Resolución de Problemas: Entender, Aprender, Ensinar

Felipe Gago

Ó longo desta exposición, tratarei de poñer de manifesto que aprender a resolver problemas é un método válido para cubri-los obxectivos encomendados á matemática dentro do ensino. Para ir entrando en contexto, comezarei por deixar claro que non existen reglas —alomenos eu non as coñezo— para resolver problemas; polo tanto a nosa presentación non poderá ser deductivo\demostra-tiva e basearase nunha exploración de diferentes situacións das que tentaremos saca-lo máximo proveito.

Estou convencidos de que o mellor xeito de aprendermos algo é descubri-lo por un mesmo, e por esta razón, tratarei de mostrar diferentes exemplos de descubrimentos ó tempo que darei oportunidade para que cada quen faga os seus propios. En cada descubrimento, antes de contar cunha proba definitiva, o que se fai é reforza-la nosa certeza con novos casos particulares, ou comparándoa con outros feitos coñecidos, ou extraendo consecuencias que se van demostrando.

Isto é o que poderiamos chamar *razoamento plausible*, e se admitimos que entre os obxetivos prioritarios do ensino da matemática ó nivel que falamos está o de *aprender a pensar*, non deberá haber dúbida de que hai un lugar para o razoaamento plausible e para a experimentación.

A pouco que un se interesa polas opinións de grandes nomes vinculados co desenvolvemento da matemática, como Euler, Laplace, Poincaré e outros, encontra que para eles o papel da evidencia inductiva na investigación matemática é semellante ó seu papel na investigación física. O propio Euler, na sua *Opera omnia* dicía: *"... Sen dúbida parecerá paradóxico atribuírlle gran importancia á observación na parte da matemática conocida como matemática pura, pois é opinión corriente que a observación débese restrinxir ós obxetos físicos. Tan pronto como referímo-los números só ó intelecto, non atinamos a comprender como a observación e os cuasi experimentos poden ser útiles na investigación sobre a natureza dos números. ... Debemos distinguir cuidadosamente da verdade o coñecemento que só se apoia en observacións e aínda non foi probado. En realidade, nós usaremos tales descubrimentos como unha oportunidade para investigar máis detidamente as propiedades descubertas, e probalas ou refutalas."*

Non nos quedemos coas opinións dos demáis, por autorizadas que sexan, e pasemos a analizar algúns exemplos para forma-las nosas propias.

Máis que os problemas que presentaremos, é o estilo o que nos parece interesante, de igual xeito que o camiño de chegarmos á solución será mais importante ca mesma solución. O método seguido na nosa exposición pretende servir como algo susceptible de ser imitado; por decilo doutro xeito, predicaremos co exemplo. As limitación de espacio obligarannos a teatraliza-lo proceso do descubrimento, intentando sempre, iso si, que pareza o máis crible posible.

Algúns ~~Problemas de optimización~~ ~~Problemas de Física~~ ~~Problemas xeométricos~~ ~~Pasatempos~~

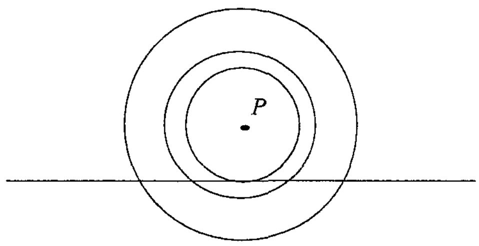
Pido disculpas polo emborronado do texto, pero a verdade é que non teño claro como titular este epígrafe. Por outra parte, non creo que o título sexa o máis importante, e se alguén considera que si o é, que se sinta libre para poñerlle un: ¡non hai rencor! Ademais, paréceme que aínda resonan en min as notas dunha canción que aprendín na Facultade, nunhas Xornadas de Didáctica da Matemática —¡vaites, home! á fin tivo que saí-la dichosa palabra— organizadas polos estudiantes do curso superior; a letra dicía algo así como *"...se queres matar unha cousa, ponlle un nome, definea..."*. Está ben, gardémo-las tesoiras mailo cartón, e falemos de matemática outra vez.

O primeiro problema que abordaremos é o de determina-la distancia máis curta dun punto a unha recta.

