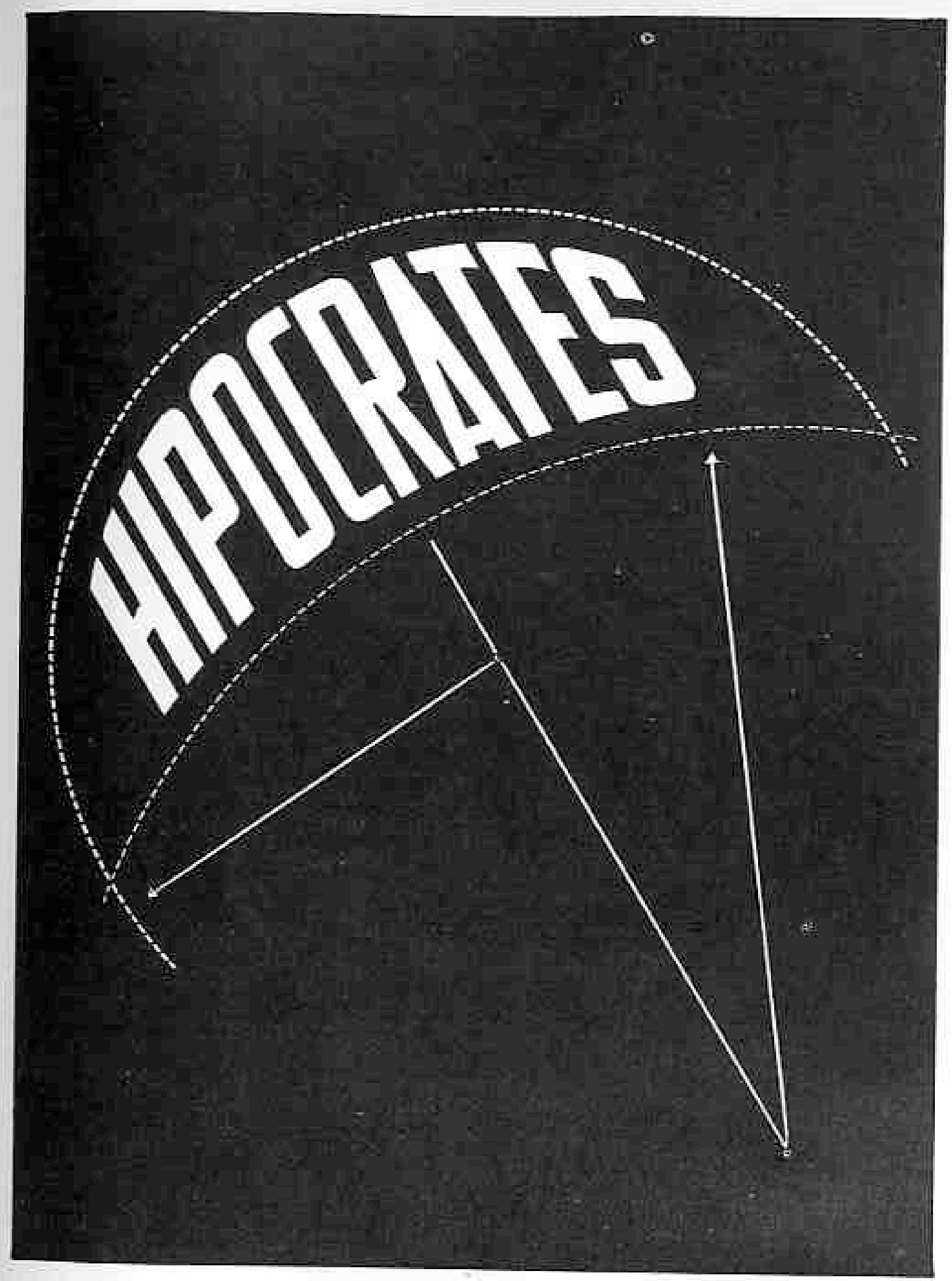
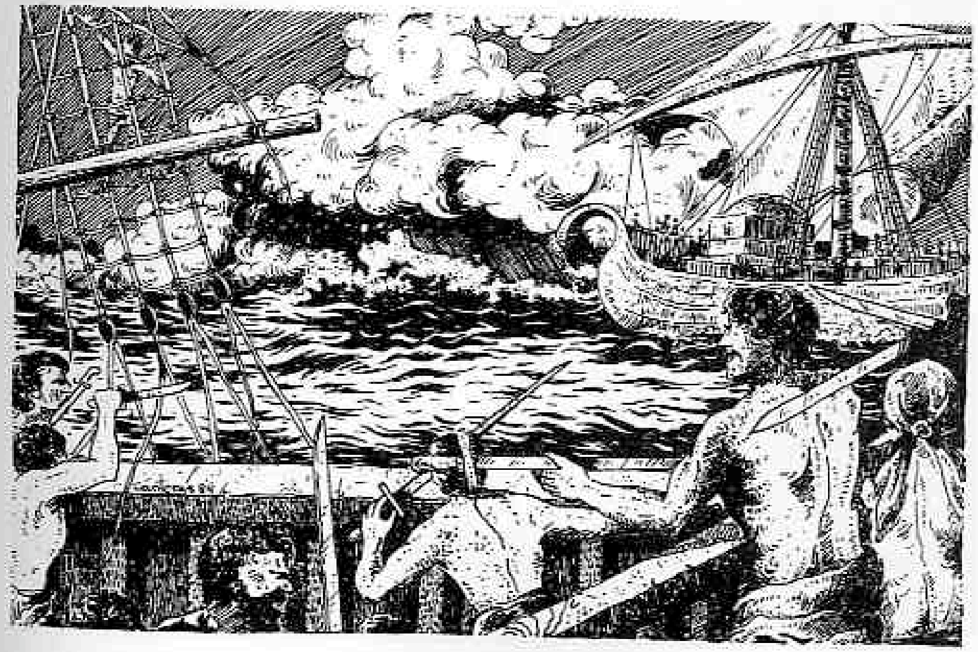

