Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

Lo político en matemáticas: un intento de rastreo

por

Norbert Schappacher[2]

Para J. G. Fichte (1762-1814) la filosofía –que él denominaba doctrina de la ciencia– debía "ser una historia pragmática del espíritu humano". G. W. F. Hegel (1770-1831) fue todavía más lejos al explicar en el prólogo de su Filosofía del Derecho que no sólo "cada individuo es hijo de su tiempo" –el célebre filósofo parece haber pensado menos en las hijas[3]–, sino "también la filosofía [es] su tiempo atrapado en pensamientos".

Nadie, tampoco desde luego el mismo Hegel, se atrevió a pensar que lo propio podría afirmarse de la matemática. Nos resulta mucho más natural pensar que, inversamente, los progresos de la matemática conforman su tiempo a través de las aplicaciones en las ciencias naturales y la técnica. Este enfoque resulta hoy particularmente convincente, ya que todo el mundo utiliza *smart cards* y móviles, y con ellos los algoritmos diseñados por matemáticos e implementados en esos artilugios, y no pocos contemporáneos nuestros intentan sacar provecho del comercio con *derivados bursátiles* que no existirían en absoluto sin los profundos descubrimientos de la matemática financiera de los últimos 40 años. En suma, todo aquel que se ocupa hoy del papel de

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

[2]Lo que sigue es una traducción (realizada por J. Ferreirós y revisada por el autor) del artículo aparecido en *Mathematische Semesterberichte* **50** (2003), 1–27: 'Politisches in der Mathematik - Versuch einer Spurensicherung', en versión ligeramente abreviada. Dicho artículo reproducía con algunos cambios la *Antrittsvorlesung* [conferencia inaugural] impartida por el autor en la *Technische Universität Darmstadt* el 10 de julio de 2002. Norbert Schappacher es actualmente profesor en la *Université Louis Pasteur*, Strasbourg.

[3]Hegel escribió "Sohn" y no "Kind", con lo cual excluía a las mujeres.

la matemática, toma sus aplicaciones como una parte importante de nuestro tiempo.

La misma abstracción de las teorías matemáticas hace muy difícil creer que las cambiantes contingencias de nuestra realidad social puedan tener influencia sobre la cristalina claridad de esas teorías. De manera especial, la certeza única que sus demostraciones son capaces de crear, parece alejar a la matemática de la multiplicidad de los acontecimientos históricos. Que $2 + 2 = 4$; que la proporción entre la circunferencia y la diagonal de un círculo es una constante π independiente del círculo, la cual –por no decir aquí nada más– no es expresable como el cociente de dos números enteros; tales teoremas no están abiertos a debate, son absolutamente independientes de nuestras formas sociales y del Estado, de las opiniones políticas, de las naciones, de la proveniencia y la clase de aquellos que estudian dichas verdades. ¿Cómo podrían reflejarse los sucesos históricos en las proposiciones matemáticas?

A modo de preludio, echemos una mirada a la Europa del siglo XVI, y en particular a Francia, según me la ha enseñado la historiadora de la matemática italiana Giovanna Cifoletti [1996].

1 ¿Hasta qué punto es árabe el álgebra?

Todos ustedes conocen la fórmula del binomio,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

pero quizá haya entre ustedes quienes aprendieron esta ley en la escuela, no como fórmula literal, sino todavía en la forma del álgebra retórica como fórmula memorística:

> *El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de los dos números más el doble del producto de ambos números.*

Al margen de la cacofónica repetición de la palabra "número" en esta expresión –una palabra que además es confundente, ya que la fórmula es igualmente válida para polinomios, funciones, ... y en general, como se dice desde el siglo XX, para elementos cualesquiera de un anillo conmutativo con elemento unidad–, al margen de ello, fórmula como la del binomio facilitan sobre todo un cálculo abreviado y claro para la transformación de ecuaciones algebraicas. La introducción de dicho cálculo fue la gran revolución moderna del álgebra. Los modernos crearon así una nueva álgebra emancipada, y encontraron en ella al mismo tiempo un nuevo acceso a problemas de construcciones geométricas que la Antigüedad había dejado sin resolver; por ejemplo, el de la cuadratura del círculo o el *problema de las medias proporcionales* tan famoso entonces[4].

[4] *Dados dos segmentos a y b, encontrar otros dos segmentos de manera que* $a : x = x : y = y : b$. Ver por ejemplo Bos 2001, § 2.4.

Esta revolución científica no sucedió en un dia, sino que se desarrolló en Italia, Alemania y Francia a lo largo de más de dos siglos, de mediados del XV a mediados del XVII. La historiadora Giovanna Cifoletti se ha ocupado de la parte del proceso que tuvo lugar en Francia durante el XVI y está ligada a los nombres de Jean Borrel[5], del lógico Petrus Ramus[6], del matemática, médico y gramático Jacques Peletier de Le Mans (1517-1582), con Guillaume Gosselin[7] y especialmente con el nombre del abogado y consejero estatal François Viète (1540-1603), que en España se conoce sobre todo en la versión latina Vieta. (Tras él tomarían el relevo René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601(?)-1665).) Es sobre todo con François Viète que tiene lugar el paso a una manipulación formal de las cantidades, si bien su notación no es aún la nuestra, y en los seminarios de Historia de la Matemática es fácil que los pasajes de Viète dejen confusos a los estudiantes. El lema que Viète presenta al final de su introducción al arte del análisis es[8]:

NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE

es decir,

NINGÚN PROBLEMA QUEDE SIN RESOLVER.

Estos sabios franceses no se limitaron a trabajar en el nuevo cálculo formal del álgebra, sino que cada uno desarrolló a la vez su propia exposición de la historia del álgebra. Como es bien sabido, el nombre de esta disciplina viene del árabe, y más concretamente procede del título del primer tratado sistemático de álgebra en la historia de la matemática (limitado estrictamente a ecuaciones lineales y cuadráticas): el *Kitab al-jabr wa al-muqabalah* de al-Khwarizmi, originado en el Bagdad del siglo IX. En medicina, 'al-jabr' designaba la reducción de una articulación dislocada, y para al-Khwarizmi representó el traspaso de términos negativos al otro miembro de una ecuación. 'al-muqabalah' representaba la reunión de términos del mismo tipo, esto es, de múltiplos de una misma potencia de la incógnita. Este pasado árabe del álgebra no se compadecía bien con el ideal educativo humanista de la Francia del siglo XVI. Si uno lee por ejemplo los ensayos de Montaigne, que por otra parte era buen conocido del mencionado Jacques Peletier[9], se topa con citas y más citas de autores clásicos desde Herodoto a Cicerón, Lucrecio y otros muchos.

[5]Más conocido como Buteo, nacido *circa* 1492, muerto entre 1564 y 1572.

[6]Pierre de la Ramée, nacido en 1515, calvinista desde 1562; murió en la noche de San Bartolomé en París, 1572, junto con otros tres o cuatro mil protestantes.

[7]Activo en el siglo XVI, publicó su escrito De arte magna en 1577.

[8]F. Viète, *In artem analyticen isagoge*; Tours, 1591. Citado según Bos 2001, p. 146.

[9]Es mencionado por Montaigne en un lugar, al exponer su escepticismo respecto a las teorías científicas que contradicen a la experiencia inmediata: Montaigne, *Essais*, Livre II, chapitre XII.

En este clima intelectual, los orígenes pre-arábigos del álgebra recibieron un nuevo sentido. En 1554 Peletier todavía menciona los orígenes arábigos (aunque bajo la forma del mito de un autor llamado "Geber"[10]) en pie de igualdad con la referencia a los manuscritos griegos de Diofanto (probablemente del siglo III) redescubiertos en el siglo XV, y se contenta con soltar indirectas sobre el modo primitivo en que los árabes supuestamente se ocuparon de su ciencia. En 1559 Borrel alias Buteo reemplaza el nombre de álgebra por el helenizante de *Logística*, o más específicamente por el latino de *quadratura*, y explica en relación a los científicos árabes:

> *La utilización y la comprensión de la quadratura está ligado a una dificultad específica, debida más bien a un error de quienes nos la transmitieron que a la naturaleza de la cuestión. Pues aquellos, al no conocer ningún método científico y habérselas de un modo bárbaro con las cosas y las palabras, lo confunden y mezclan todo de tal manera, que nada puede ser más confundente, y así oscurecen el sentido del lector al tiempo que acumulan nubes.*

En Ramus puede encontrarse no sólo una referencia, en 1569, a los orígenes griegos con Diofanto, sino también, desde 1586, en las ediciones póstumas de su Álgebra, una pequeña fábula histórica sobre esta disciplina, según la cual los antiguos griegos por su parte sólo habrían sido transmisores de una ciencia aún más antigua, en cierto modo la planta originaria entre todas las ciencias, que en opinión de los franceses de aquel tiempo era finalmente de origen galo. Este mito les confería a nuestro autores nada menos que una misión histórica, encardinando la creación del álgebra moderna en un gran esquema histórico relativo a la emergente nación francesa.

Por fin, Gosselin y Viète, a diferencia de sus predecesores, tuvieron acceso directo al texto de Diofanto y sabían muy bien qué aspectos querían emplear para su proyecto de álgebra, y cuáles no. Así, François Viète se ve a sí mismo como un continuador y protector de la auténtica metodología y la ciencia griega (retrotrae el concepto del análisis a Pappo), y no tiene remilgos a la hora de poner de vuelta y media las contribuciones históricas de otras procedencias[11]:

> *El arte que hoy expongo es un arte nuevo, o en todo caso había decaído de tal modo a través de los siglos, había sido tan profanado y contaminado por los bárbaros, que he creído necesario darle una forma enteramente nueva...*

Cifoletti ha mostrado en detalle cómo las narraciones históricas de los algebristas discurrían en paralelo a las tendencias intelectuales de los juristas

[10]Nombre que en este caso no es ya una referencia al personaje histórico del siglo XII Jabir ibn Aflah, el conocido astrónomo nacido en Sevilla cuya denominación latina era también Geber.

