proporcionan una ilustración nítida de las que aparecen en procesamiento de datos.

2.7. PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA MEZCLA FARO

(1) Si S = {0, 1, ..., 2N-1}, O es una faro-out, I una faro-in y S_i una faro arbitraria, probar:

$$O^k(p) = 2^k p (\text{mod } 2N)$$

$$I^k(p) = 2^k p + \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} (\text{mod } 2N)$$

$$S_k \dots S_1(p) = 2^k p + \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} w(S_i) (\text{mod } 2N),$$

donde

$$w(S_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_i \text{ es faro-out,} \\ 1 & \text{si } S_i \text{ es faro-in} \end{cases}$$

(2) Si $O_k(p)$ representa el valor de la carta que ocupa la posición k-ésima después de p faros-out en una baraja de 2N cartas, entonces se verifica la fórmula de recurrencia

$$O_k(p+1) = \begin{cases} \frac{O_k(p)+2N}{2} & \text{si } O_k(p) \text{ es par} \\ \frac{O_k(p)+1}{2} & \text{si } O_k(p) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Fijado k, la ecuación $O_k(n) = k$ permite determinar el número de mezclas necesarias para volver la carta k-ésima a su posición original.

(3) Determinar todos los tamaños de una baraja que pueden recuperar su orden inicial con un mínimo de x mezclas faro de cualquier tipo.
Por ejemplo, para x = 4 y faros-in, sólo las barajas de tamaño 4 y 14 recuperan su orden inicial; con el mismo valor x = 4 y faros-out, los tamaños de las barajas son 5, 6, 15 y 16.

(4) ¿Cuál será el proceso para pasar mediante mezclas faro una carta desde una posición predeterminada hasta la parte superior? ¿O para pasar la primera carta a cualquier posición mediante antifaros?
Encontrar un algoritmo eficiente para minimizar el número de mezclas necesarias.

3. EL PRINCIPIO DE GILBREATH

"Cuando se mezcla una serie repetida de cartas consigo misma, pero uno de los montones se coloca en orden inverso, el contenido de cada grupo en la serie no cambia, sólo cambia de orden." ***Charles Hudson*** *(1966)*

Ya hemos comprobado que cierta información sobre la distribución inicial de una baraja permanece tras una mezcla por hojeo. Algunas propiedades han podido explotarse y estudiarse matemáticamente, lo que a su vez origina nuevas versiones y adaptaciones, cada vez más sorprendentes. Una de dichas propiedades ha dado lugar a un principio matemático, atribuido a **Norman Gilbreath** (aunque **Karl Fulves** afirma haberlo aplicado con anterioridad a algunos juegos de magia), pues apareció expuesto en un artículo titulado "Los colores magnéticos" y publicado en la revista de magia *The Linking Ring*, vol. 38, nº 5 (1958).
Una primera versión del principio de Gilbreath puede enunciarse así:
"Dada una baraja de 2n cartas, donde los colores están alternados, se separa en dos paquetes para realizar una mezcla por hojeo. Si después de la mezcla se corta por algún lugar donde haya dos cartas del mismo color y se completa el corte, entonces, para cualquier i = 1, ..., n, las cartas que ocupan los lugares 2i – 1 y 2i son de distinto color."

Observación. Si al separar en dos paquetes, las cartas que quedan a la vista son de distinto color, no es necesario realizar el corte final.

<u>*Demostración.*</u> Supongamos en primer lugar que las cartas que quedan a la vista después del primer corte son de distinto color. Al empezar la mezcla por hojeo, se deja caer una carta, lo que hace que las dos últimas cartas de cada paquete sean ahora del mismo color, pero distinto al de la carta arrastrada. Sea cual sea la que se deje caer, ya tenemos la primera pareja de cartas de distinto color. La situación actual es ahora idéntica a la de partida.

Supongamos ahora que las dos cartas del fondo de cada paquete son del mismo color (lo que permite asegurar que las primeras de cada paquete son también del mismo color, pero distinto al de las últimas). Cuando se deja caer la primera, el resto queda dispuesto como en el caso anterior. Por tanto, al finalizar la mezcla sólo habrá una carta desparejada, que será de distinto color que la primera. Al cortar por dos cartas del mismo color y unir los paquetes resultantes, las cartas primera y última se ponen en contacto y se recompone el orden inicial.