Non resulta difícil de se convencer que a distancia non é constante, xa que se empezamos moi pola esquerda ésta é inmensa, e vai menguando a medida que avanzamos cara a dereita, para despois crecer outra vez desmesuradamente canto mais á dereita. Escollido un ponto calquera da recta, Q, éste non será o punto no que se alcanza o mínimo se somos capaces de atopar outro punto, tamén na recta, á mesma distancia do punto dado P.

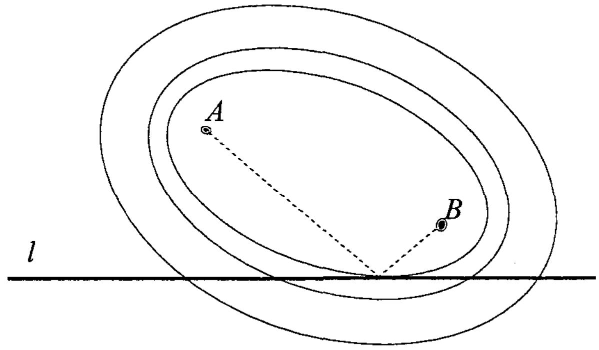
¿Onde están tódolos puntos do plano que distan de P o mesmo que Q?

Están todos nunha circunferencia con centro en P. Mentres nos movamos por esta circunferencia, a magnitude a optimizar permanece constante: trátase dunha *liña de nivel*, ó xeito das que aparecen nos planos para a altitude, ou nos mapas do tempo para a presión. Se unha circunferencia con centro P corta á recta dada, estes dous puntos non van ser os buscados; o punto desexado será aquel no que unha circunferencia destas sexa tanxente.



A propiedade de que o radio no punto de tanxencia é perpendicular á recta tanxente danos información do punto, sobre a recta, a menor distancia de P.

Este mesmo patrón, que aparece na determinación xeométrica da solución nos problemas de programación lineal, é tamén o que se usaría para determinar sobre unha recta dada l o punto dende o que a suma de distancias a dous puntos exteriores A e B sexa a mínima, que modela gran cantidade de situacións coñecidas. Tampouco para este caso resulta complicado concluír cunha mínima exploración que tal punto con distancia mínima existe. Nesta caso, as liñas de nivel serían elipses de focos os puntos dados e a solución sería o punto no que unha delas fose tanxente:



Outro tipo de patrón que se repite con frecuencia nos problemas de optimización é o que poderiamos denominar como *patrón de variación parcial*. Cando se pretende optimizar unha función que depende de varios parámetros, pódese supoñer coñecidos varios deles e determinar condicións sobre os demáis con intención de comprende-lo problema e chegar á solución. Vexamos un exemplo: supoñamos que temos n cantidades das que coñecemos a suma e queremos que o seu producto sexa máximo. É dicir, maximiza-lo producto

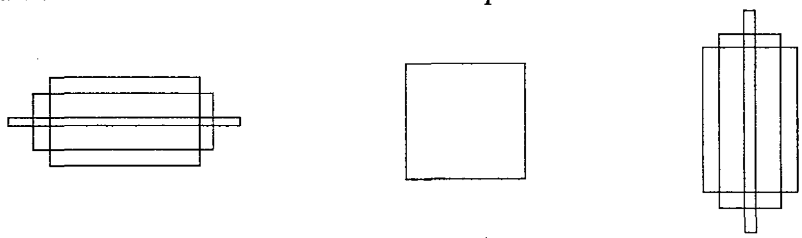
$$\pi = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n ,$$

mantendo constante a suma

$$\sigma = a_1 + a_2 + \cdots + a_n .$$

Supoñendo que temos determinados $a_3 , \ldots , a_n$, o problema redúcese a maximizar $a_1 \cdot a_2$ mantendo constante $a_1 + a_2$, pois tanto a suma $a_3 + \cdots + a_n$, coma o producto $a_3 \cdots a_n$ son agora cantidades coñecidas.

Este problema é o de buscar o rectángulo de área máis grande de entre tódolos que teñen o mesmo perímetro. Unha mínima exploración, achatando o rectángulo ata que os lados verticais se fagan 0, convencenos de que o valor da área varía, e por simetría un *chega a convencerse* de que o máximo ha de se alcanzar cando sexa cuadrado co mesmo perímetro.