[11]De la dedicatoria de la *Isagoge* a Catherine de Parthenay, 1591.

franceses y a la emergente cofradía de los historiadores del momento[12]. No la seguiremos aquí. Sólo quisiera mencionar que el anti-arabismo que hemos observado era obviamente una opción entre los intelectuales en aquella situación, pero que sólo en parte se compadece con la política francesa del XVI. Ésta estaba determinada en primer lugar por la dramática guerra contra los hugonotes, y en segundo por la lucha contra España y los Habsburgo, y en esta lucha podía llegar el caso de que una coalición con los turcos resultara ser un medio magnífico. Recordemos que Viète ayudó a Enrique III y a Enrique IV en su guerra contra los españoles, descifrando sus códigos secretos que empleaban casi 600 símbolos.

Y ahora dirán ustedes: puede ser que circunstancias históricas como (lo que bien podríamos llamar) el odio humanista a lo árabe encuentren expresión en cartas de dedicatoria o en prólogos de libros matemáticos, dando lugar a una historia desfigurada; pero ello no basta para que el álgebra misma que entonces surgió resultara politizada. –A esto podría replicar con sutilezas del tipo de preguntar qué es entonces "el álgebra misma", pero en todo caso me parece digno de saberse qué ángeles de la guarda se alzaban junto a la cuna del álgebra literal en el Occidente europeo.

Pero abandono aquí el intento de buscar rastros en prólogos o dedicatorias de libros matemáticos, para volverme a los propios contenidos de la matemática. Permítaseme sólo un ejemplo más de prólogo político, que requeriría de hecho una investigación criminalística a fin de descubrir el grito de guerra que contiene, si no fuera porque colegas más viejos nos han llamado la atención al respecto. Escribiendo una tras otra las iniciales de las primeras 21 frases del prólogo del libro de Roland Weitzenboeck *Teoría de invariantes* [1923] se obtiene una frase con sentido, lo que de por sí es muy improbable; a saber:

NIEDER MIT DEN FRANZOSEN,

o sea,

ABAJO LOS FRANCESES.

Weitzenboeck[13] era un austriaco que se hizo holandés. Junto al topólogo y fundador del intuicionismo Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), fue a comienzos de los años 1920 el maestro matemático del joven Bartel L. Van der

[12][N. del T.] También en la filosofía y la medicina de aquellos tiempos se observa el celo de los humanistas por purificar las doctrinas antiguas de los elementos arabizantes que se habían incrustado durante la Escolástica. Lo arábigo, que había sido elegante y codiciado en la Edad Media hispana, pasó a ser bárbaro y repudiable.

[13]Nacido en Kremsmünster, cerca de Graz, en 1885; doctor por Viena en 1910; tras cortos períodos como profesor en Praga y Graz, 1918-1920, desde 1921 en Ámsterdam, siendo profesor desde 1923; muerto en 1955. –Agradezco a Catherine Goldstein y Jim Ritter estos datos.

Waerden, quien diez años más tarde, tras haber estudiado con Emmy Noether, registró en su libro *Moderne Algebra* la siguiente gran revolución del álgebra tras Viète. Weitzenboeck y Brouwer se sintieron ligados a la idea de una revancha alemana tras la incomprensible derrota en la Primera Guerra Mundial. (Además, Weitzenboeck fue en 1940 el último matemático, de Ámsterdam en este caso, nombrado miembro correspondiente de la Academia Prusiana de Ciencias en Berlín; véase Begehr 1998, primera parte, p. 89.) Si bien el prólogo de Weitzenboeck parece ser un caso único por su estilo guerrero, resulta sin embargo característico de los primeros años 20, un tiempo en que las ciencias estaban directamente politizadas. Así por ejemplo, en el marco de las múltiples represalias a las potencia agresora, Alemania, tuvo lugar un boicot internacional contra la ciencia alemana, que en el caso de los matemáticos llevó entre otras cosas a que los alemanes no pudieran tomar parte ni en el Congreso Internacional de Estrasburgo, 1920, ni en el de Toronto, 1924.

2 Análisis de la Guerra Mundial: El caso de Hermann Weyl

Hoy no resulta nada fácil hacerse cargo del ambiente espiritual que caracterizó el tiempo de la Primera Guerra Mundial en los estados europeos que tomaron parte, desde el mismo Agosto de 1914. Un patriotismo cuasi-religioso apelaba a las experiencias más profundas y los ideales más elevados; muchos saludaron con entusiasmo el fin del tiempo de paz, supuestamente aburrido, y las acciones militares muy pronto hicieron patente una *brutalización* de la civilización, por decirlo con George Mosse, que en los últimos años se ha convertido en un concepto cada vez más importante para los intentos de comprensión histórica de la Guerra[14].

El papel ideológico de las religiones en aquel tiempo es tan notable como el de las ciencias. Valga de ejemplo que la masa de gente reunida en la Alexanderplatz de Berlín en la tarde del 1 de Agosto de 1914, tras el anuncio de la movilización, no cantaba un himno nacional o marcial, sino el coral luterano: *Gott, tief im Herz* (Dios en lo profundo del corazón) [Audoin-Rouzeau y Becker, 2000, 138]. Nada menos que el obispo de Londres, Arthur Winnington-Ingram, hizo un llamamiento en 1915 a la aniquilación total de los alemanes, “no por gusto de la muerte, sino para salvar al mundo”. Y añadió expresamente que en esta campaña de exterminio no se debía hacer ningún distingo entre buenos y malos alemanes [op. cit., 123].

Y así, el respectado doctor Bérillon presentó en 1915 ante la Academia de París su escrito sobre “La fétida bromhidrosis[15] de la raza alemana”, donde constataba analogías materiales entre los alemanes y el turón; el término

[14]Es representativa la síntesis que ofrece el librito de Audoin-Rouzeau y Becker 2000, por ejemplo las páginas 48s. y 193. A diferencia de Mosse, empleo el término sólo para el tiempo de la Guerra o inmediatamente después.

[15][N. del T.] Enfermedad de la piel que causa transpiración maloliente.

francés *putois* para el turón, como la denominación científica *putorius putorius*, sugería ya la idea de mal olor. Según Bérillon los alemanes no eliminaban completamente los productos urinarios a través de sus riñones; del resto daban cuenta las glándulas sudoríparas, con resultados hediondos[16]. Menos escabroso pero enteramente comparable es el libro del conocido físico e historiador de la ciencia Pierre Duhem sobre la ciencia alemana, del mismo año 1915. En él diferenciaba siguiendo a Pascal entre el "esprit de géométrie" deductivo, carente de creatividad, limitado a la deducción formal, y el "esprit de finesse" verdaderamente creativo; ya pueden imaginarse qué espíritu diagnosticaba Duhem entre los científicos y matemáticos alemanes, y cuál entre sus compatriotas franceses[17].

Entre los matemáticos franceses, destacan por sus textos anti-alemanes de la Primera Guerra Mundial y la posguerra el varias veces ministro y primer ministro (también durante la Guerra) Paul Painlevé (1863-1933), y el sabio polifacético y gran matemático Émile Picard (1856-1941). Pero ninguno de ellos representa casos tan extremos como el Dr. Bérillon o Pierre Duhem, ya que Painlevé estaba inmerso en la política activa, y Picard se limitó, como miembro notorio de la Academia parisina, a defenderse bajo el lema *Pour la Vérité* de la retórica bélica alemana, que pretendía establecer una superioridad cultural de Alemania fundada en los logros científicos. Lástima que en la empresa Picard llevara su retrato de la ciencia alemana[18] al terreno de la caricatura, al purificar en gran medida la historia de las ciencias de los grandes alemanes; reconocía a los científicos alemanes su indudable celo y un gran flujo de publicaciones, pero a la vez los consideraba arruinados por el apriorismo kantiano, le parecían formalistas e incapaces de distinguir lo importante de lo

[16]Audoin-Rouzeau y Becker 2000, 124. Debo mi conocimiento de Bérillon a Josiane Olff-Nathan, véase su trabajo DEA inédito en Estrasburgo: *La science des physiciens et des mathématiciens allemands sous le régime national-socialiste*. La idea de un olor típico del enemigo se encuentra en innumerables informes del frente, en ambos bandos de la Primera Guerra Mundial.

[17]Duhem 1915; cf. el antes mencionado trabajo de DEA de Josiane Olff-Nathan, p. 22s.

[18]E. Picard, *L'histoire des sciences et les prétentions de la science allemande*, en Picard 1916; primera publicación en la *Revue des deux mondes*, 1.07.1915. [Agradezco a Birgit Petri y Tilman Heisterhagen el haber puesto a mi disposición este texto en su reimpresión dentro de la recopilación norteamericana: Coleman 1981.] Así en p. 7: "Nos proponemos, al echar un rápido vistazo a la historia de las ciencias, mostrar que efectivamente la mayor parte de las contribuciones esenciales, tanto teóricas como prácticas, no corresponden a sabios o inventores alemanes". En la tarea desempeñaban por supuesto un papel esencial las valoraciones de campos y contribuciones científicas. Por ejemplo, Picard dejaba constancia del extraordinario dominio de Gauss en la teoría de números moderna (p. 12), pero esta "ciencia de lo discontinuo" sería "tan difícil para nuestras mentes, habituadas a la idea de continuidad por los fenómenos naturales", que posteriormente habría sido "uno de los grandes méritos de Hermite" [su suegro] el "introducir lo continuo en ciertas cuestiones de aritmética superior" (p. 12-13).

trivial[19]. Los escritos de Painlevé y Picard fueron muy bien conocidos –aun si pocos los leyeron efectivamente– como corresponde a la posición bien visible que ocupaban ambos matemáticos. Pero debemos considerar sus textos bélicos en contexto, y en cierto modo dentro de una continuidad de la política (científica) francesa desde el shock de la derrota en 1870-71 hasta el boicot a la ciencia alemana de comienzos de los años 1920[20]. Sin embargo, esto excedería los límites de la presente lección y de su tema[21].