A continuación vamos a resumir parte del contenido sobre el planteamiento matemático del principio de Gilbreath realizado por **Ehrhard Behrends** [Be].

Representamos la baraja como el conjunto ordenado $S_m = \{a_1, \ldots, a_m\}$, donde $a_i = 1$ si la carta que ocupa la posición i-ésima es roja, pero $a_i = -1$ si la carta que ocupa la posición i-ésima es negra. Decimos que el conjunto S_m es **k-acotado** cuando

$$|a_r + \ldots + a_s| \leq k,\ 1 \leq r \leq s \leq m$$

(es decir, la distancia entre el máximo y el mínimo de la sucesión

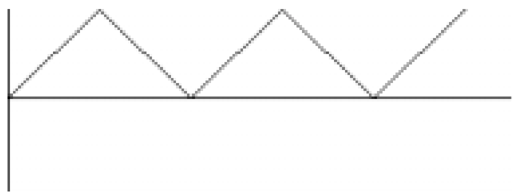
$$\{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_m\}$$

es menor o igual a k).

Decimos también que el conjunto es **estrictamente k-acotado** cuando es k-acotado pero no (k♣1)-acotado.

Ejemplos.

a) El conjunto $S_{2n} = \{1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1\}$ es 1-acotado para cualquier valor de n. Corresponde al caso en que los colores de la baraja están alternados. Podemos ilustrar la sucesión de sumas parciales mediante la gráfica siguiente:



b) El conjunto $S_{52} = \{1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1\}$ es 26-acotado. Corresponde al caso en que los colores están perfectamente separados.

Propiedades.

1) Si $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es k-acotado, entonces $\{a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1\}$ es k-acotado, y el conjunto $\{a_r, a_{r+1}, \ldots, a_m, a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ es k-acotado siempre que $a_1 + \ldots + a_m = 0$. Esto quiere decir que el valor de la cota en una baraja no cambia al invertir el orden de todas las cartas o al realizar un corte a la baraja.
2) Si $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ es k-acotado y $B = \{b_1, \ldots, b_{m'}\}$ es k'-acotado, entonces el conjunto C formado intercalando (sin cambiar el orden) los elementos de B entre los de A es (k+k')-acotado. Así, una mezcla por hojeo convierte una baraja k-acotada en una baraja 2k-acotada.
3) En una baraja k-acotada, cualquier grupo de k+1 cartas consecutivas contiene cartas de ambos colores.

Preguntas.

1) Es evidente que, mezclando n veces una baraja 1-acotada, se obtiene una baraja 2n-acotada. ¿Se puede obtener una baraja 3-acotada?
2) ¿Cuál es el máximo orden de acotación de una baraja?

Otras propiedades más generales se obtienen después de definir el siguiente concepto:
Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto k-acotado. Llamamos $\clubsuit_0 = 0$, $\clubsuit_1 = a_1, \ldots, \clubsuit_r = a_1 + \ldots + a_r, \ldots$ y definimos $H_A = \min\{\clubsuit_0, \clubsuit_1, \ldots, \clubsuit_m\}$.
A partir de este valor se define la altura del i-ésimo elemento como

$$h_i = \clubsuit_i - H_A \quad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Es evidente que $0 \leq h_i \leq k$.

Conocido el valor de h_0 es posible determinar otras características de una baraja k-acotada. Por ejemplo:

- Al mezclar una baraja 1-acotada se obtiene una baraja 2-acotada, que quizá sea 1-acotada. Si se corta entre dos cartas del mismo color, es estrictamente 2-acotada y $h_0 = 1$, de modo que cualquier par (a_{2i-1}, a_{2i}) es de distinto color.
- Si mezclamos las veces suficientes para conseguir una baraja k-acotada, para que lo sea estrictamente debemos buscar k cartas consecutivas del mismo color y cortar bajo la primera de ellas. En este momento h_0 será 1 ó $k - 1$, dependiendo de su color. En cualquier caso, cada vez que se reparten k cartas, siempre habrá cartas de distinto color.

APLICACIONES.

♣ Se puede aplicar este principio para descifrar una frase que se muestra después de haber hecho una mezcla por hojeo de sus letras.