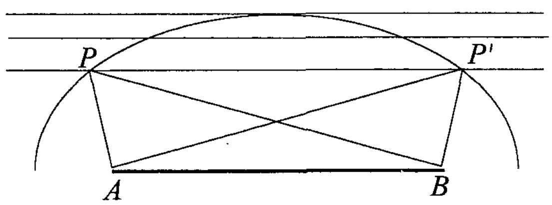


Este resultado equivale a demostración de que $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq x \cdot y$, o que resulta evidente, xa que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - x \cdot y = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Xa que falamos de áreas máxima con perímetro constante, ¿cál é o triángulo de área máxima entre tódolos que teñen o mesmo perímetro?

No caso anterior, non tiña sentido supoñer que conociamos tódalas cantidades excepto unha, pois, de ser así, a suma determinaría a que faltaba. Neste caso, podemos supoñer que temos determinado un lado —dous non se pode, pois o coñecemento do perímetro determina o terceiro, e polo tanto o triángulo. Se o lado supostamente coñecido é o segmento que une os vértices A e B, o triángulo quedará determinado tan pronto como fixémo-la posición do terceiro vértice C. Como o perímetro é dado, a suma das distancias $AC + BC$ é conocida, co que C só pode estar sobre unha elipse de focos A e B, como na figura. Agora ben, se trazamos rectas paralelas ó lado coñecido, en calquera punto destas rectas que poñámo-lo vertice que falta, a área non varía:¡liñas de nivel!.



Polo tanto a solución é no punto no que unha destas rectas é tanxente, que coincide co punto de corte co semieixo menor. De acordo con isto, os dous lados que faltaban han de ser iguais, e como non hai nada que os distinga do que supoñiamos conocido, o triángulo será equilátero. Así pois, de tódolos triángulos de igual perímetro, o equilátero ten área máis grande.

Neste problema pódese ver unha cooperación entre os dous patróns: *liñas de nivel tanxente* e *variación parcial*.

Aproveitando que falamos de áreas de figuras con igual perímetro, na que parece que as figuras regulares levan as de ganar, podiamos compara–las áreas dun cuadrado e mais un triángulo con igual perímetro p. Para o cuadrado, o valor da área é $\frac{p^2}{16}$, mentres que para o triángulo é de $\frac{p^2 \cdot \sqrt{3}}{36}$, obviamente menor. De eiquí podiamos extrae-la conxectura de que a igual perímetro, entre as figuras regulares a área aumenta co número de lados, e polo tanto, o círculo deberá se-la figura plana que ocupa maior área entre tódalas que teñen o pesmo perímetro: *teorema isoperimétrico*. Esta conxectura non é outra cousa co refrexo do noso prexuízo en favor das figuras regulares, e canto "máis regular" mellor, onde esta afirmación podería ser unha reminiscencia dunha lectura atropelada de *Planilandia* de Abott.

Non debería extrañar que os problemas de optimización resulten en xeral máis atractivos que outros de dificultade comparable, o que sen dúbida responde a unha razón bastante primitiva: ¿quen non intentou obter algo ó menor precio posible, ou alcanza-lo maior efecto co mínimo esforzo, ou o máximo traballo nun tempo dado? A atracción destes problemas reside na idealización que representan dos nosos problemas diarios.

Do mesmo xeito inclinámonos a pensar que a Natureza actúa como nos gustaría a nós, obtendo o maior efecto co mínimo esforzo; en palabras de Euler: *"Xa que a fábrica do mundo é a máis perfecta, nada sucede neste mundo sen que algunha razón de máximos ou mínimos veña a traernos luz"*.

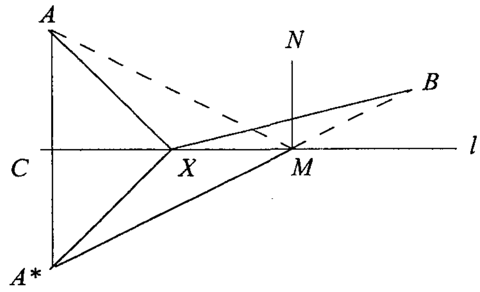
Os físicos logran dar forma clara e útil a ideas deste tipo, describindo certos fenómenos físicos en termos de *principios mínimos*. Os problemas matemáticos son, con frecuencia, inspirados pola natureza, ou mellor dito, pola nosa interpretación da natureza: a ciencia física. Tamén a solución dun problema pode ser inspirada pola física. Estamos de acordo con Poincaré cando di que, ós matemáticos, *a física non só nos dá unha oportunidade para resolvermos problemas, senón que nos axuda tamén a atopa-los medios para sesolvérmo-los, e isto de dous xeitos: anticipando a solución e suxerindo as liñas de razoaamento apropiadas.*

Con estas premisas, pretendemos agora presentar algúns exemplos extraídos da física elemental para sacarmos consecuencias útiles para o noso traballo.