Hoy calificamos de pseudocientíficas a teorías como la de Bérillon o análisis de estilo como el de Duhem, y con ello nos ahorramos el estudio de estos documentos históricos. Pero naturalmente que pertenecen a la historia de las ciencias. Y es un hecho que el Dr. Bérillon no quedó en ridículo ante las altas Academias francesas con su intervención. En cuanto al escrito de Duhem, es sin más un producto típico de su tiempo: el mismo *género* se encuentra representado, si bien con algo menos de ideología, en los seminarios y lecciones impartidos por Felix Klein en Göttingen[22], y más abajo encontraremos cosas similares debidas a Ludwig Bieberbach.

Kurt Flasch, historiador de la filosofía, se ha ocupado del enorme corpus de literatura producida por hombres de letras alemanes durante la Primera Guerra Mundial, en su libro sumamente recomendable *La movilización intelectual* [2000]. Advierte a propósito de la precaución metódica que debe tenerse en el trato con estos fondos:

> *Los textos de la Guerra Mundial se nos han hecho muy lejanos históricamente; la mayoría son sumamente chocantes; muchos se me antojan más "pasados" que los libros medievales de los que suelo ocuparme.*

En su revisión de las conferencias impartidas en la universidad de Berlín durante los primeros años de guerra, Flasch localiza un primer tópico literario en la "vivencia del comienzo de la guerra y la movilización". Esta palabra

---

[19] *Op. cit.*, p. 22s y *passim*. Ver también Picard 1917.

[20] Por ejemplo, Émile Picard había publicado en 1905 para un público amplio su libro *La science moderne et son état actuel* (Flammarion, Paris), que fue editado en alemán en la traducción de F. y L. Lindemann. Sus manifestaciones durante la Guerra no ofrecen, en comparación con aquél, otra cosa que una mayor carga emocional, si descontamos la caricatura de la filosofía alemana. Desde 1917, en su posición de *Sécretaire perpétuel de l'Academie de Paris*, fue uno de los más poderosos defensores del boicot a la ciencia alemana. En 1920 presidió en Estrasburgo el primer Congreso Internacional de Matemáticos del que se excluyó a los alemanes.

[21] Como entrada en la extensa literatura sobre este tema pueden servir ante todo los trabajos del discípulo de Bourdieu Christophe Charle (cf. su 1994).

[22] *Las Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX* que Felix Klein impartió durante la Guerra fueron publicadas a mediados de los años veinte. Los manuscritos originales, comparados con la versión publicada, contenían críticas mucho más tajantes a las tendencias que le parecían modernistas en matemáticas; cf. Rowe 1986.

evocada una y otra vez, "vivencia", la considera no sin razón un "subproducto de los desarrollos filosóficos de fines del XIX", que desde los inicios del siglo XX se convirtió en "expresión de moda" [Flasch 2000, 77]. Pero a esto cabe añadir, como preparación para el matemático que quiero introducir enseguida, que la frase "vivir y experimentar" [*Leben und erleben*] se encuentra ya en el filósofo con cuyo nombre empecé esta conferencia, Johann Gottlieb Fichte. Con ella designaba Fichte el "estado no reflexivo en que el sujeto está lleno de sus contenidos [de conciencia] correspondientes. ... Y este estado es para Fichte el fundamento y punto de partida de una teoría trascendental del conocimiento"[23]. Desde este punto de vista, y también desde algunos otros (pensemos en sus "Discursos a la nación alemana" en tiempos de la ocupación napoleónica), Fichte podía aparecer desde la atalaya de la Primera Guerra Mundial como un pariente espiritual.

Por supuesto, no todas las conferencias y los escritos de guerra de filósofos, filólogose historiadores alemanes aparecen en la historia de sus disciplinas. O, como lo formula Kurt Flasch en un experimento mental:

> *Supongamos que un viajero australiano tuviera la intención, antes de entrar en Alemania, de ponerse al corriente de los modos de pensar dominantes allí. Supongamos además, caso aún más improbable e incluso indeseable, de que pretendiera lograrlo estudiando las historias de la filosofía más conocidas en Alemania. En tal caso, debería concluir que la Primera Guerra Mundial no había tenido lugar en este país. O quizá llegaría a preguntarse: ¿eran los funcionarios alemanes del pensamiento tan sólidos, tan robustos que la red de sus sistemas siguió tejiéndose como si nada? ... Probablemente a nadie se le ocurriría escribir la historia de la pintura o de la literatura de nuestro siglo sin mencionar la Primera Guerra Mundial, pero los historiadores de la filosofía alemanes confirman una vez más la autonomía extraterritorial de su gremio. En casa del ahorcado no se mienta la soga: los historiadores de la filosofía de la posguerra olvidaron la guerra. Consecuentes con el modo en que fueron educados, no sólo callan respecto de la Segunda Guerra Mundial, sino también de la Primera.*

Naturalmente, y por las razones indicadas al principio, ningún australiano tendría la idea de informarse acerca del pasado reciente de Alemania en libros sobre historia de la matemática. Pero si lo hiciera, le sería de más provecho que con las historias de la filosofía que considera Flasch ... suponiendo que

[23]Según K. Cramer, "Erleben / Erlebnis", en *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, tomo 2, Darmstadt, 1972, p. 703. Hermann Weyl emplea la palabra "Erlebnis" [vivencia, experiencia] en conexión con Fichte en la conferencia retrospectiva sobre su desarrollo filosófico, en Weyl 1954, p. 644.

se procurase el libro de Herbert Mehrtens *Moderne · Sprache · Mathematik* [1990: *Modernidad, Lenguaje, Matemática*].

Justo a la mitad de su libro, Mehrtens describe cómo los problemas de fundamentos de la teoría de conjuntos –conocidos desde principios del siglo bajo la forma de diversas paradojas, sin que por ello se difundiera una conciencia de crisis entre la comunidad matemática– se tornaron tras 1918 en la llamada "crisis de fundamentos" de la matemática; esto es, cómo la crisis general de la conciencia burguesa tras el final de la Primera Guerra encontró expresión también aquí a través de aquellos problemas fundacionales. Este es el contenido político de la disputa entre David Hilbert, con su programa de teoría de la demostración para obtener garantías metamatemáticas respecto a todo el edificio de la matemática, y por otro lado el intuicionismo representado con vigor desde 1920 por el holandés ya mencionado, L. E. J. Brouwer, a cuyo lado se situó por algunos años Hermann Weyl (1885-1955), antiguo discípulo de Hilbert y uno de los matemáticos más polifacéticos y notorios del siglo XX. Es la disputa que llevó a Weyl, en un célebre artículo de 1921 en el *Mathematische Zeitschrift*, lleno de reflejos del vocabulario político de aquellos tiempos, a pronunciarse: "Brouwer - esta es la Revolución".

Muchos de ustedes conocerán cuando menos los grandes rasgos de esta historia. También yo quiero relatar aquí un episodio de este debate intramatemático, pero cargado de política; un episodio relativo a Hermann Weyl y a su transformación de axiomático en crítico durante los años de la Guerra. Pero el libro de Weyl del que quiero hablar aquí es anterior a su giro hacia el intuicionismo de Brouwer. Se trata de un librito de apenas 100 páginas: *El Continuo. Investigaciones críticas sobre los fundamentos del análisis*, que publicó en el año 1918. Intentaré mostrarles hasta qué punto el matemático Weyl se revela, con este escrito, como un sismógrafo especialmente sensible a las sacudidas de su tiempo.

Todavía en 1915 no era apenas previsible que Weyl escribiría un libro de estas características durante la Guerra. Cierto que ya en su lección de habilitación impartida en Göttingen en 1910: *Sobre las definiciones de los conceptos básicos de la matemática*, había discutido las dificultades en la teoría de conjuntos y en particular la antinomia de Richard, que según la formula Weyl consiste en lo siguiente:

> *que mientras, por un lado, la totalidad de las expresiones compuestas de una cantidad finita de palabras constituye sólo un conjunto enumerable ... y por tanto, dado que las cosas de las que podemos hablar deben quedar definidas mediante una cantidad finita de palabras, la totalidad de las cosas que pueden ser objeto de nuestro pensamiento sólo puede dar lugar a un conjunto enumerable; entretanto, y por otro lado, de acuerdo con Cantor resulta que ya el conjunto de los números reales es no-enumerable.* [Weyl 1910]

En una nota al pie, hacia el final del trabajo, se reservaba el derecho de "volver en otro lugar" sobre el problema de las definiciones admisibles en la teoría de conjuntos. Pero esta lección no ponía en duda, de ningún modo, el papel de la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática. Las cuestiones a clarificar no dejan advertir nada del tono dramático con el que comienza el prólogo del libro sobre el continuo:

> *En este escrito no se trata de revestir la "roca segura" sobre la que se funda el edificio del análisis con una armazón externa de madera, al modo del formalismo, para al final asegurar al lector y a fin de cuentas a uno mismo: he ahí el verdadero fundamento. Aquí se defenderá más bien la opinión de que aquel edificio está, en buena medida, construido sobre arena. Creo poder reemplazar este terreno movedizo por puntales de solidez fidedigna; pero no son capaces de soportar todo aquello que hoy suele considerarse seguro. Renuncio al resto, porque no veo ninguna otra posibilidad.*