♣ Se separa la baraja en dos montones, a la izquierda todas las cartas son rojas y a la derecha todas las cartas son negras. Se toman n cartas del montón izquierdo y se mezclan con las del montón derecho. Se toman n cartas del montón derecho y se mezclan con las del montón izquierdo. Entonces el montón izquierdo tiene tantas cartas rojas como negras tiene el montón derecho.

♣ Si se preparan dos barajas completas colocando las cartas de una en orden inverso a las de la otra, cualquier mezcla por hojeo hace que, al separarlas en dos montones iguales, vuelvan a quedar en cada montón dos barajas completas.

4. EL PROBLEMA DE JOSEFO

Un problema clásico de matemática recreativa está basado en la leyenda del famoso historiador judío **Flavio Josefo**.
"Durante la rebelión judía contra Roma en el siglo I d.C., 40 judíos se encontraron acorralados en una cueva. Para evitar ser atrapados y convertirse en esclavos, prefirieron la muerte y decidieron formar un círculo, matándose entre ellos: el primero mataba al segundo y pasaba el arma al tercero, quien mataba al siguiente, y así sucesivamente, hasta que quedara uno solo, quien se suicidaría. Josefo rápidamente calculó el lugar que ocuparía el último superviviente, ocupó dicho lugar y escapó a la muerte."

Es un interesante ejercicio utilizar algún lenguaje de programación para obtener la respuesta a este problema y plantear posibles generalizaciones, pero también el principio en el que se apoya este problema es la base de algunos juegos de magia.
Se puede probar fácilmente que, si el número de personas es 2^n, la primera de ellas será la última en eliminarse. Basta observar que, en la primera fase, se eliminan todas las personas que ocupan un lugar par. Al renumerar las restantes, se obtiene un grupo con 2^{n-1} personas a las que se puede aplicar el mismo proceso anterior. Cuando sólo quedan dos personas, es evidente que se elimina la número dos y queda la primera.
Una sencilla variación de este argumento permite demostrar que, si se trata de un grupo de $2^n + k$ personas, eliminamos en primer lugar las colocadas en las posiciones 2, 4, ..., 2k, para llegar a un grupo con 2^n personas y ahora la primera de ellas es la que ocupaba inicialmente el lugar 2k + 1.

Con una baraja de cartas puede simularse el problema de Josefo mediante la llamada **mezcla australiana**, que consiste en realizar sucesivamente la siguiente maniobra:
La carta superior de la baraja se coloca en la parte inferior y la siguiente carta se deja sobre la mesa. A continuación se repiten las mismas acciones hasta que sólo quede una carta en la baraja, que se deja sobre las demás de la mesa.
Como ya hemos comprobado, a pesar del aparente desorden de las cartas después de esta mezcla, es posible determinar desde el principio cuál será la última carta que quede en la mano. El argumento anterior permite utilizar la aritmética binaria para deducir cuál será dicha carta. Para ello se escribe en notación binaria el número de cartas de la baraja y se pasa la primera cifra (que es siempre un 1) a la derecha. La carta que ocupa el lugar indicado por este último número, empezando por arriba, será la última en repartirse.
Por ejemplo, con la baraja española de 40 cartas, como $40_{(10)} = 101000_{(2)}$, la última carta que se repartirá es la decimoséptima, pues $010001_{(2)} = 17_{(10)}$. [De paso confirmamos que esta fue la posición

ocupada por **Flavio Josefo** para escapar con vida del suicidio colectivo.]
Si se trata de una baraja francesa de 52 cartas, basta saber que

$$52_{(10)} = 110100_{(2)}$$

para deducir que la carta final será la que ocupe el lugar 41.

Es evidente que, conocida esta propiedad, puede muy bien explotarse para realizar una sorprendente predicción: basta saber el número de cartas que se utilizarán y conocer la carta que ocupa el lugar indicado por la regla anterior. Como no resulta fácil saber a simple vista la carta resultante del proceso de eliminación, se puede aplicar el siguiente método alternativo:
Se mira la carta superior del paquete de cartas. Si n es el número de cartas, se calcula el doble de la diferencia entre n y la mayor potencia de dos que sea menor que n. A continuación se calcula la diferencia entre n y el valor obtenido. Basta pasar de arriba abajo tantas cartas como indica este último número para que el paquete esté preparado.

