FRANCISCO JAVIER MUÑOZ DELGADO

SOBRE EL REINADO Y LA SERVIDUMBRE: EL CASO DE LAS MATEMÁTICAS

Lección Inaugural.
Curso Académico 2000-2001

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Francisco Javier Muñoz Delgado
Catedrático de Matemática Aplicada

SOBRE EL REINADO Y LA SERVIDUMBRE: EL CASO DE LAS MATEMÁTICAS

Universidad de Jaén
Lección Inaugural. Curso Académico 2000-2001

Excmo. y Magnífico Sr. Rector de la Universidad de Jaén,
Excmas. e Ilustrísimas autoridades,
queridos compañeros, estudiantes, amigos,
señoras y señores

Es para mí un gran honor estar hoy aquí para dar la lección inaugural del nuevo curso 2000-2001. Este honor es, si cabe, mayor al ser este año 2000, según declaración de la UNESCO, Año Mundial de las Matemáticas. Sin embargo, no por ello debo dejar de reconocer que por méritos, otros queridos colegas hubieran sido merecedores. En cualquier caso, a los que me han confiado tan noble tarea, gracias, muchas gracias.

Es esta una de esas ocasiones en que se tiene la sensación de estar haciendo algo único en la vida (no creo, por mal que lo haga, que me dejen para el septiembre próximo). Por ello, es normal cuidar al máximo tanto el tema escogido como su presentación.

Sobre las matemáticas prácticamente todo el mundo tiene una idea y una opinión formadas; evidentemente no son las mismas para todos. Las conferencias de matemáticas para un público variado tienen la ventaja de que al ser pocas las expectativas iniciales todo lo que se puede hacer es intentar mejorarlas.

En cualquier otro año que se me hubiese encomendado tan señalado honor, habría tenido la tentación de hablarles de los teoremas de Korovkin, los polinomios de Bernstein o la aproximación conservativa (temas cercanos por cuestiones de *investigación). Pero, este año 2000, no tengo la menor duda, hoy hablaré de Matemáticas, en un sentido amplio, no sólo de aquellas con las que trabajan los que denominamos investigadores en matemáticas sino de esas matemáticas que están en nuestra vida, las que nos rodean y las que han contribuido a que la especie humana haya llegado, en sólo unos cuantos miles de años, al estado actual de desarrollo.*

Quizás la lección que he preparado pueda no parecer ortodoxa. No obstante, la opinión que una gran parte de la sociedad tiene, o parece tener, sobre las matemáticas, la heterogeneidad de la audiencia y el protocolo propio de un acto como este, donde la Universidad abre sus puertas, me llevan a intentar preparar una exposición para todos. Sé que puedo contar con su paciencia, pero que no por ello debo abusar e intentaré mantener su atención hasta el final.

I. NATURALEZA.

1.1 Buscando explicaciones a hechos insólitos.

«Los sacerdotes hicieron sonar las trompetas, y cuando el pueblo, oído el sonido de las trompetas, se puso a gritar clamorosamente, las murallas de la ciudad se derrumbaron...» (*Josué 6:20*). De esta manera se cuenta en la el derrumbe de las murallas de Jericó.

En 1831, una formación de soldados marchaba sobre el puente colgante de Broughton, cerca de Manchester (Inglaterra), cuando éste se derrumbó.

A finales de 1959 y principios de 1960 dos aviones comerciales de un modelo relativamente nuevo de propulsión a chorro se estrellaron. Los accidentes ocurrieron en pleno vuelo, el momento más seguro. Los estudios posteriores comprobaron que las alas de los aviones se partieron. Sin embargo, las alas eran tan fuertes que en los ensayos de laboratorio, ingenieros y pilotos no fueron capaces de romperlas deliberadamente en ninguna situación concebible de vuelo.

El 7 de noviembre de 1940 se derrumbó el puente de Tacoma Narrows sobre el estrecho Puget, en Washington. El puente fue inaugurado unos meses antes, el primero de julio de 1940. Desde el principio era conocido el movimiento ondulatorio vertical que tenía el puente. De hecho, esto provocó un aluvión de curiosos que incluso querían experimentar la sensación de atravesar un puente en movimiento. Los estudios realizados por el profesor F.B. Farquharson de la Universidad de Washington con simulaciones habían concluido que el modelo de puente era estable. De tal forma que, con el paso de los días, las autoridades estaban cada vez más tranquilas, pensando incluso en suspender la póliza de seguros y satisfechas del gran negocio que esta construcción suponía. Así que fue una sorpresa para todos, incluido el profesor de la Universidad de Washington, que después de varias horas de oscilaciones cada vez más violentas (llegando a los 8 metros de subidas y bajadas) el puente se desplomase.

Para intentar comprender estos fenómenos pensemos en un simple columpio de un parque infantil. Subamos a un niño y empecemos a moverlo. Cuando empujamos el columpio, aunque no sea con mucha fuerza, éste empieza a moverse y el niño poco a poco va ganando altura. De esta forma elevamos al niño mucho más de lo que la fuerza empleada podría hacernos pensar. Supongamos que tuviésemos los ojos cerrados y que el ritmo de nuestros impulsos no coincidiese con las oscilaciones del columpio, el resultado no sería el deseado. Cuando empujamos es importante la fuerza, pero lo fundamental para conseguir nuestro objetivo es poner de acuerdo las frecuencias de oscilación del columpio con la de nuestros impulsos.

Estos fenómenos se denominan de resonancia. No siempre tiene efectos destructivos, gracias a la resonancia se pueden sintonizar emisoras de radio. La resonancia podría ser la causa de los desastres antes relatados. Si el paso de los soldados coincidía con la frecuencia natural del puente, las oscilaciones se volverían cada vez mayores y acabarían por derribar el puente. Desde entonces los soldados interrumpen la cadencia del paso al cruzar los puentes.

De la misma forma, se llegó a conocer que los motores de los aviones, a los que hice referencia anteriormente, producían unas vibraciones al volar por encima de una determinada velocidad que llegaban a coincidir en frecuencia con la vibración del ala. El avión parecía que iba a volar «como los pájaros» y las alas se partían. La compañía aérea redujo, inicialmente, la velocidad de vuelo de los aviones y, posteriormente, se revisó la sujeción de los motores.

En cuanto al puente de Tacoma, era el viento el culpable de los remolinos que se producían alrededor de su estructura, nada aerodinámica. Cuando la frecuencia de estos remolinos se acercaba a la frecuencia natural del puente, aparecían los grandes levantamientos de la estructura. Muchos puentes que estaban en proyecto vieron revisados sus diseños al objeto de evitar la catástrofe. Estudios recientes apuntan nuevas causas.

Para algunos estudiosos la caída de las murallas de Jericó pudo deberse a un fenómeno de resonancia.

Los matemáticos (y, por supuesto, los ingenieros, los físicos, etc.) estudian las ecuaciones diferenciales que modelizan estos fenómenos. Además, se estudian diferentes variantes de las ecuaciones y se consideran casos más generales. Quizás algún día los estudios realizados encierren la explicación de otros fenómenos.

En ocasiones resulta más fácil abordar problemas generales que casos concretos. En otras es la curiosidad, el afán por unificar, y sobre todo la ampliación del conocimiento, lo que motiva el estudio de problemas no directamente implicados en las aplicaciones.

I.2. Paradojas de la naturaleza.

El biólogo italiano Umberto D'Ancona estudió las capturas de selacios (tiburones, mantarayas, etc.) en el Mediterráneo durante los años de la primera guerra muncial.

En el puerto de Fiume (Italia) las capturas de estas especies fue la siguiente:

La sorpresa era el aumento en las capturas de estas especies. La primera explicación fue que en los años de la guerra la intensidad de la

1914	1915	1916	1917	1918
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%
1919	1920	1921	1922	1923
27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

pesca se redujo notablemente. Sin embargo, la pregunta siguiente era obligada: ¿por qué al pescar menos aumenta el porcentaje de selacios? La pregunta tenía interés biológico, pero también económico al estar en juego el futuro de la industria pesquera.

La diferencia entre los selacios y el resto de peces era que mientras aqueéllos eran depredadores éstos eran sus presas. Se pensó que al disminuir la pesca aumentaron las presas y esto hizo que los depredadores creciesen. Pero, por qué disminuyó el porcentaje de las presas. Por qué un nivel bajo de pesca beneficia más a los depredadores que a las presas.