HIPOCRATES

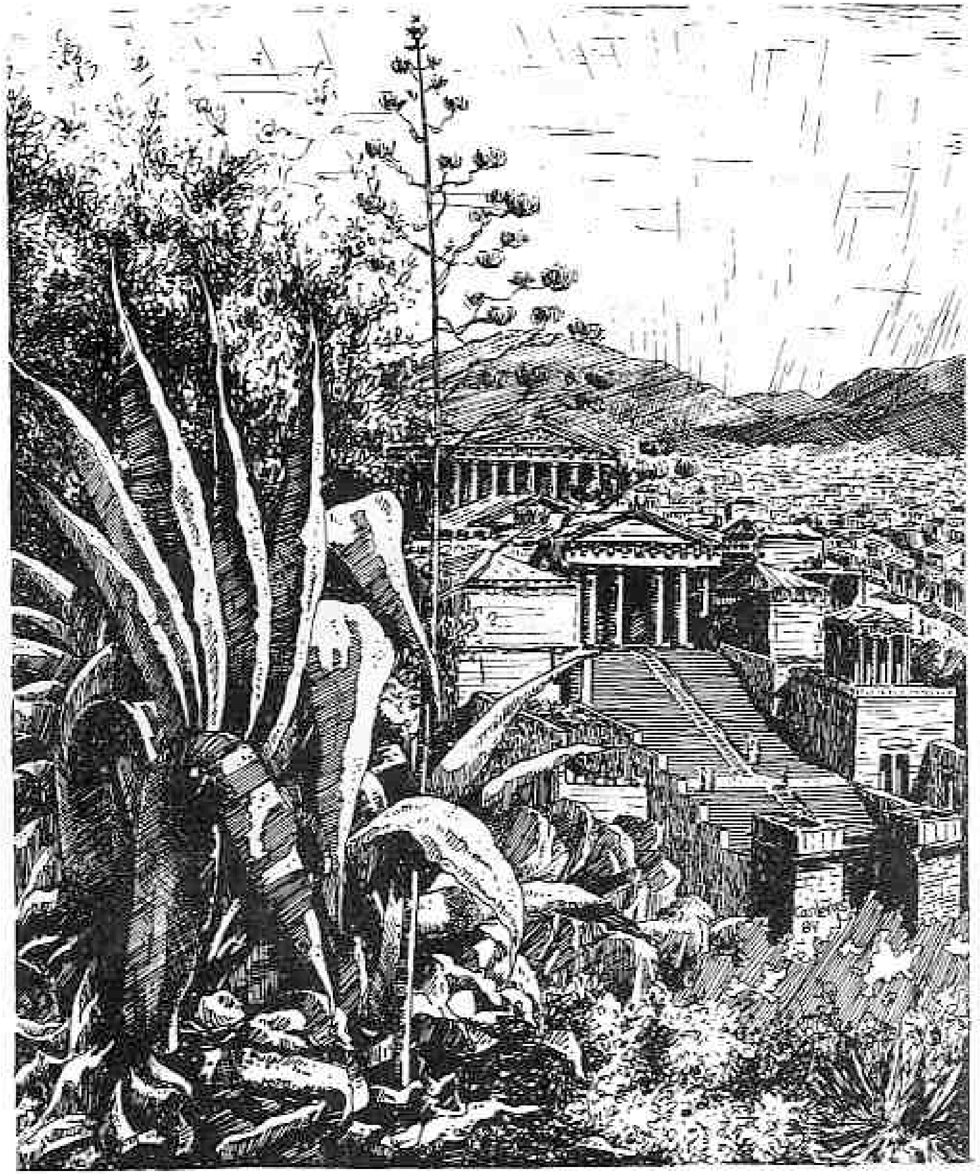
HIPOCRATES

HIPÓCRATES NACIÓ EN LA ISLA DE QUÍOS ALREDEDOR DEL AÑO 470 A. DE J.C., DEDICÁNDOSE — EN UN PRINCIPIO — AL COMERCIO.

SEGÚN ARISTÓTELES, FUE DESPOSEIDO DE SUS BIENES POR LOS ADUANEROS DE BIZANCIO. OTROS AUTORES, SIN EMBARGO, OPINAN QUE LA RUINA DE HIPÓCRATES SE DEBIÓ A QUE LAS NAVES EN LAS QUE TRANSPORTABA SUS MERCANCÍAS FUERON CAPTURADAS POR LOS PIRATAS.



SEA CUAL FUERE LA CAUSA QUE MOTIVÓ LA PÉRDIDA DE SU FORTUNA, PARECE SER QUE HIPÓCRATES LLEGÓ A ATENAS ALREDEDOR DEL AÑO 