El problema de Josefo y su correspondiente aplicación a las mezclas de cartas permite una generalización inmediata cuyo planteamiento es el siguiente:
Se colocan n personas, numeradas del 1 al n, en un círculo. Empezando por el número 1 se cuentan m personas y se elimina la persona que ocupa el siguiente lugar, a la vez que el círculo se estrecha. Se vuelven a contar m personas y se van eliminando las personas que se encuentran a continuación de dicho número. Después de realizar el proceso n – 1 veces, sólo queda una persona. ¿Qué lugar ocupa en la lista dicha persona?
Así, el caso m = 1 se reduce al estudiado al principio.
En el caso m = 2, si n = 8, se van eliminando sucesivamente los lugares 3-6-1-5-2-8-4 y queda en último lugar la posición 7.

Con una baraja, el proceso general consiste en pasar m cartas de arriba abajo, extraer la siguiente, volver a pasar m cartas de arriba abajo, extraer la siguiente, y así sucesivamente. Conocida la fórmula que da la posición de la última carta, ésta puede predecirse con anterioridad a la mezcla. Dejamos como ejercicio la obtención de dicha fórmula.
Otra variante de esta mezcla es la llamada **mezcla del monje:** con la baraja en la mano derecha se pasa la carta superior a la mano izquierda, se pasa la siguiente sobre la anterior, la siguiente bajo las dos anteriores, y así sucesivamente, pasando alternativamente cartas arriba y abajo del nuevo paquete. También en este caso se han obtenido fórmulas matemáticas que permiten conocer la posición de cualquier carta después de una sucesión de mezclas del monje.

5. CONCLUSIÓN

"The way I do magic is very similar to mathematics. Inventing a magic trick and inventing a theorem are very, very similar activities in the following sense. In both subjects you have a problem you're trying to solve with constraints. One difference between magic and mathematics is the competition. The competition in mathematics is a lot stiffer than in magic."
P. Diaconis

- ♣ Una correcta notación matemática simplifica espectacularmente el planteamiento y resolución de problemas variados.
- ♣ Permite entender las propiedades intrínsecas de dichos problemas.
- ♣ Los casos particulares se pueden extender fácilmente a situaciones más generales con escasa complicación técnica.

REFERENCIAS:

[AD] Aldous, D. y Diaconis, P. **"Shuffling Cards and Stopping Times."** Amer. Math. Montly 93 (1986), 333-348.

[Be] Behrends, E. **"On the mathematical background of Gibreath's card trick."** Preprint.

[Bi] Birnbaum, S. **"Faro Shuffle Program."** http://www.concentric.net/~birnbaum/magic/index.shtml

[CG] Conway, J. y Guy, R. **"The Book of Numbers."** Copernicus (Springer-Verlag), NY, (1996), 163-165.

[DGK] Diaconis, P., Graham, R. y Kantor, W. **"The Mathematics of Perfect Shuffles."** Adv. in Appl. Math. 4 (1983), 175-193.

[El] Elmsley, A. **"The Mathematics of the Weave Shuffle."** The Pentagram 11 (1957) y 12 (1958).

[Ga] Gardner, M. **"Modeling Mathematics With Playing Cards."** http://www.maa.org/pubs/cmj_may00.html

[Go] Golomb, S. **"Permutations by Cutting and Shuffling."** SIAM Review 3 (1961), 293-297.

[Mc] MacTier, A. **"Card Concepts, and Anthology of Numerical and Sequential Principles within Card Magic."** Davenport, 2000.

[MH] Morris, S. B. **"Magic Tricks, Card Shuffling and Dynamic Computer Memories."** The Mathematical Association of America (1998).

[MH] Morris, S. B. y Hartwig, R. E. **"The Generalized Faro Shuffle."** Discrete Math. 15 (1976), 333-346.

[RS] Ramnath, S. y Scully, D. **"Moving Card i to Position j with Perfect Shuffles."** Math. Mag. 69 (1996), 361-365.

[St] Stone, H. **"Parallel Processing with the Perfect Shuffle."** IEEE Transactions on Computers 2 (1971), 153-161.

[TT] Trefethen, L.N. y Trefethen, L.M. **"How many shuffles to randomize a deck of cards?"** Proceedings of the Royal Society London 456 (2000), 2561-2568.