¿Qué había sucedido entre medias? – En el verano de 1913 Weyl recibió una oferta de la ETH en Zürich, y en Septiembre de 1913 se casó con Helene Joseph, a la que llamaban Hella o Leni. Ella había sido en Göttingen estudiante del filósofo Edmund Husserl, por el que también se interesaba Weyl. Aunque los Weyl experimentaron la Guerra desde la neutral Suiza, las noticias alejaron a Weyl considerablemente del trabajo matemático, que percibía como muy alejado de las grandes cuestiones del momento. Al principio no fue importunado con deberes militares porque había sido declarado inútil y por ser profesor en el extranjero. Pero el 11 de Mayo de 1915 fue reclutado. Fue destinado a Saarbrücken; su mujer le siguió muy pronto con su hijo Joachim, de pocos meses. Tras apenas un año los suizos lograron que se le librara del Ejército alemán, y los Weyl pudieron volver a Zürich. Hermann Weyl describió su manera de pensar en aquel momento como una *tabula rasa*. No retomó sus trabajos matemáticos allí donde los había dejado –en particular, no volvió a trabajar sobre equipartición de números módulo 1–, sino que se dejó atrapar por dos temas de investigación nuevos para él: la Teoría de la Relatividad y, algo después, los estudios de Fundamentos[24].

En Zürich, su mujer andaba buscando un sustituto de los seminarios de Husserl en los que había participado en Göttingen, y dio con las reuniones organizadas por Fritz Medicus, que era editor de las obras de Fichte. Y así fue que también Hermann Weyl, tras su inmersión anterior en la fenomenología de Husserl, estudió durante la Guerra a Fichte. Hay múltiples testimonios de la seriedad con que se dedicó a ello, y se percibe también en algunos comentarios incluidos en el libro sobre *El Continuo*. El libro comienza con una breve

[24]Este párrafo sigue en general lo dicho en el capítulo segundo de la tesis de Skuli Sigurdsson en Harvard (1991): *Hermann Weyl, mathematics and physics, 1900-1927*. Doy las gracias a Erhard Scholz, que entre otras cosas llamó mi atención hacia este trabajo. Cf. también los artículos de Sigurdson y Scholz en Scholz 2001.

propedéutica lógica, donde se discuten los conceptos de proposición, estado de cosas y propiedad; estas dos páginas terminan con la frase:

> *No podemos entrar aquí en una clarificación plena de la esencia del estado de cosas, la proposición, el objeto y la propiedad; semejante tarea conduce a profundidades metafísicas. Sobre estos asuntos hay que pedir consejo a hombres cuyos nombres no puede uno mencionar entre los matemáticos, sin recibir a cambio sonrisas compasivas; por ejemplo Fichte.* [Weyl 1918, 2]

La influencia de Fichte –¿o se trata más bien de la atmósfera de los años de guerra?; me refiero por ejemplo al modo en que Fichte apela siempre firmemente a las experiencias y evidencias personales del lector–, la influencia de Fichte también se deja sentir en el estilo. Por ejemplo en la pág. 23 Weyl revisa críticamente la definición del límite superior de un conjunto acotado de números reales, tal como queda determinado por la definición de los reales de Dedekind mediante cortaduras; Weyl lo hace diferenciando estrictamente entre conjuntos de números racionales de primer y de segundo nivel [*Stufe*, tipo]. Y entonces leemos:

> *El círculo vicioso sobre el que llamamos la atención, oculto por el carácter nebuloso de los conceptos habituales de conjunto y función, no es simplemente una debilidad formal en la construcción del análisis, fácil de reparar. El reconocimiento de su significación fundamental no es algo que quepa transmitir al lector a base de retórica. Pero cuanto más precisamente nos hacemos cargo del entramado lógico del análisis, cuando más profunda y completamente lo revisamos con el examen de nuestra conciencia, tanto más claro resulta que en la actual manera de fundamentar el análisis, toda y cada una de las células del organismo (por decirlo así) está imbuida del veneno de esta contradicción; y que es imprescindible establecer controles eficaces para salir del atolladero.* [Weyl 1918, 23]

Weyl eligió como la salida a esta niebla y círculos que le parecía “la única natural” lo que llamó el “procedimiento estricto”[25], según el cual, al realizar un reemplazo de una variable libre en una proposición, y al formar proposiciones existenciales del tipo $\exists x\,(...)$, pueden emplearse única y exclusivamente objetos de una categoría dada previamente de una vez, pero no conjuntos de dichos objetos ni relaciones entre ellos. Hoy designamos esta forma de proceder como un desarrollo predicativo del análisis. Como resultado de dicho enfoque Weyl obtiene un análisis que es esencialmente más débil que el habitual: la existencia del límite superior de un conjunto acotado de números reales no

[25]Para facilitar la comprensión, en el resto de la frase nos hemos permitido ‘traducir’ las expresiones de Weyl a las hoy habituales en lógica.

puede demostrarse en general, como tampoco puede siempre obtenerse de un conjunto infinito de reales dado una sucesión infinita de sus elementos [1918, 59s].

Weyl no prohíbe a otros que empleen procedimientos distintos, pero advierte de los razonamientos circulares que en ese caso resultan naturales [1918, 24, nota al pie]. Y en otro lugar asegura de nuevo:

> *Haya logrado aquí o no suministrar los principios lógicos de construcción que son necesarios ... en toda su extensión (y determinarlos no es una cuestión de convención, sino de conocimiento lógico), una cosa resulta plenamente segura: que la parte negativa de mis desarrollos, la crítica de los fundamentos del análisis habituales, la referencia a su desarrollo circular, es correcta y se debe proceder de una manera similar a la que he planteado aquí para encontrar una salida.*
>
> *He expuesto aquí los hitos del camino que en mi caso, encerrado por tradición en aquel complejo de ideas que hoy ha alcanzado un dominio absoluto en matemática, y que está ligado ante todo a los nombres de Dedekind y Cantor, me permitió encontrar una salida a dicho círculo. ...* [Weyl 1918, 35]

En estas citas se hace patente que este libro de matemática se liga sin solución de continuidad al corpus de literatura alemana de la Guerra investigado por Flasch. Y ello no sólo porque lo propio y común en los tratados de matemática es argumentar, en lugar de dictaminar necesidades imperativas o apelar a la conciencia del lector; sino también porque hoy la gran mayoría de los colegas matemáticos no tiene ningún cargo de conciencia en presentar ante estudiantes de matemática de todo el mundo aquellos círculos viciosos fustigados tan existencialmente por Weyl[26].

Pero ¿qué significa la expresión "literatura de guerra"? – El libro de Weyl no tiene en absoluto el estilo de una arenga marcial, sino que es una reacción extremadamente sensible a la experiencia de la guerra. Al final de su libro, Kurt Flasch se pregunta por aquellos autores que en su obra "piensan la Guerra Mundial", esto es:

> *confrontan las explicaciones del mundo de la vieja Europa con las nuevas experiencias de la Guerra Mundial.* [Flasch 2000, 381; ver p. 367]

Precisamente esto es lo que hizo Hermann Weyl a su manera para el campo del análisis matemático en su libro *Das Kontinuum* de 1918. Durante la

[26]Naturalmente también existen desarrollos del planteamiento de Weyl, especialmente desde los años 1960, que siguen siendo estudiados hoy y discutidos en cuanto a su aplicación al análisis funcional. Resultan representativas las lecciones particularmente claras e informativas de Solomon Feferman en el volumen Hendricks, Pedersen y Jørgensen 2000.

Guerra sintió la necesidad de responder a la problemática de las definiciones impredicativas, que conocía de las conferencias impartidas por Henri Poincaré en Göttingen en Abril de 1909[27], por medio de una restricción consecuente de la habitual liberalidad en las definiciones. Pero aún hay más: esta restricción equivalía para él mismo a una automutilación, ya que la física teórica, en la que trabajaba simultáneamente, requería un análisis libre de trabas. La última parte de su libro, en la que Weyl discutía la aplicabilidad a la física de su análisis, o más bien la fractura entre esta matemática y la realidad (con especial mención del caso del tiempo, lo que le daba también ocasión de enfatizar la apreciación de Bergson sobre la diferencia entre el mundo conceptual de la matemática y la continuidad directamente experimentada; Weyl 1918, 68ss), se queda muy por detrás de lo que ya en tiempos de Weyl se exigía del análisis como algo natural. Valdría la pena sin embargo realizar un análisis comparativo[28].

El desplazamiento temporal con el que Weyl reaccionó críticamente ante la antinomia de Richard confirma lo que parece ser una ley general de los fenómenos culturales cuya configuración pregnante fue debida a la Guerra Mundial. En palabras de Kurt Flasch:

> *... Ahora [durante la Guerra] se retomaron modelos que habían sido desarrollados durante el último decenio anterior a la Guerra. Tal como la pintura abstracta no fue un resultado de la Guerra Mundial –el cubismo había despertado expectación con Las señoritas de Avignon de Picasso en 1907, Kandinsky había pintado sus primeros cuadros enteramente sin objetos en 1911/12–, igual que Spengler parece haber decidido en 1912 el título de su libro [*La decadencia de Occidente*, aparecido en 1918], así también Heidegger declaraba en su primera lección del semestre de posguerra en 1919* (La idea de la filosofía y el problema de las concepciones del mundo) *que la dirección esencial de su crítica a la filosofía del valor neokantiana había sido concebida ya en 1913.* [Flasch 2000, 387]

La Primera Guerra Mundial actuó como una lente magnificadora, a través de la cual se percibieron y expresaron las visiones precedentes con una explosividad nueva. Para dar aún más contornos a la manera que hemos presentado de leer el libro de guerra de Hermann Weyl, *Das Kontinuum*, a partir del contexto histórico, sería en mi opinión adecuado y valdría la pena realizar un análisis comparativo de distintas obras que se deben también a la Gran Guerra. No conozco otros casos tan claros para aquel tiempo dentro de la literatura matemática, pero en un contexto filosófico-matemático se podría muy bien

[27] Véase Poincaré 1910, y en particular la quinta conferencia: "Über transfinite Zahlen", p. 43–48.