D'Ancona pasó su problema al matemático Vito Volterra. Este hizo el siguiente análisis: Sea $x(t)$ la población de presas e $y(t)$ la de depredadores. Si no hubiese depredadores las presas crecerían proporcionalmente a su población. De igual forma, en caso de no haber presas los depredadores se irían reduciendo proporcionalmente a su población. Los contactos entre presas y depredadores harían aumentar los depredadores y disminuir las presas. Así escribió

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t)$$

$$y'(t) = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t)$$

Estudiando el sistema de ecuaciones diferenciales observó que el valor medio de las soluciones para $x(t)$ era c/d mientras que para $y(t)$ era a/b. Al introducir la pesca, el sistema se transforma en

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) - e\,x(t) = (a-e)\,x(t) - b\,x(t)\,y(t)$$

$$y'(t) = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t) - e\,y(t) = -(c+e)\,y(t) + d\,x(t)\,y(t).$$

Ahora los valores medios serían (c+e)/d para las presas y (a-e)/b para los depredadores. Es decir, el modelo matemático prevé un aumento en los peces comestibles como consecuencia de la pesca y un descenso de los selacios.

Este resultado sorprendente tiene aplicaciones interesantes para los tratamientos con insecticidas donde mueren tanto el depredador como su presa.

En 1868 se introduce accidentalmente en Estados Unidos el pulgón de los cítricos (Icerya purchasi) procedente de Australia. Este hecho puso en riesgo el futuro de la industria de cítricos. Se intentó combatir con la introducción del depredador natural del pulgón, la mariquita (Novius Cardinalis). Así, se redujo el nivel de pulgones. Al descubrirse que el DDT mataba a los pulgones se aplicó con el objetivo de reducir aún más su población. El resultado fue: ¡un aumento de los pulgones!, pues el DDT también mataba a las mariquitas.

Aunque el modelo de Lotka-Volterra tiene sus deficiencias se pueden considerar distintas modificaciones para adaptarse a situaciones más generales. Se podrían estudiar modelos en los que se considerase la competencia por el alimento entre los individuos de la misma especie, o se puede considerar situaciones en las que las presas tengan refugios, o depredadores que se adapten a un número escaso de presas. Existen modelos también con un mayor número de especies y donde alguna es depredador y presa a la vez.

II. EL NÚMERO.

II.1. Numerología, Biblia y religión.

La curiosidad matemática y el ánimo de ordenar no tienen límites. Les contaré una anécdota debida a H. S. M. Coxeter y que relatan Alsina y Guzmán.

Puede leerse en el *Antiguo Testamento*: «Matusalén vivió ciento ochenta y siente años, y engendró a Lamec, ... los días de Matusalén fueron novecientos sesenta y nueve años. ... Lamec, a los ciento ochenta y dos años de su vida, engendró un hijo: al cual llamó Noé...» (*Génesis* 5, 25)

Más adelante, se lee: «A los seiscientos años de la vida de Noé ... se abrieron las cataratas del cielo.» (*Génesis* 7, 11)

Coxeter no pudo evitar la tentación matemática de poner orden.

1) Nacimiento de Matusalén

2) A los 187 años: Nacimiento de Lamec

3) A los 187 + 182 años=369 años: Nacimiento de Noé

4) A los 369 + 600 años = 969 años: El Diluvio

Coxeter observó: ¡Matusalén murió el año del Diluvio!, y se preguntó: ¿fue su muerte natural o se le olvidó a Noé meter al abuelo en el Arca?

La *Biblia* es para algunos un tratado de teoría de números. El Primer *Libro de los Reyes* encierra una de las primeras aproximaciones del número π. Se habla del templo construido por Salomón en Jerusalén entre el 1014 y el 1007 a.C. El rey Salomón construyó una gran pila de bronce, circular, de 10 codos de borde a borde, y, se afirma en el *Libro de los Reyes,* que una cuerda de 30 codos la rodeaba por completo. Según esto la razón entre el perímetro y el diámetro de la circunferencia sería 3. En realidad, la cuerda debía tener algo más de 31 codos.

Otro de los muchos ejemplos sobre números en la *Biblia* es el siguiente. El número 153 es el número de peces que el apóstol Simón Pedro halló en la red, según el *Evangelio de San Juan* 23, 11. Este número no es nada común. Por ejemplo, es igual a la suma de sus cifras al cubo, $153=1^3+5^3+3^3$, siendo el único número múltiplo de tres con esta propiedad. Además, es un número triangular, $153=1+2+3+4+...+17$.

Las matemáticas han estado relacionadas con la religión, en diferentes formas, desde sus orígenes y, aunque San Agustín prevenía de los matemáticos y de aquellos que hacen profecías porque "existe el peligro de que estén vinculados con el Diablo y por ello turben el espíritu y hundan a los hombres en el infierno" (*De Genesi ad Litteram,* 2, XVII, 37), han existido colaboraciones fructíferas.

Para algunos, la necesidad de contar originó el desarrollo de los números. Para otros, antes que los cardinales fueron los ordinales, motivado por ceremonias religiosas y el orden de aparición. La asociación de los impares a los varones y los pares a las mujeres estaría en esta línea.

El historiador Heródoto dice que la necesidad de volver a trazar los límites de los campos después del desbordamiento anual del Nilo acentuó la necesidad de los agrimensores, geómetras o tensadores de cuerda. Aristóteles, por su parte, pensaba que la geometría había surgido en el valle del Nilo debido a que allí los sacerdotes tenían el tiempo y ocio necesarios para desarrollar cualquier conocimiento teórico. En cualquier caso la necesidad de «tensar la cuerda» estaba tanto en los campos de cultivo como en el trazado de los templos.

En la India los resultados geométricos más antiguos son unas «reglas de cuerda», para el trazado de altares y templos utilizando cuerdas y palillos de bambú. Las matemáticas gozaban allí de alta consideración desde tiempos remotos. El culto por los números y el budismo entraron en estrecha relación. Se cuenta que Buda recibió desde joven preparación en matemáticas y que en su petición de mano, Buda tuvo que someterse a un examen de matemáticas y resolver el problema de obtener los átomos de una milla (el resultado que dio fue 384•7 [13]).

En el siglo III se decía en la India «El cálculo es útil en todo tipo de trabajos que tienen relación con las cosas del mundo y del culto u otras cuestiones religiosas semejantes»

Sobre el año 429 a.C. la peste hacía estragos en Atenas, muriendo quizás la cuarta parte de la población. Una delegación fue enviada al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo podía conjurarse la peste. Éste respondió que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Los atenienses rápidamente duplicaron las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste. El altar, en realidad, había aumentado ocho veces. Así surge, según la leyenda, el problema de la duplicación del cubo, uno de los tres problemas clásicos y que han ocupado a los matemáticos durante siglos, y, que si bien no tuvieron solución sí que contribuyeron al desarrollo de las matemáticas.

Otra versión de este problema dice que el rey Minos de Creta mandó construir una tumba de forma cúbica para su hijo Glauco. Al verla acabada, le pareció pequeña y ordenó su duplicación.

La determinación de las fiestas móviles de la Iglesia impulsó, igualmente, los cálculos astronómicos.

Finalmente, por citar un ejemplo cercano, nuestro paisano el Bachiller Pérez de Moya unió a su condición de sacerdote un gran amor a las matemáticas y a su enseñanza.

II.2. Los números de Fibonacci y las piñas.

Leonardo de Pisa (1180-1250), más conocido por Fibonacci, era hijo de un comerciante y viajó por el norte de África, estudió con un maestro musulmán y conoció las cifras. Escribió el libro *Liber abaci*, o *Libro del ábaco* donde dio a conocer al mundo occidental las cifras hindú-arábigas y recomienda fervientemente su uso.

La introducción de las cifras, que hoy usamos, chocó con dificultades y durante años hubo competiciones entre algoristas y abacistas. El ábaco podía ser utilizado por personas que no tuvieran mucha formación en leer y escribir, no necesitaba papel (caro y escaso), había mesas de cálculo, etc., además, había profesionales del cálculo que temían perder su trabajo y los libros de contabilidad eran también más fáciles de falsificar con las nuevas cifras. La Iglesia las rechazó por provenir de un ambiente cultural no cristiano, calificándolas de paganas y de obra del diablo (al parecer, fueron prohibidas en Florencia en 1299).