A liña recta é o camiño máis curto entre dous puntos. A luz, viaxando a través do aer dun punto a outro escolle este camiño, ¿fai o mesmo cando se desplaza indirectamente, é dicir, cando se refrexa nun espello? ¿Cál é a distancia máis curta neste caso?

Retomémo-lo problema de atopa-la distancia máis curta entre dous puntos A e B situados a un lado dunha recta l dentro dun plano, pasando por un punto desta recta. Xa vimos como a solución viña dada pola elipse de focos os puntos dados que era tanxente á recta en cuestión. Se a luz que mana dun dos puntos é observada dende o outro punto, despois de se refrexar por exemplo na superficie calma dunha piscina que actua de espello, ¿cal sería a taxectoria? A experiencia dinos que a luz que se observa parece proceder dun punto por debaixo da superficie da auga da piscina, un punto A^* que é a imaxe de A ó se reflectir no espello, e que é simétrica respecto da liña l.

A entrada en escea deste punto cambia por completo o panorama, pola gran cantidade de novas relacións que introduce e que procedemos a explotar.



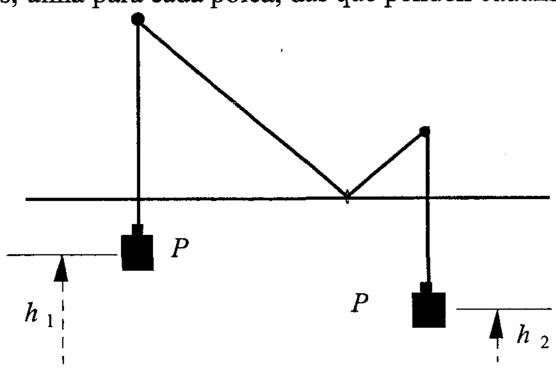
Do feito que $AC = A^*C$, por igualdade de triángulos, séguese que $AX = A^*X$, co que se o punto de contacto con l é X a lonxitude será maior que se é M, pois a liña recta é a distancia máis curta para ir de B a A^*. Esta é xusto a configuración que se usa para demostra-la lei de reflexión, xa que deses triángulos ves que a liña punteada está igualmente inclinada con respecto a recta normal en l.

Como primeira consecuencia xa podemos dicir que a luz nos seus desplazamentos sempre escolle o camiño máis curto, resultado que trataremos de explotar.

Unha segunda revisión do problema condúcenos a comparar esta solución coa que obtivemos usando o método de liñas de nivel tanxente co que decubrimos unha propiedade para as elipses: as liñas que unen un punto calquera da elipse cos focos están igualmente inclinadas con respecto á normal nese punto, ou equivalentemente con respecto á tanxente. Este resultado non é outra cousa que a extensión do que pasa na circunferencia para o radio maila tanxente pois, á fin e ó cabo, a circunferencia non é máis que unha elipse particular.

Comentabamos antes como a física acertara a recoller en pricipios de mínimos determinadas actuacións da natureza, e xa analizamos un deles. A continuación usaremos outro principio conocido para tratarmos de sacar información aproveitable: *o principio de enerxía mínima* para un sistema illado. Esta máxima recolle que se nun sistema non actúan forzas externas, éste trata de liberar o máximo de enerxía.

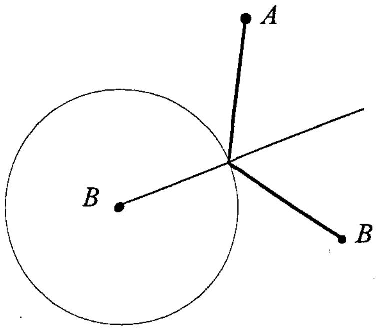
Supoñamos que temos duas poleas e unha barra ríxida pola que circula libremente un anel ó que están atadas duas cordas, unha para cada polea, das que penden cadanseu peso do mesmo valor P.