[28] Véase el artículo de Erhard Scholz en el libro antes mencionado de Hendricks, Pedersen y Jørgensen (eds.), 195-217.

realizar una comparación de Weyl con, por un lado, las lecciones de Martín Heidegger mencionadas por Flasch y parcialmente investigadas al final de su libro, y por otro el célebre *Tractatus lógico-philosophicus* de Ludwig Wittgenstein. Hay materiales biográficos especialmente ricos relativos a los años de guerra de Wittgenstein, disponibles para estudiar la formación de su tratado, y el hecho de que Weyl y Wittgenstein comparten la autolimitación del pensamiento sobre un trasfondo de lógica formal anima de forma inmediata a una comparativa más precisa. El valor de este trabajo residiría en una mejor comprensión de aquella monumental crisis europea.

Para terminar esta sección, recordaré un episodio acontecido en Zurich que clarifica tanto la imagen sombría que Weyl tenía acerca de los fundamentos del análisis en los últimos años de guerra, como la perspectiva histórica a la que esto le condujo. Se trata de una apuesta con su colega en Zurich G. Pólya, redactada en manuscrito por el propio Weyl, cuyo original se encuentra hoy enmarcado y colgado en la Sala Hermann Weyl que es el lugar de los seminarios de matemáticas en la ETH (ver también Pólya 1972):

> *Se acuerda entre G. Pólya y H. Weyl una apuesta bajo las siguientes condiciones.*
>
> *En relación a las dos proposiciones siguientes de la matemática actual:*
>
> 1) *Todo conjunto acotado de números [reales] tiene un límite superior preciso.*
> 2) *Todo conjunto infinito de números incluye un subconjunto enumerable.*
>
> *Weyl profetiza:*
>
> A. *Dentro de 20 años, es decir a fines de 1937, el propio Pólya o la mayoría de los matemáticos que dan la pauta concederán que los conceptos de número, conjunto y enumerable, que intervienen en esas proposiciones en las que hoy nos apoyamos comúnmente, son completamente vagos, y que por ende tan poco se puede preguntar acerca de la verdad o falsedad de 1) y 2) como digamos sobre la verdad de los principios de la filosofía natural de Hegel.*
> B. *El propio Pólya, o la mayoría de los matemáticos que dan la pauta, habrán reconocido que las proposiciones 1) y 2), bajo una interpretación lo más clara y razonable posible de sus términos, son totalmente falsas (ya sea que todavía se discuten entonces varias interpretaciones posibles, ya que se haya alcanzado un acuerdo en torno a una de ellas); o bien, en el caso de que dentro de ese plazo se haya logrado encontrar una interpretación clara para ambas proposiciones, merced a*

> *la cual una al menos de ellas resulte verdadera, habrá sido necesaria una contribución creativa que dará un giro nuevo y original a la fundamentación de la matemática, y los conceptos de número y conjunto habrán ganado un contenido que hoy no conocemos ni intuimos.*

Weyl ganará la apuesta si sucede lo profetizado; y Pólya en caso contrario.

En caso de que, transcurrido el plazo, ambos apostantes no estén de acuerdo acerca de quién ha ganado, el conjunto de los profesores ordinarios de matemática, distintos de ambos contrayentes, de la E.T.H. y las Universidades de Zurich, Göttingen y Berlín, será apelado como colegio de jueces. Su juicio decidirá por mayoría, dándose la apuesta por indecisa en caso de empate de opiniones.

La parte que pierda se compromete a costear la publicación de un anuncio de las condiciones de la apuesta, y del hecho de que ha perdido, en los Anales de la Asociación de Matemáticos Alemanes [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung].

Zurich, el 9 de febrero de 1918

(Signaturas de los contrayentes y de los colegas testigos.)

Como es bien sabido, las cosas sucedieron de otro modo.

George Pólya (1887-1985) y Hermann Weyl (1885-1955)

El primer giro del desarrollo histórico tuvo lugar todavía en el marco de aquello que Weyl consideró posible al establecer su apuesta: él mismo se asoció con entusiasmo desde 1920 y por algunos años a la fundamentación intuicionista del análisis de Brouwer, como se ha dicho, enfoque que de todos modos había posible un análisis algo más rico que el de su obra de 1918. Aparentemente, en esta época veía en la idea de sucesión electiva [Wahlfolge, choice sequence] de Brouwer el inicio de una "contribución creativa" tal como la que se mencionaba en el punto B. de la apuesta como una posibilidad.

Pero a finales de los años 1920 comienzan para Hermann Weyl en persona una larga serie de años de silencio sobre los fundamentos del análisis. Y en este tiempo que no intervino personalmente en los debates, el aguijón político fue extraído poco a poco de la discusión sobre fundamentos, al convertirse la lógica matemática y la investigación de fundamentos en una disciplina especial:

> *Las cuestiones de sentido, metafóricamente cargadas, devinieron problemas de investigación técnicos sobre el lenguaje de las lógicas formales, sobre teorías de la demostración y teorías de la construcción... La empresa de las matemáticas no sufrió perjuicios, su libertad no se vio limitada.* [Mehrtens 1990, 295-96]

Así, la excitación que había conducido a aquella apuesta de Weyl contra Pólya se resolvió aparentemente en simple satisfacción.

El 26 de enero de 1935, apenas tres años antes de cumplirse el plazo de la apuesta, Hermann Weyl desde Princeton –adonde había emigrado desde Göttingen en octubre de 1933– decidió salir de la Asociación de Matemáticos Alemanes (DMV) como una medida de protesta política (sobre las razones, véase Schappacher y Kneser 1990, § 4.4). Ya sólo por esta razón, nunca apareció en los Anales de la DMV una notificación sobre la apuesta, y naturalmente que en 1937 no se le hubiera ocurrido a ninguno de los dos apostantes solicitar de, digamos, su colega berlinés Ludwig Bieberbach que participase en la decisión sobre la apuesta.

Sin embargo, otra guerra mundial más tarde, y hasta cierto punto en otro mundo, *El Continuo* de Hermann Weyl volvió a alcanzar validez: directamente para el propio Weyl, por una parte, ya que hacia el final de su vida, a comienzos de los años 1950, se inclinó de nuevo hacia su enfoque de 1918. Por otra parte, de aquello que podríamos llamar una exigencia existencial de desarrollar predicativamente el análisis, que Weyl había planteado bajo la influencia de la Guerra y había desarrollado formalmente en buena medida, surgió finalmente, a consecuencia de profundas investigaciones en teoría de la demostración, un nuevo tipo de repercusiones de la lógica matemática sobre el resto de la matemática, propagada por Solomon Feferman y sus sucesores bajo el título de *reverse mathematics* y *proof mining*, y que desde hace un tiempo puede felicitarse de hermosos logros[29]. Así, puede decirse, con cierta ironía, que estos refinados teoremas metamatemáticos (los cuales, para asombro del analista, nos regalan a partir de ciertas proposiciones de existencia inefectivas, y sin nuevos argumentos con contenido, valuaciones ciertamente efectivas) se deben a fin de cuentas a las privaciones de la Primera Guerra Mundial, y en este sentido resultan comparables a los abonos químicos.

3 EXCURSO: ¿ES POSIBLE UNA SOCIOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA?

La socióloga de Mainz Bettina Heintz publicó hace poco un libro con el título *Die Innenwelt der Mathematik* [Heintz 2000: *El mundo interior de la matemática*], que por un lado pasa revista y discute en detalle los distintos tipos de sociología constructiva de la ciencia y su posible aplicación a las matemáticas, y por otra parte desarrolla los resultados de un estudio de campo sociológico entre los matemáticos del Max-Planck-Institut de Matemática en Bonn. Heintz está obviamente impresionada por la institución de la demostración y por la celeridad, sin duda inaudita para los sociólogos, con la que en general se ponen de acuerdo los matemáticos sobre la aceptación de demostraciones y proposiciones, permitiéndoles abreviar sus discusiones. Por ello diagnostica una falta sistemática de "flexibilidad interpretativa" en los enunciados y argumentos matemáticos, de la que se sigue la enorme "coherencia" y el "consenso" que determinan la empresa actual de la matemática pura. (Estos dos conceptos los toma Heintz de los estudios de Margaret S. Archers sobre desarrollos (inter)culturales.) La consecuencia de este diagnóstico sociológico de conjunto es, para Bettina Heintz, que sus investigaciones sociológicas sólo parecen posibles en la medida en que se ocupen de la configuración histórica del moderno sistema de comunicación en matemática, o en su caso de investigar sus modificaciones futuras en la medida en que resulten ya discernibles (y aquí piensa sobre todo en los efectos concebibles de una propagación de las demostraciones por computador).