El libro de Fibonacci parece ser de lectura árida y aburrida, pero encierra un problema que ha inspirado numerosos trabajos. El problema es el siguiente: «¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?»

Este problema da lugar a la llamada sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... donde cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Esta sucesión ha recibido gran atención y son muchas las propiedades que se han encontrado. Desde cuestiones más matemáticas como que dos números consecutivos son primos relativos, hasta otras más «poéticas» como que la sucesión formada por los cocientes entre un término y el siguiente tienden a la sección áurea, hasta otras aplicaciones en filotaxia y crecimiento de seres vivos.

El número de espirales en la piña de un pino (que podrían ser, 8 a la derecha y 13 a la izquierda), en un girasol (55 en una dirección y 89 en la otra), y en las piñas que encontramos en el mercado (8 a la derecha, 13 hacia la izquierda y 21 verticales) son todos ellos números de la sucesión de Fibonacci.

III. LA FORMA.

III.1. La semejanza de triángulos y la construcción de túneles.

El historiador Heródoto cuenta la hazaña de la construcción de un túnel en la isla de Samos para trasladar el agua a la capital a través del monte Castro. En 1882 los arqueólogos descubrieron el túnel como lo había descrito Heródoto. Tenía 1 kilómetro de longitud. Los equipos de excavación que comenzaron a cada uno de los lados se encontraron en el centro con un error de menos de 10 metros horizontalmente y 3 verticalmente (un recodo en el centro del túnel pone esto de manifiesto).

La pregunta que puede hacerse es cómo fueron capaces de realizar los trabajos con tal precisión. Herón describió un posible método basado en la semejanza de triángulos.

Peor suerte tuvo el rey Hezequías de Judea cuando mandó construir un acueducto similar a través de las rocas cercanas a Jerusalén, alrededor del año 700 a.C. La dirección de la excavación era comprobada de una forma bastante primitiva (ejes verticales clavados en la superficie) y el resultado fue un túnel en zigzag, con el doble de distancia de la que había entre sus extremos.

Pocos años después, hacia el 600 a. C., se cuenta que Tales de Mileto se encontraba en Egipto. Allí, un enviado del faraón le pidió en su nombre que calculara la altura de la pirámide de Keops. Corría la voz de que el sabio era capaz de medir la altura de construcciones elevadas por arte geométrica, sin subir a ellas. Tales tomó un bastón y esperó hasta media mañana a que la sombra del bastón en posición vertical fuese de igual longitud que el bastón. Entonces le dijo al enviado: ¡ corre y mide la sombra de la pirámide, en este momento es tan larga como la misma pirámide! (Teniendo en cuenta la mitad de la base). Así, fue como Tales se convirtió en el hombre de la sombra.

III.2. ¿Hubiese Colón descubierto América de saber el tamaño real de la Tierra?

Ante esta pregunta es lógico cuestionarse: ¿Cómo se puede calcular, con las herramientas de hace siglos, el tamaño de la Tierra?

La Geografía de Ptolomeo de Alejandría (s.II) introduce el sistema de longitudes y latitudes. Ptolomeo consideró la cifra de 180.000 estadios propuesta por Posidonio, un estoico maestro de Pompeyo y de Cicerón. De esta forma, el mundo euroasiático conocido representaría más de 180 grados en longitud, en lugar de los 130 reales, y el viaje hacia las Indias, navegando siempre hacia el Oeste, sería mucho más corto. Durante siglos esta obra fue la referencia y, también, influiría sobre Colón.

Varios siglos antes de Ptolomeo se realizó una de las mediciones más precisas de la época. En la ciudad de Siena (cerca de la actual Asuan) existía un pozo muy profundo, que se iluminaba hasta el fondo el día del solsticio de verano a mediodía. Mientras, en la ciudad de Alejandría en el mismo momento se podía medir un ángulo entre los rayos del sol y la vertical de 1/50 de la circunferencia. Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) estimando que Alejandría estaba a 5.000 estadios al norte de Siena, concluye que la circunferencia terrestre pasando por los polos mediría 250.000 estadios. La longitud del estadio no está muy clara, según distintas fuentes estaría entre 157.5 y 185 metros con lo que el meridiano tendría entre 39.000 y 46.000 kilómetros. El valor exacto está cercano a los 40.000 kilómetros.

Con ayuda de la trigonometría pudieron estimar el tamaño y las distancia al sol y la luna. Por ejemplo, en el momento en que se ve justo la mitad del círculo lunar, el sol, la luna y la tierra forman un ángulo recto. La medida del ángulo formado por la luna, la tierra y el sol proporciona la razón entre la distancia al sol y a la luna.

El tiempo de duración de los eclipses totales de luna fue también utilizado para determinar junto a los otros cálculos las distancias al sol y la luna.

Estas ingeniosas ideas se deben a Aristarco (260 a.C.) y aparecen en su obra *"Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna"*.

III.3. Simetrías y arqueología.

Antes de que el hombre pudiese escribir ya realizaba dibujos y diseños (en el neolítico ya aparecen). Desde el punto de vista matemático esto pudo preparar el camino a la geometría. Sin embargo, también pueden tener su interés en arqueología.

A pesar de que algunos individuos producen diseños aleatorios, la mayor parte de las decoraciones se basan en simetrías. Durante años las descripciones de los diseños en tejidos, cerámicas, ornamentación de edificios, etc., se limitaban a los materiales y a los motivos, perdiéndose la parte de información que representa el estudio de las simetrías matemáticas. Los diseños pueden utilizarse como indicadores de la historia de la cultura y de los cambios culturales.

En las franjas de los diseños, tejidos, cerámicas, etc., se pueden utilizar hasta 7 tipos de simetrías. Cada pueblo utiliza su propia selección de simetrías. De alguna manera, esto puede utilizarse para caracterizar el pueblo y estudiar sus cambios.

Un ejemplo ilustrativo es el siguiente. Knosos (Creta) tenía 3.000 años de prehistoria. Durante 1.500 años sólo utilizaron dos tipos de simetrías. De repente utilizaron los otros cinco tipos, aunque siguiendo sus mismos motivos. El hecho que explicaría este cambio es el inicio del comercio en el Egeo y la introducción de diseños simétricos procedentes de otros lugares.

Si consideramos el plano, nos encontramos que existen 17 grupos de simetrías y la Alhambra es un magnífico escenario para contemplarlos todos.

III.4. ¿Está el mundo proporcionado?

Los pitagóricos de los primeros tiempos conocían el cubo, el tetraedro y el dodecaedro, y quizás los otros dos poliedros regulares, el octaedro y el icosaedro. El conocimiento del dodecaedro en la antigüedad pudo deberse a que la pirita cristaliza como dodecaedro. Las caras del dodecaedro son pentágonos. Las diagonales del pentágono se cortan entre sí de forma muy interesante. La razón entre la diagonal completa y el mayor de los segmentos es igual a la del mayor segmento con el menor.

Quizás por ello el símbolo de los pitagóricos fue el pentagrama, formado por las diagonales del pentágono. En terminología posterior diríamos que los lados de la estrella de cinco puntas formada en el pentágono se cortan según la sección áurea.

En la Grecia Clásica, los consejos de Vitrubio (s. I a. C.) para la arquitectura decían de no descuidar la semejanza en la composición de las distintas partes, ni la de éstas con el todo. De igual forma, en pintura y escultura fue bastante utilizada esta proporcionalidad.

En el arte del Renacimiento se retoman los ideales clásicos de belleza y edificios, esculturas, estatuas y cuadros debían ser compuestos según reglas canónicas, volviendo las secciones áureas a desempeñar un papel destacado. Se introduce también la perspectiva y se descubren elementos como el punto y la recta del infinito. Aunque hubo otros precedentes, el máximo esplendor se consiguió con Leonardo da Vinci en Italia y Durero en Alemania. Aparece también un libro de Luca Pacioli titulado *Divina proporción* que trata sobre la sección áurea y que ilustra Leonardo Da Vinci.

Durero escribió un libro de texto específico para artistas, artesanos e ingenieros sobre la perspectiva titulado *Enseñanza de la medida con regla y compás*. Escribió también un manual sobre fortificaciones y otro sobre la proporción en la representación artística del cuerpo humano. El origen de la geometría proyectiva, se vio, a su vez, impulsado por los problemas de la perspectiva.