Supoñendo que un dos pesos está a altura h_1 e o outro a h_2, entón a enerxía do sistema é $P(h_1 + h_2)$, que tenderá a facerse mínima. Como o peso non varía, isto quere dicir que a suma das alturas será mínima cando chegue a reposo. Supoñendo que as poleas están fixas con respeto á barra, $h_1 + h_2$ mínimo se a suma de distancias dos pesos ás poleas é máxima, e se a corda non estira quere dicir que o a corda que une as poleas pasando polo anel mide o menos posible: *é o camiño mínimo.*

Efectivamente, a análise das forzas que interveñen no anel cando se chega ó equilibrio, dan de novo a resposta de que os ángulos que se forman coa recta e mailos dous camiños é o mesmo.

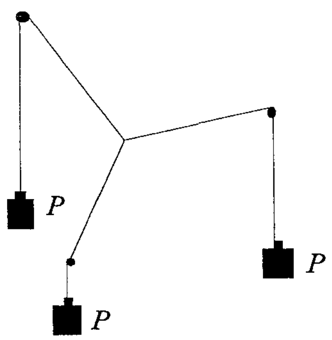
Outro problema de mínimos popular é o do centro de tráfico con tres puntos —a cadea de tres tendas iguais que decide facer un almacén para servicio delas de xeito que a suma das distancias do almacén ás tres tendas sexa mínima.



Por variación parcial, supoñamos que coñecemo-la distancia do almacén a unha tenda: o almacén estará entón nalgun punto da circunfencia centrada na tenda B e radio esta distancia. Un raio de luz que vaia de A a C refrexándose neste espello circular determinará a distancia máis curta. Pola lei de reflexión, estes camiños estarán igualmente inclinados con respeto á normal no punto, e por variación parcial, os tres ramais están igualmente inclinados entre sí.

Así pois, unha interpretación óptica do problema foi de axuda para determina-la posición do punto buscado.

En analoxía co que viamos antes, poderiamos intentar tamén unha interpretación mecánica. A situación sería a de dispoñermos de tres poleas e tres cabos atados entre sí e dos que penden cadanseu peso P.



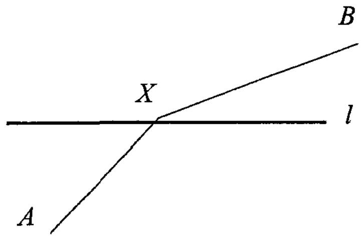
Igual que antes, cando o sistema libere toda a enerxía que poida, a suma das cordas entre as poleas será mínima.

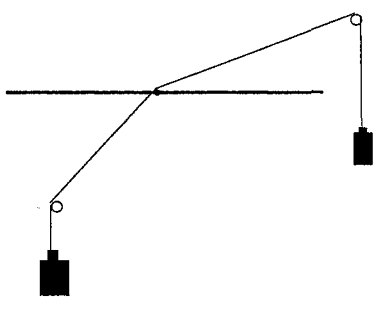
Este mecanismo valeríanos para determinar sobre un mapa o centro de tráfico. Abondaría con furar os tres puntos dados e pasar por eles as tres cordas nas que se colgarían os pesos; o punto con suma de distancias mínima ós tres dados estaría onde se detivese o nudo.

A modo de resumo, digamos que a superposición de diferentes métodos, ou diferentes interpretacións, permite inferir outras utilizacións ou posibles aplicacións. Por exemplo, cando analizámo-lo principio de enerxía mínima, podiamos ter comezado pola análise da posición de equilibrio dun sistema de forzas xa que as condición para os ángulos son idénticas cas do caso da luz. Hai gran cantidade de situacións nas que a clave para a resolución do problema pode ser atopada nunha destas aportacións da física que, lembremos, empezaron cunha apreciación do comportamento da luz: *para se desplazar entre dous puntos, a luz escolle sempre o camiño máis curto.* Isto sucedía sempre ... ¿sempre? ... ¿aínda dentro da auga? ... ¿que pasa cando se mete un pau na auga, que somella rachar?.