> *La matemática moderna se distingue por características que, de hecho, apenas dejan ya espacio para un análisis sociológico. Pero esto no significa que una mirada sociológica sobre la matemática quede descartada de antemano. La perspectiva sociológica es legítima y oportuna siempre que se trate de la reconstrucción de la trayectoria que condujo a aquella estructura epistémica que es típica de la matemática moderna, y que la hace única por su coherencia y racionalidad argumentativa.* [Heintz 2000, p. 274]

Los lectores que están más cerca de la propia matemática y de su historia (esto es, no los que pertenecen al grupo a quien iba dirigido el libro, los

[29] Ver por ejemplo la conferencia de Solomon Feferman en [Hendricks *et al.* 2000], así como el recientemente aparecido homenaje a Feferman [Sieg *et al.* 2002].

sociólogos) han reaccionado críticamente ante esta autolimitación de Heintz. Por ejemplo, el historiador Moritz Epple escribe en una reseña del libro[30]:

> *El reseñante no puede estar de acuerdo con esta conclusión resignada. ¿No sería posible..., en lugar de buscar una explicación sociológica a la coherencia y el consenso, emplearse en estudiar empíricamente en qué planos de la praxis matemática surgen de hecho disensos, dónde existen incoherencias y "comunidades epistémicas en competencia"? La respuesta de Heintz a esta cuestión –que el disenso y las interpretaciones en competencia sólo se dan en el plano metamatemático, no en la investigación matemática propiamente dicha; cf. Heintz 2000, p. 11 y p. 235s– será difícil de sostener tan pronto como se fije la vista con mayor precisión en la dinámica compleja de la práctica investigadora. ¿Cómo eligen los matemáticos entre distintas posibilidades de desarrollo, en situaciones de investigación concretas? ¿Qué objetos de investigación son considerados importantes, y qué métodos se juzgan prometedores? ¿Cuáles son los grupos que comparten tales juicios? ¿Qué trabajos matemáticos suministran modelos estilísticos para otros, y por qué? ¿Cómo y de qué manera se distribuye la reputación en la comunidad matemática? ¿Cómo compiten las ramas de la matemática por recursos, y cómo se deciden los correspondientes conflictos? Por desgracia, la obra de Heintz nos da pocas respuestas a estas preguntas. Existen aquí terrenos sin cultivar aún, disponibles para otros estudios sociológicos, estudios que sin embargo serán tanto más prometedores cuanto más de cerca entren en los problemas técnicos de la matemática.*

En este mismo sentido, con ocasión de un debate público sobre este libro en octubre de 2002, con motivo de la reunión de la Sociedad Alemana de Sociología en Leipzig, yo mismo propuse los siguientes ejemplos concretos, tomados de la matemática actual y de la historia reciente, ejemplos que en mi opinión invitan a una investigación sociológica o histórico-sociológica:

(i) El libro antes discutido de Hermann Weyl [1918], pues aquí la Guerra Mundial encuentra reflejo en qué tipo de análisis cabe justificar, desde el punto de vista de uno de los líderes matemáticos de la época. Por cierto que casi todo lo que el siglo XIX desarrolló en el análisis puede ser trasplantado y salvado en la teoría de Weyl –con la excepción del principio de Dirichlet–; sin embargo, para el análisis funcional tan importante en el XX, con sus espacios de funciones y operadores, la construcción de Weyl resulta un verdadero lecho

[30]Véase *Mathematische Semesterberichte* **47** (2000), p. 268. (N. del T.: Moritz Epple es autor de un magnífico estudio sobre la formación de la teoría moderna de nudos y los distintos "contextos epistémicos" en que tuvo lugar: *Die Entstehung der Knotentheorie*, Wiesbaden, Vieweg, 1999).

de Procusto. Así pues, si mi análisis es correcto y esta considerable amputación del análisis funcional debe agradecerse a la Primera Guerra, por intermediación de Weyl, para una consideración sociológica o histórica la matemática que cabe considerar fundada en el sentido de este enfoque weyliano queda en el mismo plano que otros epifenómenos de la Gran Guerra, por lo que puede y debe ser tratada en paralelo con ellos.

(ii) Yendo algo más atrás en la historia de nuestra disciplina, a la segunda mitad del siglo XIX, encontramos la disputa entre Leopold Kronecker y Felix Klein sobre las consecuencias del teorema de Kronecker respecto a la imposibilidad de resolventes uniparamétricas para la ecuación general de quinto grado, demostrado por Klein como guinda de su libro sobre el icosaedro [Klein 1993, II, 5, §11]. Kronecker reprochó a Klein que propagaba métodos de resolución carentes de valor algebraico, ya que sobre la base del teorema de imposibilidad de Kronecker no pueden funcionar sin lo que llamaban "irracionales accesorios". Klein extraía precisamente la conclusión opuesta a partir del teorema de imposibilidad de Kronecker: ya que sin irracionales accesorios no pueden darse resolventes uniparamétricas, debemos aceptar estos irracionales accesorios, si no queremos interrumpir dogmáticamente el progreso de la ciencia[31]. El caso resulta interesante, ya que ambos matemáticos estaban plenamente de acuerdo respecto a los hechos matemáticos (Klein demuestra incluso el teorema de Kronecker), pero sobre esa base indiscutible extraían conclusiones contrarias respecto a los pasos que debían darse a continuación. He aquí pues un ejemplo de cómo la mera constatación de la coherencia y del consenso respecto a los hechos matemáticos pasa por alto el punto esencial. Para comprender la controversia, debería más bien realizarse el esfuerzo de emplear categorías psicológicas, sociológicas y de política disciplinar, a propósito de la comunidad de matemáticos en aquel tiempo.

(iii) Los matemáticos no sólo demuestran, no sólo tienden a estar de acuerdo muy rápidamente sobre qué proposiciones y argumentos son válidos y cuáles no: los matemáticos tienen también la obligación de 'comprender' sus resultados. Esta exigencia hermenéutica, por así decir, conduce entre otras cosas a que, en la medida de lo posible, se ofrezcan múltiples demostraciones diferentes para teoremas centrales (basta pensar en Gauss y sus múltiples demostraciones de la ley de reciprocidad cuadrática). Esta manera de acercarse a los resultados importantes, casi al modo de las ciencias humanas, es mucho más accesible a las consideraciones sociológicas que el discurso demostrativo habitual, en el que se detiene Heintz.

(iv) Las matemática pura moderna no sólo está dominada por la institución de la demostración, que Bettina Heintz sitúa en primer plano, sino

[31]Klein realizó una exposición breve de la controversia, desde su punto de vista, en [1922, 503-504]; véase [Petri y Schappacher 2004]. (N. del T.: El argumento de Klein sigue una línea análoga a los de Cantor en su defensa frente a Kronecker de los números reales y de sus números transfinitos; ver los *Grundlagen* de 1883 en G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Hildesheim, G. Olms, 1966, especialmente pp. 172–175 y 181–83).

que nos ofrece también ramas enteras caracterizadas muy especialmente por conjeturas precisas, que por supuesto no están validadas por demostraciones. Típicamente, estas conjeturas son tan generales y tan difíciles que estamos todavía muy lejos de su demostración completa. Pienso aquí sobre todo en lo que Barry Mazur [1997] ha llamado conjeturas arquitectónicas, digamos las conjeturas de Bloch-Beilinson-Kato. Este fenómeno modifica la "estructura epistémica" detectada por Heintz en la matemática actual en una manera que merece ser investigada sociológicamente en más detalle.

Si bien Bettina Heintz reconoció en el debate público de Leipzig que encontraba interesantes algunos de estos puntos, en particular el (iv), casos como el (i) los relativizó al considerarlos "pequeños influjos" esporádicos de factores extra-matemáticos, que no tienen significación para una valoración sociológica de conjunto de la matemática moderna.

Sin embargo, el principal punto de desacuerdo tuvo que ver (tal como escribe Epple en la reseña antes citada) con el grado de competencia especializada que uno está dispuesto a aceptar como presupuesto para el trabajo en sociología de la matemática. El sociólogo de la ciencia y la técnica Wolfgang Krohn (Bielefeld) se opuso rotundamente, en el debate de Lepzig, a admitir en sociología el planteamiento de problemas cuyo manejo presuponga una comprensión especializada de la matemática. Si se considera la posición de Heintz sobre el trasfondo de esta posición de principio, no sólo resulta razonable su demarcación de la sociología de la matemática, sino que sobre todo se presentan otras cuestiones distintas de las indicadas en (i) y (ii). Un amplio programa de investigación que queda entonces perfilado se dirigiría a disolver la contraposición de racionalidad y socialidad, esto es, a comprender cómo las variaciones que tuvieron lugar durante el siglo XIX en las estructuras de comunicación internas de todas las ciencias -variaciones caracterizadas por la profesionalización, la internacionalización y la formalización- ofrecen una explicación sociológica de la estructura epistémica actual de estas ciencias, tal como la que Heintz desea ver para la matemática. Un problema particular, enfatizado por el filósofo de la matemática Torsten Wilholt (Bielefeld) en el debate de Leipzig, es si dichos cambios en las estructuras de comunicación alcanzan realmente a explicar la institucionalización de la demostración en la matemática moderna (y no sólo una cierta formalización del lenguaje).

4 Matemática alemana - Deutsche Mathematik

Quizá algunos de ustedes hayan pensado espontáneamente en el nazismo al conocer el título de mi conferencia: al menos aquellos que sepan que yo he trabajado repetidas veces sobre los matemáticos en el Tercer Reich. Para mí, sin embargo, hoy no se trata

- ni de considerar las consecuencias de dicho régimen para los matemáticos,

- ni del 30% de matemáticos alemanes que perdieron sus plazas entre 1933 y 1937 (también Hermann Weyl abandonó Göttingen, adonde había retornado desde Zürich en 1930 como sucesor de Hilbert, en octubre de 1933 y marchó al Institute for Advanced Study de Princeton; las razones fueron tanto un rechazo fundamental de la política nazi, como la preocupación concreta por su mujer judía, Hella);

- ni tampoco quiero ocuparme de la vertiginosa caída en el número de estudiantes de matemática, que en el verano de 1939 representaban sólo un 7,2% de la cifra en el verano de 1932;

- ni de la politización de los Institutos matemáticos en Alemania (¡basta pensar en Göttingen o en Frankfurt!) y en los dominios anexionados;

- ni tampoco de las luchas políticas dentro de la disciplina bajo el signo de la era de Hitler, ya sea en lugares aislados o en la Asociación de Matemáticos Alemanes (DMV).