Le Corbusier utilizó la razón áurea. El ombligo dividiría la altura en sección áurea y así lo utiliza en su *Modulor*. De igual forma era el hombre ideal de Leonardo Da Vinci, en la versión de Neufert.

El cuadro de la *Última Cena* de Salvador Dalí está presidido por un dodecaedro y sus dimensiones están según la razón áurea.

En la naturaleza también nos encontramos con ejemplos. Así, la espiral del nautilus es una espiral logarítmica que genera rectángulos áureos.

Si bien la más conocida de las proporciones sea la áurea, podemos buscar otras. Consideremos los polígonos de número par de lados, como son el cuadrado, el hexágono, el octógono y el decágono. Si consideramos la longitud de sus lados y el radio de la circunferencia en la que están inscritos nos encontramos con ciertas proporciones destacables.

Comencemos con el cuadrado, su lado es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita y el cociente es la raíz cuadrada de dos. ¿Qué les parece esta proporción? ¿La han visto alguna vez?

La raíz de dos tiene una notable propiedad: su inverso es igual a su mitad. Esto podría parecer poco importante, pero es el fundamento de las dimensiones que tiene el papel que usamos. Cada vez que tomamos un papel tamaño A4 estamos ante un rectángulo de razón la raíz cuadrada de dos y cuando lo cortamos por la mitad, según el lado mayor, las dos mitades tienen la misma proporción. Así, podemos ampliar y reducir en la fotocopiadora pasando de A4 a A3 o de A4 a A5 sin cambiar las proporciones.

Si pasamos al hexágono nos encontramos con que el lado y el radio son iguales. Nos encontramos con el número 1 como razón y los rectángulos así obtenidos son los cuadrados.

En el decágono, la razón entre el radio y el lado es el número de oro. Los rectángulos así construidos han sido muy estudiados, como antes indiqué. En la tipografía de los libros también se ha tenido en cuenta la proporción áurea.

Nos queda por comentar el caso del octógono. En este punto hay que citar los trabajos e investigaciones del arquitecto cordobés Rafael de la Hoz. Éste no encontró en Córdoba la proporción áurea, ni obtuvo el rectángulo áureo como el más bello cuando realizó estudios entre la población cordobesa.

Un test de la Universidad de Yale sobre actitud artística pedía a los examinados trazar el rectángulo ideal. La pregunta era calificada según el parecido al rectángulo áureo. Por el contrario, el rectángulo que aparecía en Córdoba, tanto en las encuestas como en las obras arquitectónicas, resultaba ser más achatado y de proporciones cercanas al 1.3.

Como habrán podido suponer la razón que aparece en el octógono, 1.306... , es la que el arquitecto Rafael de la Hoz encontró. Aunque en un principio pensó que podía deberse a una característica local, estudios posteriores han encontrado estas proporciones y el ángulo del rectángulo así construido, en multitud de edificios incluyendo las pirámides de Egipto y la pirámide de la Luna en Teotihuacan.

Incluso un estudio del filósofo alemán Gustavo-Teodoro Fechner, de 1876, intentando demostrar la belleza absoluta de la proporción áurea, encontró que las dimensiones medias de los cuadros más relevantes de las más destacadas pinacotecas europeas arrojaba una proporción media de 1.3, lejos del 1.618 que esperaba encontrar.

Finalmente, como indicaba Rafael de la Hoz quizás la sección áurea sea el ideal de belleza, pero para ello los griegos tuvieron que ponerle coturnos o tacones a su Afrodita, mientras que la belleza humana, tal vez, esté más cerca de la proporción cordobesa.

III.5. La importancia de las formas.

Las formas de distintos elementos geométricos han sido examinadas al objeto de estudiar sus propiedades y utilizarlas en la técnica.

Un círculo, por ser de anchura constante es indicado para el diseño de tapas de alcantarillas, ya que así no se caerán dentro. De igual forma la esfera es adecuada para los dispositivos de *roll on* utilizados para la fabricación de bolígrafos y desodorantes. En cambio, las formas circulares pueden presentar problemas cuando se trata de almacenar. Las formas cuadradas o rectangulares son ahora más indicadas.

Veamos algunas otras formas y sus utilidades.

La parábola tiene la propiedad de que los rayos paralelos a su eje serían reflejados a un sólo punto llamado foco. Ésta y otras propiedades de las cónicas fueron estudiadas por Apolonio en el s. III a.C. . Constituye éste un destacado ejemplo de estudio matemático que encontró su utilidad bastantes siglos después.

Arquímedes, cuando los romanos intentaron tomar Siracusa, construyó unos espejos (espejos ustorios), que concentraban los rayos solares sobre las naves y las quemaban.

Los antiguos empleaban un vaso cóncavo de oro pulido para avivar, por reflexión de los rayos solares, el fuego sagrado de Vesta.

Los faros de coches están construidos de forma parabólica; para las luces largas la luz se coloca en el foco y para las cortas se desplaza un poco al objeto de que la luz salga más hacia abajo y a la derecha. Las antenas parabólicas utilizadas para recibir señales de televisión concentran la débil señal que reciben en un solo punto, el foco. Las lámparas diseñadas como trozos de cilindros parabólicos pueden enviar la luz en una dirección determinada. Igualmente podemos encontrar radares, radiotelescopios o cocinas solares utilizando esta propiedad.

La artillería de los siglos XIV y XV planteó cuestiones de balística. Sólo hasta el siglo XVII Galileo y Cavalieri se percatarían de que era parabólica. Inicialmente se consideraba compuesta de trozos de rectas y de circunferencias.

Las trayectorias de balas, del agua de una manguera de riego, de una pelota de fútbol o de béisbol, en condiciones ideales siguen trayectorias parabólicas.

Las elipses tienen una propiedad distinta: los rayos emitidos desde uno de sus dos focos irán al otro tras reflejarse en ella. Esta propiedad es interesante para el diseño de lámparas para dentistas, donde la luz debería concentrarse en la boca del paciente sin molestar sus ojos, por ello la luz se emite desde un foco, se refleja en un trozo de elipse que hace de espejo y se concentran en la boca del paciente. Existen salas, llamadas galerías de murmullos, cuyo techo tiene forma de elipsoide y donde todo el sonido emitido en un determinado punto (el foco) se reflejaría en otro.

Esto es también de interés en la técnica de la litotricia para romper cálculos de riñón. El cálculo se coloca en un foco y desde el otro se emiten descargas de alta energía que tras rebotar en las paredes de la bañera, de forma elíptica, se concentran en el cálculo.

La hipérbola es la curva formada por los puntos cuya diferencia de distancias a dos fijados, llamados focos, es fija. Esta propiedad se ha utilizado en navegación. Si desde diversos puntos se emiten señales la diferencia de tiempo entre ellas sitúa al barco en ciertas hipérbolas y permite localizar al barco.

El hiperboloide de una hoja se utiliza en construcción y en elementos mecánicos, como engranajes o transmisiones.

Para finalizar pongamos un ejemplo no hecho por el hombre. Pappus demostró que de entre los polígonos regulares de igual perímetro tiene mayor área el que tenga mayor número de lados y, sacó la conclusión de que las abejas demostraban tener alguna forma de inteligencia matemática al construir sus celdillas en forma de prisma hexagonal y no triangular ni cuadrado, ahorrando así materiales y esfuerzo.

III.6. Se hace camino al andar.

La ciudad de Königsberg, actual Kaliningrad, está atravesada por un río. Existen dos islotes comunicados por puentes con las orillas y entre si. En total eran 7 los puentes existentes, dos comunicaban un islote con cada orilla, otro unía los dos islotes y, finalmente, cuatro puentes unían el segundo islote con las orillas (dos con cada una). En el siglo XVIII, y quizás antes y después, era un pasatiempo popular realizar un paseo por los puentes intentando pasar por todos ellos una sola vez. Euler analizó este entretenimiento local desde un punto de vista matemático y supuso el comienzo de una teoría. Los grafos y los circuitos han recibido gran atención y tienen numerosas aplicaciones.

En ocasiones se trata de recorrer todas las aristas (uniones entre puntos), otras pasar por todos los vértices (o puntos), en ocasiones se intenta comenzar y finalizar en el mismo punto, a veces se puede pasar dos veces por el mismo sitio y a veces no, en ocasiones algunas aristas se pueden recorrer sólo en una dirección.