Efectivamente, é ben coñecida por todos a experiencia de introducir un pau na auga e *ver* como *cambia de dirección* na superficie: a imaxe do pau sumerxida, é dicir, a luz de debaixo da auga non parece escolle-lo camiño máis curto. A nosa situación de seguridade no principio da luz xa non é a mesma; funcionou para dous casos —propagación directa e reflexión— pero para esta terceira —refracción— fracasa. Ó mellor, a luz, que se propaga cunha determinada velocidade finita no aer, resulta que se propaga cunha velocidade diferente na auga; poida que esta diferencia de velocidades explique o fenómeno da refracción. A luz, propagándose a velocidade constante, escollendo o camiño máis curto, escolle o camiño *máis rápido*. Se a velocidade depende do medio atravesado, o camiño máis curto non ten por que se-lo camiño máis rápido. ¿Será que a luz escolle sempre o camiño máis rápido, incluso cando vai da auga ó aer?

Estas ideas lévannos a un claro problema de mínimos. Dados dous puntos A e B e unha liña l, determina-lo camiño mais rápido posible para viaxar dende A a B, se dende A ata l se viaxa a velocidade u, e dende B ata l se fai a velocidade v.





Parece razoaable seguir unha liña recta dende A ata l e outra dende l ata B; como o tempo, en movemento uniforme, depende só da distancia e da velocidade, o que tratamos de minimizar é

$$\frac{AX}{u} + \frac{XB}{v} .$$

Sen axuda do cálculo diferencial este problema non resulta inmediato, a non ser que usémo-la idea introducida por Fermat, e que á fin conduciría ó invento deste. Usando un mecanismo similar a un xa usado antes, no que os pesos agora son diferentes —de seren iguais, xa vimos que solución é unha liña recta, e non representaría adecuadamente a luz refractada, e colgan de candansua cordas atadas a un anel. Se da polea en A, no punto P colga un peso p, e da polea B no punto Q colga un peso q, para que o sistema perda o máximo de enerxía

$$AP \cdot p + BQ \cdot q$$

ha de ser un máximo, e como supoñemos invariable a lonxitude de cada corda, terase que

$$AX \cdot p + XB \cdot q$$

é un mínimo. Esta ecuación é análoga a do problema de mínimos plantexada, sen máis ca poñer

$$p = \frac{1}{u} \quad q = \frac{1}{v}$$

Se agora analizámo-las forzas que interveñen cando se chega ó equilibrio, ténse que

$$p \cdot sen(\alpha) = q \cdot sen(\beta),$$

sendo α o ángulo que AX forma coa normal á recta. Coas velocidades temos que o camiño será o máis curto cando

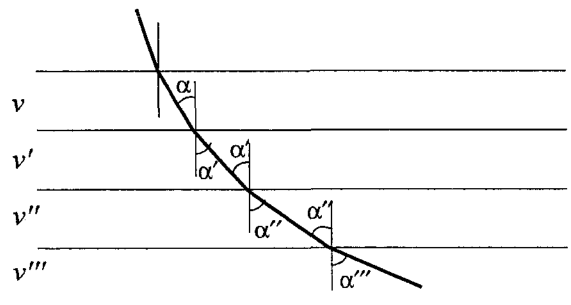
$$\frac{1}{u}\, sen(\alpha) = \frac{1}{v}\, sen(\beta)\,,$$

ou equivalentemente

$$\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)} = \frac{u}{v}\,,$$

que reproduce bastante adecuadadmente a lei de refracción, na que o cociente $\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)}$, que só depende dos dous medios nos que se estudia a luz —auga e aer, neste caso— recibe o nome de índice de refracción.

Postos en faena, poderiamos recrea-lo descubrimento por Bernouilli da *braquistocrona*, o traxectoria que seguiría un punto en caída libre polo camiño máis rápido



Supoñendo que se trata dun raio de luz que atravesa un medio estratificado con distintas velocidades, pola lei de refracción terase que

$$\frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\mathrm{v}} = \mathrm{cte.}$$

Tendo en conta que a velocidade depende exclusivamente da altura —principio de conservación da enerxía—

$$v = \sqrt{2gy}\,,$$

sendo y a distancia recorrida en vertical. Por outra parte, o ángulo α é o complementario do que se usa para medi-la pendiente, que en notación de cálculo ten por tanxente y'. Con estes datos podemos plantexa-la ecuación desta curva mediante

$$y(1 + y'^2) = \text{cte},$$

ecuación en variables separadas que dá como solución a ecuación da cicloide.