Mi tema hoy y aquí son los rastros más sutiles de la intromisión de categorías políticas en la matemática misma. Sin embargo, al realizar un intento de rastreo sutil no conviene tampoco ignorar a aquellos que más pataleaban. Por ello no me resisto a hablar de Ludwig Bieberbach (1886-1982).

El día 13 de junio de 1933 el profesor de Berlín y notable matemático Bieberbach estableció por vez primera, en una presentación ante la Clase de Física y Matemática de la Academia de Ciencias de Berlín, una conexión entre el pensamiento intuitivo y las razas (enlazando con un comentario de Felix Klein relativo al asunto). Desde comienzos de 1934, adaptó la tipología de la psicología de la percepción de Jaensch, muy respetada entonces, mezclándola con categorías racistas para clasificar los diferentes estilos de fundamentación, concepción y transmisión de la matemática, correspondientes a la raza, el origen o la nacionalidad. Su tratamiento sistemático fue más allá de una simple división entre los estilos matemáticos alemán y judío. A los tipos básicos correspondientes en Jaensch, J y S, los subdividió de acuerdo con diferencias de origen. Estas teorías pronto encontraron dificultades al intentar encajar en el retículo los individuos de la historia de la matemática. La clasificación de Hilbert por ejemplo resultó un notorio problema, que Bieberbach "resolvió" de varias maneras en distintos lugares[32].

Las teorías racistas de Bieberbach sobre los estilos matemáticos resultan algo menos asombrosas cuando se tiene en cuenta la moda de los nacionalismos científicos en la Primera Guerra Mundial, de la que hemos ofrecido antes los ejemplos del Dr. Bérillon y de Pierre Duhem. Sin embargo, el giro que dio este hombre no resulta fácil de comprender, teniendo en cuenta que durante

[32]El párrafo anterior se retoma, con pocas modificaciones, de Schappacher y Kneser 1990, § 4.3. –Remito a este escrito para referencias bibliográficas más precisa e informaciones ulteriores.

los años veinte fue uno de los escasos ejemplos de profesores alemanes que se mantuvieron fieles a la República de Weimar, en lugar de soñar con el imperio del Kaiser. Y el lado humano de su actuación desde el otoño de 1933 resulta especialmente duro si se consideran sus declaraciones acerca de Edmund Landau, judío y especialista en teoría de números analítica en Göttingen.

Poco después de la Primera Guerra, había tenido con Landau una correspondencia entre colegas perfectamente correcta y muy respetuosa. Pero en 1933-1934 mencionaba, como ejemplo típico de un enfoque del análisis ajeno a lo alemán, el modo en que Landau introducía el número π en lecciones para alumnos de primer año, sin más comentarios, como el número positivo x más pequeño tal que $\cos(x/2) = 0$ (donde cos viene definida por su desarrollo en series de potencias). Pero no le bastaba con esto, sino que en una conferencia de Abril de 1934 elogió a los estudiantes que habían boicoteado el 2 de Noviembre de 1933 la lección de Landau, y con ello le habían impulsado a pedir el retiro como profesor, diciendo que para él había sido una "conducta de hombres" contra el viejo profesor judío[33].

Ludwig Bierberbach (1883-1982)

[33]Sobre Bieberbach y Landau, cf. Schappacher 1991; y Schappacher, *The Nazi era: The Berlin way of politicing mathematics*, en Begehr, *Koch et al.* 1998, 127–136, así como la literatura allí citada.

El líder de dicho boicot fue el entonces estudiante de matemática en Göttingen y hombre de las SA[34], Oswald Teichmüller. Los objetivos y los motivos del boicot fueron expuestos por Teichmüller en una carta incalificable a Landau, donde puede leerse entre otras cosas[35]:

> *Para mí no es cuestión de causarle a usted dificultades por ser judío, sino más bien, manteniendo en lo posible el estado de cosas, guardar a los estudiantes del segundo semestre de ser educados por un tutor cuya raza es totalmente ajena a ellos, precisamente en cálculo diferencial e integral. No pongo en duda, como tampoco lo hace ningún otro, su capacidad para impartir una formación matemático-científica puramente internacional ante estudiantes adecuados de cualquier origen. Pero también sé que muchas lecciones académicas, y entre ellas el cálculo diferencial e integral, tienen a la vez un valor formativo, y no sólo introducen al alumno en un mundo conceptual nuevo, sino que le trasportan a una situación espiritual distinta. Y como la situación espiritual de cada cual depende de su espíritu, que debe adaptarse a ella, y como dicho espíritu depende muy esencialmente de la composición racial de cada cual, según principios que no son nuevos, sino conocidos desde hace largo tiempo, no resulta recomendable como norma que por ejemplo los alumnos arios reciban formación de un maestro judío. De esto puedo hablar por experiencia propia. Al alumno le quedan pues dos caminos: o bien toma de las lecciones del maestro sólo el esqueleto matemático-internacional, y lo revista con su propia carne. Esto sería un trabajo productivo matemático-filosófico, al que sólo pueden aspirar unos pocos. Los demás dejan que las lecciones actúen sólo sobre su memoria y sobre la superficie externa de su entendimiento, y una vez superado el examen estatal se esfuerzan por olvidar lo antes posible todos los asuntos superiores. El tercer camino, asumir el material en esa forma extraña, conduce a una degeneración espiritual, cosa que usted hoy por hoy no podrá, y probablemente tampoco querrá, proponer a un estudiante. Y es tan poco probable el caso de que transmita usted el núcleo matemático sin impartirle una coloración nacional propia, como es seguro que un esqueleto sin carne no puede correr, sino sólo caer amontonado y descomponerse.*

[34](N. del T.) Las SA (*Sturmabteilung*, literalmente tropas relámpago) era una facción uniformada del partido Nazi, los también llamados "camisas marrones".

[35]La carta completa y otros documentos que respaldan las manifestaciones de Teichmüller (quien había nacido en 1913) pueden encontrarse en Schappacher y Scholz 1992.

Y termina con impudor:

> *Se trata pues, en esencia, de volver al estado de cosas del semestre anterior. El Sr. Dr. [Werner] Weber está dispuesto a reemplazarle en las lecciones y las clases prácticas. Como ya no existe la incertidumbre del semestre anterior, no sería necesario que discutiera usted con él de nuevo cada una de las clases, sino que él se ocuparía de las todas lecciones, al menos de cada parte, por su cuenta. También nosotros lo preferimos así. Considerando que el único que verdaderamente realiza un sacrificio en todo ello es el Sr. Dr. Weber, quien dobla su trabajo en interés de sus compañeros, mientras que a usted le basta con mantenerse al margen de las lecciones sin sufrir ningún inconveniente pecuniario o de otro tipo, creo haberle hecho una propuesta que resulta verdaderamente fácil de aceptar.*

Hasta aquí las palabras de Oswald Teichmüller, entonces estudiante de tercer curso. Por lo demás, Teichmüller trabajó en Göttingen con mucho éxito sobre problemas de teoría de números algebraicos en contacto con Ernst Witt y también con Helmut Hasse, hasta que por motivos políticos se trasladó a Berlín a comienzos de 1937, con el fin de estar cerca de Bieberbach. El Instituto Matemático de Göttingen no le resultaba "lo bastante puesto al día [*gleichgeschaltet*]", en la jerga de aquellos tiempos[36].


Oswald Teichmüller (1913-1943) y Edmund Landau (1877-1938)

[36] "Gleichschaltung" era un término técnico introducido por los Nazis para significar la modificación de estructuras sociales –revistas, asociaciones, institutos, etc.– a fin de hacerlas compatibles con la ideología nazi y con la estructura del partido y el estado nazi (por ejemplo adoptar el principio del "Führer").

Con el cambio de lugar aconteció también un cambio en su campo de trabajo, que obviamente venía también influido por consideraciones ideológicas: del álgebra a la teoría de aplicaciones conformes y cuasi-conformes, un dominio que le parecía claramente alemán, muy en la línea de Bieberbach. Sus trabajos en este campo dieron lugar a su mayor *claim to fame*: lo que aún hoy se llama teoría de Teichmüller.