La sucursal Beersheba de la principal compañía eléctrica de Israel quería hacer más eficaz la lectura de contadores y con ello reducir las personas dedicadas a ello. Previamente, la ruta de cada persona se había calculado por ensayo y error, usando simple intuición. Se necesitaban 24 personas cada una con turno de cinco horas. Se decidió hacer un estudio matemático del problema. Se buscaron recorridos que no tuvieran que estar enlazados, se permitió a cada operario volver directamente a su casa después de terminada la ruta. Se llegó a cubrir el barrio con 15 rutas de cinco horas, lo que supuso un ahorro de un 40%. Los caminos que se repetían suponían menos del 1%.

Las compañías aéreas para planificar los recorridos de sus aviones, las compañías de transporte para organizar sus recorridos, las compañías telefónicas para organizar las llamadas, las compañías del gas o la electricidad para realizar las lecturas de contadores, las compañías telefónicas o las que regulan los aparcamientos para recoger las recaudaciones de cabinas o parquímetros, las máquinas de limpieza de calles en las ciudades, la recogida de basura, la recogida de los buzones de correos, el reparto de publicidad por las casas, la recogida de viajeros en los hoteles, en la industria la colocación de tornillos, la realización de soldaduras o agujeros manualmente o con robots, etc., son algunos ejemplos de este tipo de problemas. Para ellos hay que desarrollar algoritmos eficaces que resuelvan problemas cada vez más complejos.

En los años 70 se hizo un estudio en la ciudad de Nueva York para aplicar estas técnicas a las máquinas de limpieza en un sólo distrito concluyendo que se podrían ahorrar unos 30.000 dólares anuales y en toda la ciudad más de 1.5 millones de dólares al año.

La propuesta no se aceptó en un primer momento. Los líderes sindicales intentaban proteger los empleos de los trabajadores, los administradores no querían ver reducido los presupuestos que gestionaban y los políticos no querían ser acusados de eliminar los trabajos de sus electores.

Como ven, los problemas no siempre pueden reducirse a cuestiones matemáticas.

IV. SOCIEDAD.

IV.1. De la toma de decisiones en el Senado Romano a la elección del Papa de Roma.

Hace casi dos mil años el escritor Plinio el Joven (61 ó 62, 114 d.C.) relataba la polémica surgida en el Senado Romano referente a la muerte del Cónsul Afranius Dexter. Al parecer su muerte se había producido en extrañas circunstancias. Presuntamente los libertos del cónsul estaban implicados, aunque no estaba claro si habían intervenido a propuesta de Dexter (eutanasia) o si había sido un asesinato. En caso de resultar inocentes debían ser puestos en libertad. De haber actuado a propuesta del cónsul el castigo debía ser el exilio y finalmente si lo asesinaron debían ser condenados a muerte. El Senado estaba dividido en tres grupos cuyas posturas parecían irreconciliables. No había más solución que pasar por una votación. Pero, ¿cómo votar?

Supongamos que los tres grupos tenían los siguientes tamaños: Suicidio-Libertad 40%, Eutanasia-Exilio 35%, Asesinato-Muerte 25%. Utilizando el método de la mayoría relativa ganaría la tesis del suicidio y los libertos serían puestos en libertad.

Si se conociesen, previamente a la votación, los tamaños de los grupos, posiblemente algunos estarían tentados a cambiar su voto, emitiendo un voto estratégico. Así, los partidarios de la pena de muerte podrían votar el exilio. De esta manera los libertos recibirían algún castigo.

Otra forma de decidir sería la votación secuencial. Se podría optar por votar, en primer lugar si los libertos estaban de alguna forma implicados y , a continuación, la pena. En este caso ganarían los que opinaban que estaban implicados. En la segunda votación los partidarios de la libertad podrían votar el exilio, ganando esta opción.

Supongamos que se decidiese en primer lugar la pena y después si estaban implicados. Ahora podría ocurrir que algunos de los que opinaban que no estaban implicados votasen que, en el caso de estar implicados la pena debía ser la muerte. En esta situación, podría incluso ganar la opción de la pena de muerte y, posteriormente, los libertos podrían ser declarados implicados en los hechos.

Plinio exclamó: el destino de los libertos depende bastante de un juego.

Se podría también plantear la votación dando a elegir entre cada pareja de opciones. La segunda opción podría ganar a cualquiera de las otras dos, ya que cuando se enfrentase con la alternativa de la pena de muerte, además de sus partidarios estarían los partidarios de dejarlos en libertad y se sumarían los partidarios de la pena de muerte cuando se enfrentase a la opción de dejarlos en libertad. Esta opción sería, entonces, un vencedor de Condorcet. Sin embargo, los partidarios de la primera podrían hacerla fracasar votando junto a los adeptos a la pena de muerte. Por tanto, podría suceder que ninguna opción ganase a las otras.

Otra posibilidad consiste en un voto preferencial donde cada elector ordena las diferentes alternativas según sus preferencias y cada una de ellas recibe unos puntos según el orden. La elección se resuelve tras sumar los puntos obtenidos por cada opción. Esta sería la idea del método propuesto por Borda.

En la toma de decisiones y la elección de una persona el proceso es similar, hay que seleccionar una entre varias opciones.

Quizás una de las más antiguas es la elección del Papa de Roma. Durante siglos para la elección de Papa se requería los dos tercios del colegio cardenalicio. Esto no resultaba fácil y, en ocasiones, las votaciones se sucedían sin que ninguno de los propuestos alcanzase la mayoría requerida. En la elección de Gregorio X se tardó 33 meses. En el II Concilio de Lyon en 1274 se decidió que la reunión de los cardenales se realizase a los diez días del fallecimiento del Papa, debiendo estar recluidos (de ahí el término «cónclave») e imponiendo ¡una progresiva reducción de las comidas!

Durante siglos la mayoría de los dos tercios se utilizó en diferentes ámbitos. A pesar de que el candidato elegido o el acuerdo adoptado con este método tienen un amplio respaldo, el hecho de que el proceso de elección podía retrasarse indefinidamente hizo que se utilizasen otros, si no tan fiables, al menos más inmediatos. La mayoría relativa era quizás el más sencillo. No obstante, durante la historia destacados personajes han rebatido este método cuando hay más de 2 candidatos o alternativas.

El problema continúa abierto. Recientemente uno de los principales partidos políticos de España ha elegido su líder entre cuatro candidatos. Hasta pocos días antes se mantenía abierta la polémica sobre el sistema de elección. Cabe preguntarse también qué hubiese ocurrido de no existir encuestas previas, reales o interesadas, que pudieron hacer cambiar la intención de voto de algunos electores, optando en lugar de por su primera preferencia por un voto estratégico.

Tras siglos de votaciones los matemáticos han buscado el sistema perfecto. El economista Kenneth Arrow, Premio Nobel de 1972, demostró que bajo ciertas condiciones, bastante razonables, no existía ningún método de elección. Aunque el resultado de Arrow cierra el camino a la perfección, como él mismo indicaba, no por ello debemos de dejar de buscar métodos cada vez mejores.

IV.2. La composición del Congreso de los Estados Unidos.

El Congreso de los Estados Unidos, desde sus comienzos, ha sido una fuente de sistemas de reparto. La Constitución imponía que el número de escaños, correspondientes a cada estado debía estar en función de su población.

Una de las primeras ideas fue la de calcular las proporciones exactas y redondear hacia arriba las partes decimales mayores hasta completar el número de escaños a repartir. Esta fue la propuesta de Alexander Hamilton, ayudante de campo y secretario de George Washington y uno de los redactores de la Constitución de los Estados Unidos.

Este método provocó en 1792 el primer veto presidencial en la historia de los Estados Unidos. George Washington argumentaba que nada demostraba la proporcionalidad del método. Obsérvese que 1.1 es más de cinco veces mayor que 0.2 y, sin embargo, este puede redondearse a 1 antes que el primero a 2.

George Washington recurrió a Thomas Jefferson para buscar un método alternativo. Éste, natural de Virginia (el estado más grande en 1790), propuso fijar una cantidad, aproximadamente el número de habitantes por cada escaño, y asignar a cada estado tantos escaños como veces tiene esa cantidad de población despreciando los restos. Este método beneficia a los estados grandes. Fue posteriormente introducido por D'Hondt.