Comentarios finais

Espero que os exemplos escenificados anteriormente aporten algo de luz sobre o papel do razoamento plausible no descubrimento dos feitos matemáticos. ¿Poderiamos respostar á pregunta de cal é o papel do razoaamento plausible no descubrimento dunha solución ou na invención dunha proba?

Para tratarmos de centra-las respostas, comezaremos por poñernos de acordo no que é un problema. Coma sempre, empezamos cun exemplo: No noso ambiente cotián, conseguir alimento non é un problema; se nos dá a fame imos ó frigorífico se estamos na casa, ou imos a unha tenda ou au bar se estamos fora. A cousa é difernte se é pola noite e o frigorífico está valeiro, ou se estando fora nos atopamos sen diñeiro; neste caso o conseguir comida pódese convertir nun problema. En xeral, un desexo pode dar ou non dar orixe a un problema. Se o desexo ven acompañado de algunha acción obvia con posibilidades de alcanza-lo obxeto desexado, non hai problema. Entón, ter un problema quererá dicir: *buscar conscientemente algunha acción apropiada para alcanzar un obxetivo claramente concebido e non inmediato.* A meirande parte dos nosos pensamentos conscientes están relacionados con problemas. Resolver problemas é un logro específico da intelixencia, e a intelixencia é un don específico do home. A habilidade para rodear un obstáculo ou para buscar un camiño indirecto cando non existe un directo é o que diferencia un animal listo dun paspán, a un home do máis listo dos animais, e a un home de talento dos seus conxéneres.

No que antecede estudiamos problemas matemáticos elementais, agrupando problemas accesibles ó mesmo método de solución. Tratamos de adquirir unha certa base experimental que nos permita chegar tan lonxe coma posible, mesmo a problemas non matemáticos.

En segundo lugar, deberiamos distinguir claramente as etapas na resolución dun problema. Acompañaremos cada unha das descripción con preguntas e/ou comentarios para axudarnos a nós mesmos ou a outros a cumpli-las etapas:

Entende-lo problema: ¿Cál é a incógnita? ¿Cáles son os datos? ¿Cál é a condición? ¿É posible satisface-la condición? ¿É suficiente a condición para determina-la incógnita? ¿É insuficiente ou redundante ou contradictoria? Dibuxa unha figura. Introduce notación adecuada. Separa as diferentes partes da condición ¿Pódelas escribir?

Trazar un plan: ¿Xa o viches antes, aínda que fose nunha forma algo diferente? ¿Coñeces un problema relacionado? Fíxate na incógnita e trata de pensar nun problema familiar que teña a mesma ou parecida incógnita. Mira este problema relacionado e xa resolto ¿pódelo usar? ¿podes usa-lo seu método? ¿faría falla introducir algún elemento auxiliar para poder utilizalo?

¿Podes replantexa-lo problema?... aínda doutro xeito mais. Se non és capaz de resolve-lo problema proposto intenta resolver primeiro algún problema relacionado. ¿Podes imaxinar un problema relacionado máis asequible? ¿un problema máis xeral? ¿un problema máis particular? ¿un problema análogo? ¿Podes resolver parte do problema? Mantén parte da condición e esquéncete da outra ¿ata onde queda determinada a incógnita? ¿como varía? ¿Podes derivar algo útil dos datos? ¿Ocórrenseche outros datos útiles para determina-la incógnita? ¿Poderías cambia-los datos e/ou a incógnita por outros máis próximos entre sí? ¿Estás usando tódolos datos? ¿a condición enteira? ¿tiveches en conta as nocións esenciais involucradas no problema?

Levar a cabo o plan: Comproba cada paso ¿Podes ver claramente que o paso é correcto? ¿póde-lo probar?

Revisa-la solución: ¿Podes comproba-lo resultado? ¿Podes comproba-lo razoaamento? ¿Podes consegui-lo resultado doutro xeito diferente? ¿Pódelo ver dun golpe? ¿Podes usa-lo resultado ou o método para outro problema?