Las huellas de una valoración con carga política de las distintas disciplinas matemáticas pueden seguirse en el caso de Teichmüller hasta en sus trabajos matemáticos. Sólo daré un ejemplo de ello, tomado del §6 del trabajo: Demostración de la dependencia analítica del módulo conforme de una familia de toros complejos analítica con respecto a sus parámetros [1944], que apareció sólo tras su muerte, pero que evidentemente no fue escrito más tarde de 1942. Este trabajo y otros dos que le siguen en el volumen 7 de la revista $\mathfrak{Deutsche}$ $\mathfrak{Mathematik}$[37], representan los últimos intentos de Teichmüller por apuntalar con teoremas rigurosamente demostrados el gran programa heurístico que desarrolló desde 1938, sobre la dependencia entre aplicaciones cuasi-conformes y diferenciales cuadráticos sobre superficies de Riemann. Al final del trabajo citado se da una nueva demostración para el caso de género 1 del hecho, conocido desde el siglo XIX, de que la función modular $j(w)$ es una aplicación conforme. Teichmüller menciona las demostraciones clásicas de este hecho por medio de la función $\mathcal{P}$ de Weierstrass, o mediante períodos de Riemann, pero plantea la siguiente objeción:

> *Mas no quisiera deducir algo tan geométrico como esta aplicación conforme a partir de desarrollos en serie.* [Teichmüller 1944, 325, p. 693 de Collected Papers]

Esta frase recuerda, y no de manera imprecisa, a las críticas de estilo que Bieberbach planteaba a la introducción del número π por Landau. –Y un poco más adelante, en la misma página, dice:

> *En todo caso, no pretendo que el esbozo de demostración que presentaré en lo que sigue satisfaga ya todas mis exigencias. Me contentaré si mis desarrollos despiertan en una parte de los lectores el sentido de qué aspecto tendría una teoría de la aplicación conforme y de los invariantes conformes independiente, en buena medida, de la teoría de funciones conocida.*

Muchos autores retomaron, tras la tesis doctoral de Bernhard Riemann [1851, sección 2, p. 5], la interpretación geométrica de las funciones holomorfas (o anti-holomorfas) con derivada no nula como aplicaciones conformes, que respetan los ángulos. Entre otros, Ludwig Bieberbach le dedicó un librito en el

[37]En conjunto se trata pues de los números 30, 31 y 32 de Teichmüller, *Collected Papers* [1982].

primer año de la Guerra [1915]. Pero en el desarrollo de la teoría de funciones según Cauchy o según Weierstrass, no desempeñaba ningún papel.

Teichmüller no fue el único matemático de su tiempo que se esforzó por lograr un desarrollo con métodos lo más puros posible de la disciplina de su interés. En el campo del álgebra, por ejemplo, la escuela de Helmut Hasse desarrolló una actitud análoga, en los años treinta, respecto a la aritmética de los cuerpos de funciones sobre un cuerpo de constantes finito, que iba acompañada de la tesis de que el enfoque preferido por esta escuela respecto a las cuestiones de geometría algebraica sobre cuerpos finitos sería particularmente adecuada al asunto. Ambas escuelas tuvieron contactos esporádicos: Teichmüller formuló varias conjeturas sobre cuerpos de funciones algebraicas que eran la traducción de situaciones que había investigado en la teoría de módulos de superficies de Riemann, y el algebrista Eichler demostró algunas (véase Schappacher y Scholz 1992, 20-21). El intercambio no fue siempre tan fructífero, sino que podía también degenerar en un diálogo de sordos, aunque en esto resulta difícil juzgar en qué medida intervinieron diferencias personales y políticas[38].

En la cita anterior de su trabajo [1944], Teichmüller da expresión a la preferencia ideológica por la aproximación geométrica a problemas de aplicaciones conformes, frente a otros métodos de la teoría de funciones. Al establecer este hecho no prejuzgo la calidad matemática de sus métodos de demostración, ni tampoco su utilidad para el desarrollo de la teoría de Teichmüller. Me limito al intento de rastrear las huellas de reminiscencias políticas en sus argumentos, lo cual se nos muestra a las claras en dicho trabajo, mientras que en las cartas queda sin aclarar.

En Septiembre de 1943, durante el retorno de las tropas alemanas, en algún lugar de la zona del Dnieper, Oswald Teichmüller encontró la muerte. A comienzos de 1943 había renunciado a un seguro puesto como descifrador en Berlín, siguiendo la llamada de Brunilda, que le invitaba a participar en esa operación suicida.

Referencias

[1] Stéphane Audoin-Rouzeau y Annette Becker, *14-18, Retrouver la guerre*, Paris, nrf, Gallimard, 2000.

[2] Heinrich Begehr, *Mathematik in Berlin*, Shaker Verlag, Aachen, 1998.

[3] H. G. W. Begehr, H. Koch, J. Kramer, N. Schappacher, E.-J. Thiele, eds., *Mathematics in Berlin*, Berlin · Basel · Boston, Birkhäuser Verlag, 1998.

[4] Ludwig Bieberbach, *Einführung in die konforme Abbildung*, Berlin, Walter de Gruyter, 1915.

[38] Véase la correspondencia de 1942 en el *Nachlass* Helmut Hasse (*Handschriftenabteilung* de la NSUB Göttingen), donde Hasse no acepta una solución "exacta" ofrecida por Teichmüller a una cuestión que le había planteado en una conversación de 1939. Para más detalles puede verse la versión alemana de este trabajo (cf. nota 1).

[5] HENK BOS, *Redefining Geometrical Exactness - Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, New York · Berlin, Springer Verlag, 2001.

[6] CHRISTOPHE CHARLE, *La République des universitaires 1870-1940*, Paris (Seuil) 1994.

[7] GIOVANNA CIFOLETTI, *The creation of the history of algebra in the 16th century*, en C. GOLDSTEIN, J. RITTER, J. J. GRAY, EDS., *L'Europe Mathématique - Mathematical Europe*, Paris, Maison des Sciences de l'Homme, 1996, 123–142.

[8] WILLIAM COLEMAN, *French views of German science*, New York, Arno Press, 1981.

[9] PIERRE DUHEM, *La science allemande*, Paris, Hermann, 1915.

[10] KURT FLASCH, *Die geistige Mobilmachung. Die deutschen Intellektuellen und der Erste Weltkrieg*, Berlin, Alexander Fest Verlag, 2000.

[11] BETTINA HEINTZ, *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Wien · New York, Springer Verlag, 2000.

[12] V. F. HENDRICKS, S. A. PEDERSEN, K. F. JØRGENSEN (EDS.), *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, Dordrecht · Boston · London, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[13] FELIX KLEIN, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, eds. R. Fricke, H. Vermeil, Berlin, Springer, 1922.

[14] FELIX KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, edición con introducción y comentarios de P. Slodowy, Birkhäuser & Teubner, 1993.

[15] BARRY MAZUR, Conjecture, *Synthese* **111** 12 (1997), 197–210.

[16] HERBERT MEHRTENS, *Moderne · Sprache · Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt, Suhrkamp-Verlag, 1990.

[17] BIRGIT PETRI Y N. SCHAPPACHER, *From Abel to Kronecker: Episodes from 19th Century Algebra*; en O.A. LAUDAL & R. PIENE EDS., *The Legacy of Niels Henrik Abel (The Abel Bicentennial, Oslo 2002)*, Berlin, Heidelberg, etc., Springer Verlag, 2004, pp. 227–266.

[18] ÉMILE PICARD, *Pour la Vérité 1914-1915, Etudes publiées sous le patronage des Secrétaires perpétuels des cinq Académies*, Paris, Perrin & Cie., 1916.

[19] ÉMILE PICARD, Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle, *Bull. Sc. Math.* **41** (1917), 237–260.

[20] HENRI POINCARÉ, *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, ... gehalten zu Göttingen, 22.-28. April 1909*, Leipzig · Berlin, Teubner Verlag, 1910.

[21] GEORGE PÓLYA, Eine Erinnerung an Hermann Weyl, *Mathematische Zeitschrift* **126** (1972), 296–298.

[22] Bernhard Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation Göttingen 1851; *Gesammelte mathematische Werke*, p. 3–48.

[23] David Rowe, "Jewish Mathematics" at Göttingen in the era of Felix Klein, *Isis* **77** (1986), 422–449.

[24] Norbert Schappacher (con la colaboración de Martin Kneser), *Fachverband - Institut - Staat, Streiflichter auf das Verhältnis von Mathematik zu Gesellschaft und Politik in Deutschland seit 1890 unter besonderer Berücksichtigung der Zeit des Nationalsozialismus*, en G. Fischer et al. ed., *Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV*, Braunschweig, Vieweg, 1990, p. 1-82.

[25] Norbert Schappacher, Edmund Landau's Göttingen - From the life and death of a great mathematical center (Talk at the Dedication of the Landau Center for Research in Mathematical Analysis, Jerusalén, 28 Febrero 1989), *Mathematical Intelligencer* **13** (1991), 12–18.

[26] Norbert Schappacher & E. Scholz (eds.), Oswald Teichmüller - Leben und Werk, mit Beiträgen von K. Hauser, F. Herrlich, M. Kneser, H. Opolka, N. Schappacher, E. Scholz; *Jahresbericht der DMV* **94** (1992), 1–39.

[27] Erhard Scholz, ed., *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a general introduction to his scientific work*, Basel · Boston · Berlin, Birkhäuser Verlag, 2001.

[28] Wilfried Sieg et al., *Reflections on the foundations of mathematics. Essays in honor of S. Feferman*, ASL Lecture Notes in Logic, Natick (Mass.), A K Peters, 2002.

[29] O. Teichmüller, *Gesammelte Abhandlungen - Collected Papers*, ed. por L. V. Ahlfors & F. W. Gehring, Berlin · Heidelberg · New York, Springer Verlag, 1982.

[30] O. Teichmüller Beweis der analytischen Abhängigkeit des conformen Moduls einer analytischen Ringflächenschar von den Parametern, *Deutsche Mathematik* **7** (1944), 309–336; reimpreso en sus *Collected Papers*.

[31] Roland Weitzenboeck, *Invariantentheorie*, Groningen, P. Noordhoff, 1923.

[32] Hermann Weyl, Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe, *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter* **7** (1910), 93–95 y 109–113; *Gesammelte Abhandlungen*, tomo I, 298–304.

[33] Hermann Weyl, *Das Kontinuum*, Leipzig, Veit & comp, 1918. Reimpreso en New York, Chelsea, sin fecha.

[34] Hermann Weyl, Erkenntnis und Besinnung (Ein Lebensrückblick), *Studia Philosophica*, 1954; *Gesammelte Abhandlungen*, tomo IV, p. 631–649.

Norbert Schappacher
Université Louis Pasteur, Strasbourg
Correo electrónico: `schappa@math.u-strasbg.fr`