John Quincy Adams propuso redondear todos los cocientes del método de Jefferson hacia arriba. Este método, que no llegó a ponerse en práctica, beneficiaría a los Estados menos poblados.

Daniel Webster propuso redondear hacia arriba si la parte decimal del cociente era mayor que 0.5. En Europa se conoce como método de St.Laguë.

Durante los dos últimos siglos se han sucedido unos y otros métodos. Desde 1910 se adoptó el método de Webster. En 1920 surgió el método de Hill-Huntington. Durante años los dos métodos dieron el mismo reparto. Sin embargo en 1940 la diferencia en un escaño entre las asignaciones de los métodos hizo que el partido mayoritario fijase por ley el de Hill-Huntington que en aquel momento era el que más le beneficiaba.

El debate, aunque viciado por intereses políticos, obligó al estudio matemático de los métodos tanto en las Instituciones políticas como en los Tribunales. Surgieron situaciones como la paradoja de Alabama.

Según el censo de 1880 y utilizando el método de los restos mayores, o de Hamilton, al estado de Alabama le corresponderían 8 representantes si el Congreso tenía 299 puestos y, sólo 7 si tenía 300 (Texas e Illinois ganaban 1). ¿Cómo era posible que al aumentar el número de escaños a repartir, alguno recibiese menos?

IV.3. Las listas abiertas en el Senado español.

De igual forma es necesario continuar trabajando sobre los sistemas de listas abiertas, que pueden suponer un avance democrático si se introducen buenos métodos. En España se utiliza un sistema de listas abiertas para la elección del Senado. La mayoría de las provincias eligen a cuatro senadores, teniendo los partidos políticos limitada la presentación de candidatos a tres. Los electores pueden elegir libremente entre todos los candidatos presentados hasta un máximo de tres. Pues bien, en las elecciones del año 2000, en cada provincia, el partido que obtuvo mayor número de votos al Congreso obtuvo tres senadores y el segundo partido en votos para el Congreso consiguió un senador, precisamente el primero de la lista de su partido (que se colocan en orden alfabético).

Si se critica al método de D'Hondt utilizado para el Congreso por penalizar a algunas formaciones políticas, cuánto más no son penalizadas en el Senado. Además, el hecho de imponer el orden alfabético obliga a algunas formaciones políticas a hacer juegos malabares con sus candidatos para dejar en primer lugar alfabético a su candidato principal.

¿Habría durado mucho tiempo un sistema electoral como éste si la importancia del Senado fuera mayor?

Pues este sistema, en que cada elector puede votar hasta las tres cuartas partes (o 75%) de los puestos a cubrir, es el elegido por muchas universidades. Teniendo en cuenta que al no estar los candidatos oficialmente ligados a grupos no existe la restricción, respecto de número de candidatos, que sí tienen los partidos en el Senado, el sistema es aún más injusto. Ha llegado a darse el caso de que todos los puestos a cubrir lo han sido por miembros de un sólo grupo o tendencia, aunque representaban a un porcentaje bastante reducido del electorado.

La Universidad de Jaén, con el sistema adoptado por su Claustro para la elección de órganos, sienta un precedente, que será más o menos exitoso, pero que no es más que un intento de buscar un sistema mejor.

IV.4. Medida y reparto del poder.

En las empresas es usual que los accionistas voten con un peso dado por su número de acciones. Así, si un accionista tiene el 51% de las acciones podría aprobar cualquier medida sin consultar con otros. De hecho no tiene el 51% del poder, ¡tiene todo el poder! En cambio el 49% restante no tiene ningún poder.

Si en otra empresa las acciones están repartidas como 49%, 49%, 2%, es necesario que dos de ellos se pongan de acuerdo para adoptar medidas y el accionista que tiene el 2% tiene, de hecho, el mismo poder que los otros.

El Consejo de Ministros de la Comunidad Económica Europea empleaba el siguiente sistema de votación: Francia, Alemania e Italia tenían cuatro votos, Bélgica y Holanda tenían dos votos y Luxemburgo tenía uno. Los acuerdos se adoptaban cuando había una mayoría de dos tercios. Dado que había 17 votos en total, se requerían 12 para adoptar un acuerdo.

Observemos que todos los países tienen un número par de votos salvo Luxemburgo que tiene 1. Cualquier coalición que sume 12 o más votos y que incluya a Luxemburgo también sumaría 12 o más votos sin Luxemburgo. Por tanto, Luxemburgo no tenía ningún poder en la votación.

Simplemente con cambiar los votos necesarios para adoptar acuerdos a once o a trece votos, Luxemburgo hubiese tenido algún poder en las decisiones.

Existen formas de medir el poder en las votaciones ponderadas. Entre ellas están los índices de Banzhaf y de Shapley-Shubik. El primero se mide calculando el número de coaliciones ganadoras en que las que un votante es decisivo, es decir, de no votar con los del resto de la coalición no ganarían. El segundo analiza todas las permutaciones de los votantes y considera el número de ellas en las que un votante emite el voto decisivo, es decir, la suma de los pesos de los votantes precedentes no consiguen la quota requerida y gracias a éste se obtiene.

La proporcionalidad en la representación de un colectivo es algo importante y deseable, sin embargo el poder o la capacidad de influir sobre las decisiones es algo que no suele considerarse y tiene una importancia fundamental.

Supongamos que cada mañana pregunto a mis tres hijos qué desean comer y les doy como opciones carne o pescado, pero les indico que sólo prepararé una comida para todos. Si dos de ellos prefieren la carne y uno el pescado, cada mañana la votación democrática dirá que debo darles carne para comer. Siempre se hará lo que quieren dos y el tercero nunca tomará su comida preferida. ¿Estoy haciendo lo correcto? Con independencia de que la dieta no sea la más adecuada, nos podemos plantear que tomar dos veces carne y una pescado puede ser más justo.

Algo así se planteó en 1967 en el caso Iannucci contra el Consejo Directivo del Condado de Nassau, Nueva York, el dictamen del tribunal establecía que:

«Idealmente, en cualquier plan de votación ponderado, debería ser matemáticamente posible que cada miembro del organismo legislativo emita el voto decisivo sobre la legislación en la misma proporción que existe entre los representados y la población total»

Es decir, el tribunal proponía que la proporcionalidad deseable debería estar entre la población representada y el índice de poder de Banzhaf. Asímismo, añadía que sería necesaria una opinión experta y un análisis matemático para justificar cualquier sistema de votación ponderada. El tribunal también pronosticó que los tribunales acabarían en un «atolladero matemático».

No sé si el tribunal acabó pensando como el Derecho Romano donde se condenaba a los matemáticos porque *ars mathematica damnabilis et interdicta est.*

IV.5. La estadística, la probabilidad y los sorteos.

El desempleo, el índice de precios al consumo, la evolución de los salarios, la toma de muestras, los estudios sociológicos, el control de calidad, las encuestas, el estudio de la eficacia de un medicamento, de unos fertilizantes o del tratamiento de unas cosechas, la audiencia de los programas de televisión o radio, son algunos de los campos en los que estamos acostumbrados a ver estadísticas.

Existen también multitud de sorteos, desde los juegos de azar, al orden de actuación en concursos o a la participación en los tribunales de Selectividad. En muchas ocasiones el sorteo de letras es considerado como justo, cuando en realidad, puede traer graves desigualdades.

Un ejemplo de sorteo aparentemente justo que causó polémica, fue el siguiente.

Para el reclutamiento de soldados en 1970 en los Estados Unidos se decidió que el azar fuese el que determinase quién y cuándo sería seleccionado. Los varones nacidos entre 1943 y 1952 se clasificaron por el día y mes de nacimiento y a cada grupo se le asignó un número. La fecha a la que se le asignó el número 1 fue la primera en ser reclutada y así sucesivamente.

Aunque el proceso parece equitativo, los medios de comunicación declararon que los participantes no habían tenido las mismas oportunidades. Al parecer, los varones nacidos en diciembre fueron reclutados y enviados a Vietnam en mayor número que los nacidos en enero. Esto sucedió debido a que las bolas se introdujeron por fechas en una urna, pero al no ser mezcladas bien, ocurrió que las correspondientes a los días de diciembre estaban en mayor número en la parte superior y por tanto tenían más posibilidades de ser elegidas antes.

A pesar de que hubo bolas de diciembre que se escogieron después que otras de enero, un análisis de los resultados puso en evidencia el sesgo del sorteo.