A simple lectura das preguntas que facemos para perfilar cada unha das etapas debería abondar para sacarmos en conclusión a importancia do razoaamento plausible no proceso de solución dun problema. Por se poidese axudar a disipar dudas, deixèmos claro que *ter un problema* é algo máis que estar obligado a resolvelo nun examen; se estamos esperando que alguén veña a dárno-la resposta, moito me temo que non temos un problema. Pola contra, se estamos ansiosos por atopa-la resposta polos nosos propios medios, entón o problema foi feito noso. A *atención* vólvese *selectiva*; parece estar máis receptiva ás cousas que parecen relevantes ó problema, e menos para as que non o son. Outro indicador de termos un problema é que somella que vaiamos *rexistrando a marcha do problema*; un anímase cando ésta é rápida, e deprímese se é lenta. O que nos vai chegando á cabeza vai sendo clasificado: "parece bó", "pode valer", mediante xuízos que non son infalibles, nen moito menos.

Cando un busca a solución nunha dirección, ten un sentimento claro de se vai por bó camiño, de se a liña proposta é prometedora ou non. Non é preciso cuantificar en palabras, e cando se fai, é dicir, cando se di "parece bó" non se toma a molestia de analiza-la sua confianza. Moitas veces correndo tras unha pista tropezamos con dificultades, non se progresa demasiado, non se nos ocorre nada novo e comeza a dúbida: "¿Foi un bo punto de partida? ¿é esta a dirección correcta? ¿por qué me parecía bó camiño".

Se nos parece que é así como nós resolvemos problemas, cando queiramos enseñar ós demais teñamos estes pasos presentes, e non presentemos solucións refinadas por estéticas que sexan; tratemos sempre de ofrecer xustificaións heurísticas: tan importante como xustificar rigurosamente que un determinado elemento é necesario para unha proba é convencer á audiencia de que o é. As matemáticas teñen moitos aspectos. Para moitos estudiantes moito me temo que as matemáticas parezan coma un conxunto de reglas ríxidas, algunhas das cales se poden aprender para un examen, e todas se poden esquecer despois. Para algúns profesores as matemáticas son coma un sistema de probas rigurosas que, sen embargo, hai que se abster de presentar na clase, ofrecendo en troques algunha charla non convincente, da que se está algo avergonzado. Para un matemático interesado activamente, poden parecer un xogos de adiviñas: hai que intuír algo antes de probalo, intuí-la proba antes de detallala.

Pode sorprender ó profano que o mátematico é intuitivo. O resultado do traballo creador do matemático é o razoaamento demostrativo, pero as probas descúbrense por razoaamento plausible, é dicir por intuición. Se estamos de acordo nesto, deberiamos facer sitio no ensino da matemáica para a intuición. A educación deberíanos preparar para a invención, ou polo menos para o gusto por ela. Non debemos mata-los xérmolos inventivos dos estudantes. Permitámoslles que conxeturen, e igual que lles enseñamos a distinguir unha proba válida dun intento válido, unha proba dunha intuición, enseñémoslles a distinguir unha intuición máis razoaable doutra menos razoaable. Este é o espírito do seguinte decálogo

	os dez mandamentos do profesor
1	*Estarás interesado pola materia.*
2	*Coñecerá-la materia.*
3	*Infromaraste das vías de aprendizaxe: o mellor método para aprender algo é descubrilo por un mesmo.*
4	*Intentarás le-las caras dos teus alumnos, intentarás ve-las suas expectativas e dificultades, poraste no seu lugar.*
5	*Non lles darás só información, senon que tamén lles darás habilidades, actitudes mentais e hábitos de traballo metódico.*
6	*Permitiraslles que aprendan a conxeturar.*
7	*Permitiraslles que aprendan a demostrar*
8	*Buscarás nos problemas que trates aqueles aspectos que poidan ser útiles para resolver problemas futuros: tratarás de desenmascara-lo patrón xeral que se oculta detrás da situación concreta presente.*
9	*Non revelara-los segredos dunha vez: permitiraslles que o conxecturen antes de llelo dicir; deixarás que descubran por sí mesmos tanto como sexa posible.*
10	*Suxerirás, non imporás.*

Bibliografía

GEORGE POLYA. *How to solve it?*

GEORGE POLYA. *Mathematics and Plausible Reasoning*

GEORGE POLYA. *Mathematical Discovery: on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving.*