Al año siguiente, después del escándalo acontecido, la Oficina Nacional de Normas se encargó de diseñar el sorteo con dos urnas, una para las fechas y otra para los números de orden, y, todas ellas, bien mezcladas. Un examen posterior de los resultados no encontró ninguna tendencia.

IV.6. Transmitir información.

a) Detectar errores.

Quizás alguien se haya preguntado por qué después de tantos años con el número del DNI, de pronto, apareció el NIF, que sólo añadía una letra al número anterior. La respuesta es que al dar el número del DNI, al escribirlo o al introducirlo en un ordenador podemos equivocarnos en alguna cifra. Sería bueno poder detectar si ha habido algún fallo. Esta es la misión de la letra, detectar fallos, al menos los más usuales.

Algo similar ocurre en los códigos de barras, los números de ISBN, tarjetas de crédito, los código cuenta cliente de 20 dígitos que utilizan los bancos, etc.

Un sistema sencillo es dividir por nueve el número en cuestión y poner el resto. De esta forma el nuevo número tendrá un dígito más, pero si cambiamos uno de los dígitos se podrá detectar (salvo que sea cambiar un 0 por un 9). Tampoco se detecta de esta manera el cambio de orden de dos cifras.

En los cheques de viaje de American Express y Visa la última cifra se añade para que la suma de las cifras sea divisible por nueve.

Otro sistema es dividir por 7, lo que evita algunos errores de cambio de dígitos.

En los códigos de barras aparecen 13 dígitos en 3 grupos (1, 6 y 6), se consideran los 12 últimos, se suman los impares y se multiplica el resultado por 3 y se añaden los pares, el primer dígito de los trece se coloca para que la suma con la cantidad anterior sea divisible por 10. Detecta todos los errores de un dígito y el 89% de los errores más usuales.

Los números de ISBN de los libros suelen tener 10 dígitos, el último es de control. Si se multiplica el primero por 10, el segundo por 9, el tercero por ocho, y así sucesivamente hasta el noveno por 2 y el décimo por 1, la suma de estas cantidades tiene que ser divisible por 11. En algunos casos sería necesario que el último dígito valiese 10, en tal caso se coloca la letra X. Detecta el 100% de los errores de un dígito y de transposiciones.

Estas son algunas formas de detectar errores. Si en el supermercado uno de los números de un código de barras se lee de forma errónea el ordenador se dará cuenta. De igual forma, Hacienda tiene un mejor control de nuestros números de identificación.

b) Detección y corrección de errores.

En este campo el siguiente problema es la detección de errores y su corrección. Los datos almacenados en ordenadores se pueden modificar por radiaciones, los datos transmitidos por satélites o sondas se ven afectados por interferencias electromagnéticas, los discos compactos pueden dañarse por suciedad, rayado, etc.

Por diferentes causas la información puede contener errores; pensemos en las fotografías enviadas por sondas espaciales desde millones de kilómetros. Cómo podrían corregirse. En los textos escritos detectamos errores y, en múltiples ocasiones, podemos conocer lo que quiso decir el que lo escribió, simplemente, usando el contexto.

Supongamos que queremos enviar un mensaje compuesto de ceros y unos. Para asegurar una mejor transmisión solemos repetir el mensaje; ésta puede ser una primera idea. Así, para decir 1 podemos decir (1,1) y para decir 0 decimos (0,0). Pero qué ocurre si el receptor escuchase (0,1) o (1,0), no sabría a qué nos referimos, ya que es igualmente posible es que nos refiriésemos al (0,0) que al (1,1). Sin embargo, si repetimos tres veces, es decir usamos tres coordenadas, el 0 sería (0,0,0) y el 1 (1,1,1). Ahora, al recibir cualquier terna podemos saber, con mayor probabilidad, qué es lo que nos han querido transmitir. Si hay al menos dos unos querrán decir 1 y si hay al menos dos ceros, lo más probable, es que su intención sea indicarnos un 0.

Si la información fuesen pares, ternas, etc. el número de coordenadas que hay que añadir y la forma de hacerlo serían distintos. La idea sigue siendo aumentar la dimensión del espacio para conseguir que los puntos estén suficientemente separados y, podamos conocer, ante un error cuál es el más cercano. Cada punto correcto tendrá unos cuantos a su alrededor que son los posibles errores. De un punto correcto hemos pasado a una esfera de puntos erróneos.

El empaquetado de esferas es una técnica utilizada para detectar fallos y corregirlos. La teoría de cuerpos finitos es también utilizada para la detección de fallos.

Otro problema es la búsqueda de lenguajes donde las palabras más frecuentes tengan longitudes más cortas, pues, de este modo la transmisión será más rápida.

c) Que no se enteren.

Cuentan que Julio César utilizaba sistemas para enviar mensajes que no pudieran entender sus enemigos. La idea pudo ser cambiar cada letra de la siguiente forma: A por D, B por E, C por F y así sucesivamente, trasladando cada letra tres posiciones en el alfabeto. En general, se podían trasladar cualquier número de posiciones.

El problema de la criptografía es antiguo. Un ejemplo más reciente es el siguiente.

En 1556 Felipe II desarrolló la 'Nueva Cifra General' que utilizaban los embajadores para relacionarse con el rey. Considerada indescifrable, el 'Despacho Universal' dirigido por el Secretario de Estado, Gonzalo Pérez, nunca se preocupó del Criptoanálisis. En cambio, el rey de Francia Enrique IV, tuvo el cuidado de encargar al matemático Vieta la tarea de descifrar, entre otras, la carta que Felipe II había dirigido a Alejandro Farnesio, Duque de Parma, con las instrucciones básicas para una campaña militar en los Países Bajos. Tras cinco meses de trabajo, Vieta completó su tarea. La victoria de Enrique IV en Ivry no fue ajena al control francés de informaciones militares básicas. Vieta continuó descifrando mensajes secretos españoles. De poco le sirvió a Felipe II acusar al rey de Francia ante el Papa de usar magia negra y estar aliado con el diablo, entre otras cosas, porque el Vaticano también tenía su equipo de criptoanalistas y hacía años que habían descifrado mensajes secretos españoles.

Los números primos juegan un papel importante para el envío de mensajes secretos. La clave está en que si bien es inmediato multiplicar dos números primos, no existen algoritmos rápidos para descomponer un número cualquiera e producto de factores primos (pensemos que se utilizan números primos de más de cien cifras).

d) Que no se enteren si no pagan.

Algunos canales de televisión de pago utilizan sistemas para que sólo sus abonados puedan ver las emisiones. Cada abonado tiene una clave individual. Cada mes el canal emite una clave nueva y una sucesión de claves, tantas como abonados. Si un abonado no paga, el canal no emitirá su clave y no podrá ver las imágenes.

V. ALGUNAS REFLEXIONES FINALES.

Me hubiese gustado hablar del diseño de coches y aviones, de fractales y el crecimiento de tumores, de la programación lineal y las refinerías, de la relatividad, de la regulación del tráfico, del genoma humano y la tomografía computerizada, pero ésta es sólo la Lección Inaugural, a partir de hoy empieza el curso y su paciencia tiene un límite.

Me gustan las matemáticas. ¿Se nota? Entiendo que haya personas a las que les guste más y a las que les guste menos, incluso que no les guste nada. Sin embargo, resulta preocupante y digno de reflexión y estudio el que haya algunos que aseguren poco menos que odiarlas, y muchos que no guarden un recuerdo agradable de ellas. Quizás lo que le enseñaron, lo que le exigieron, y/o cómo lo hicieron sean responsables de ello. No obstante, también están las modas. En la actualidad, algunos parecen casi presumir de no saber cuestiones matemáticas sencillas. Bien es verdad que esta aseveración podría trasladarse a muchas áreas del conocimiento humano. Ciertamente, es inquietante que la ignorancia se constituya en un valor. ¡Qué lejos queda la advertencia de Platón en su Academia: "Que no entre aquí quien no sepa geometría"!

Los profesores de matemáticas en la Universidad suelen quejarse del bajo nivel con el que llegan los estudiantes. De hecho los fracasos en matemáticas en la Selectividad suelen alcanzar un alto porcentaje, superando muchos alumnos la prueba por las calificaciones alcanzadas en otras materias.

Los profesores de Universidad pueden quejarse, muchas veces sin conocer, de lo que se enseña en Secundaria. A su vez los profesores de Secundaria achacan el problema a Primaria y, finalmente, los profesores de Primaria culpan a los planes de estudio, la familia y la sociedad en general. De tal suerte que nadie o todos tendríamos la culpa.

Destacados especialistas estudian qué matemáticas enseñar y cómo hacerlo, los medios necesarios y las reformas más convenientes. En cualquier caso, se intuye que el problema no debe ser fácil.

Un elemento puede ser la posible dificultad que tengan las matemáticas. Recordemos la anécdota del rey Ptolomeo y de Alejandro Magno sobre el estudio de la geometría.

Ptolomeo I, rey de Egipto durante la época de Euclides, tenía graves problemas para entender los *Elementos*, que no es precisamente el mejor libro para empezar a estudiar geometría. Preguntó a Euclides si no había una manera más fácil de aprender geometría. Este respondió: «en geometría, no hay camino real».

Unos años antes pudo haber tenido lugar una anécdota similar cuando Alejandro Magno le preguntó a uno de sus maestros, Menecmo, si había algún «atajo» en geometría y éste le respondió: "¡Oh, rey! Para viajar por el país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en la geometría hay un único camino para todos."

Aunque, en 1860 Abraham Lincoln, en su biografía de campaña, escrita por él mismo, se atrevía a afirmar que «estudió y casi llegó a dominar los seis libros de Euclides desde que fue elegido miembro del Congreso». Para muchos es una de las afirmaciones más atrevidas que se han hecho en campaña.

Como decía Einstein «tan fácil como sea posible, pero no más».

Tampoco sabemos lo que opinarían los aspirantes a altos funcionarios en la antigua China cuando tenían (a partir del año 656) como libro de texto oficial *La Matemática en Nueve Libros*, una versión modificada de la obra más antigua de la matemática china que podría remontarse incluso hasta el III siglo a.C. Trata problemas económicos y administrativos como medición de campos, construcción de canales y diques, obras de fortificación, cálculo de impuestos, equivalencias entre distintas especies de trigo, rendimientos de trabajo, medios de transporte, obras de irrigación, etc. cálculo de áreas de figuras, teoría de proporciones, reglas de tres, ecuaciones lineales, raíces cuadradas y cúbicas, ecuaciones algebraicas, etc.

En el mundo occidental, Arquitas de Tarento (428 a.C.) hizo la clasificación del *quadrivium* matemático: la aritmética, que estudia los números en reposo, la geometría que estudia las magnitudes en reposo, la música, que estudia los números en movimiento y la astronomía, que estudia las magnitudes en movimiento.

La música era una de las partes de las matemáticas, pues Pitágoras parece haber descubierto algunas leyes sencillas de la música. Se dio cuenta que si las longitudes de las cuerdas vibrantes se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, entonces los tonos producidos son armoniosos.

Junto con el *quadrivium* matemático, el *trivium*, gramática, retórica y dialéctica, constituían las siete artes liberales enseñadas durante siglos.

En nuestra época los cambios son mucho más rápidos y las adaptaciones no siempre son fáciles.

Actualmente, nos encontramos inmersos en profundos cambios del sistema educativo.

En ocasiones los profesores de asignaturas de matemáticas, y, supongo, también de otras disciplinas, ante la notable reducción del número de créditos hemos pensado que aquel plan de estudios no estaba bien hecho y hemos asumido la responsabilidad de enseñar todo aquello que creemos «imprescindible». Para ello hemos reducido, además de demostraciones, motivaciones, ejemplos, y, sobre todo, aplicaciones. Hemos incrementado la velocidad de nuestras explicaciones, haciendo mucho más densas nuestras clases. Ante esta situación me preocupa la próxima reforma, ¿qué ocurrirá entonces?

A veces pienso, por qué no dejar que la responsabilidad de que un plan de estudios, esté bien o mal, caiga sobre quien lo ha hecho. Por qué si los créditos asignados a matemáticas suponen un 3% (o un 5%, o un 10%) de la carga docente voy a pensar que mi materia es básica y que de ella depende la formación del futuro titulado mucho más allá de ese 3% (o del 5%, o del 10%).

Y, así, me pregunto si el mundo actual necesita más o menos matemáticas que en épocas precedentes.

Me pregunto qué debe hacerse en el caso en que las matemáticas fuesen necesarias, pero resultasen difíciles de aprender: reducirlas, dotarlas mejor,exigir más a sus profesores,...

Me pregunto si los profesores de matemáticas nos equivocamos.

Me pregunto si nos creímos aquello de que las matemáticas eran necesarias para todos los estudiantes, que desarrollaban la inteligencia, sin importar los conceptos que enseñásemos.

Me pregunto si hemos estado muy lentos para darnos cuenta de los cambios que se estaban produciendo.

Me pregunto si nos habrán usado como filtro para seleccionar estudiantes.

En fin, me pregunto tantas cosas.

Quizás algún día entienda más. Los estudiosos del tema dirán.

Por mi parte creo que aunque nadie tenga la solución, sí que podemos poner cada uno nuestro grano de arena. Piensen ustedes que a muchos nos asusta la idea de estar varias décadas intentando enseñar densas asignaturas de matemáticas a unos alumnos que, con independencia del nivel que tengan, estén predispuestos negativamente hacia las matemáticas y que sólo vean la asignatura como un obstáculo más para alcanzar el título.

Trabajemos por buscar las matemáticas cercanas a cada titulación, mostremos a los alumnos cómo podemos hacer que comprendan mejor la biología, la economía o la ingeniería. Provoquemos que sean ellos los que demanden más matemáticas, si es que las necesitan, y preparémonos para colaborar con los investigadores de esas áreas y con las empresas de nuestro entorno. No será una tarea fácil, ni rápida, sin embargo, el reto es tan significativo como estimulante. Estudiar más, saber más, enseñar mejor y ganar la consideración de alumnos, colegas y sociedad.

Perdónenme que haya hablado de matemáticas, cuando a muchos no les trae buenos recuerdos, y la osadía de hablar de ingeniería, biología, derecho o arqueología, sin saber.

Deseo que mi intervención les haya proporcionara una fina lluvia de ideas que incite su imaginación y les haya mostrado la cara oculta y, a la vez, más cercana de las matemáticas, la de su utilidad y su belleza.

Espero que hayan pasado un rato agradable, que hayan aprendido algo nuevo y les haya provocado la reflexión. Si es así, mi objetivo está cumplido.

Alguien dijo que las matemáticas eran reina y sierva de las otras ciencias. Es posible que tuviera razón. Sobre su reinado y su servidumbre he intentado hablar.

No es el mejor momento de la historia para las monarquías, pero tampoco los siervos son los de antes. Por ello debemos ir juntos, sin superiores ni inferiores, a aumentar el conocimiento y a mejorar nuestro mundo.

He dicho.

VI. REFERENCIAS.

ALSINA, C. Contar bien para vivir mejor, Rubes, Barcelona, 1998.

ALSINA, C., GUZMÁN, M. Los matemáticos no son gente seria, Rubes, Barcelona, 1996.

BLANCHARD, P., DEVANEY, R.L., HALL, G.R. Ecuaciones diferenciales, International Thomson Editores, México, 1999.

BOCHNER, S. El papel de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias, Alianza Universidad, Madrid, 1991.

BOYER, C.B. Historia de la Matemática, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986.

BRAUN, M. Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

CORBALÁN, F. La matemática aplicada a la vida cotidiana, Editorial Graó, de Serveis Pedagògics, Barcelona, 1995

DAVIS, P.J., HERSH, R. Experiencia Matemática, Labor, Barcelona, 1988.

DE LA HOZ ARDERIUS, R. La proporción cordobesa, Actas VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, pp. 67-84, Córdoba, 1996.

GARFUNKEL, S. (Director del Proyecto) Las Matemáticas de la vida cotidiana, Addison Wesley Iberoamericana y Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1999.

GRAN ENCICLOPEDIA LAROUSSE, Ed. Planeta, Barcelona, 1988.

LOMBARDO RADICE, L. La Matemática de Pitágoras a Newton, Laia, Barcelona, 1989.

SANTALÓ, L. A. La matemática: una filosofía y una técnica. Ariel, Barcelona, 1994.

WUSSING, H. Lecciones de Historia de las Matemáticas, Siglo XXI de España Editores, Madrid, 1998.

ZILL, D.G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

INDICE