430 A. DE J.C., CON LA ILUSIÓN DE RECUPERAR SUS BIENES RECURRIENDO A LA JUSTICIA.

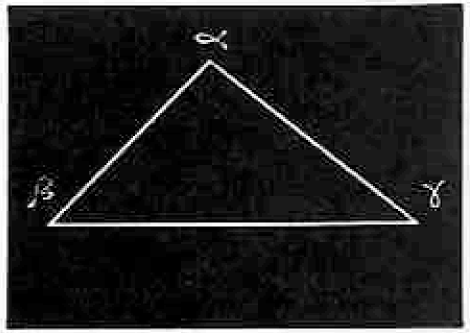


LAS ESPERANZAS DE HIPÓCRATES NO DIERON EL FRUTO DESEADO. POR ESTE MOTIVO, CONFIANDO EN SANEAR SU DETERIORADA ECONOMÍA, ABRIÓ UNA ESCUELA DE GEOMETRÍA.

NI QUE DECIR TIENE QUE, EN ESTE "ESTABLECIMIENTO", LOS ALUMNOS PAGABAN AL MAESTRO POR LAS ENSEÑANZAS RECIBIDAS.

PROCLO ASEGURA QUE HIPÓCRATES FUE UNO DE LOS PRIMEROS AUTORES QUE ESCRIBIÓ UN LIBRO DE TEXTO TITULADO "ELEMENTOS". DESGRACIADAMENTE, ESTA OBRA, COMO TANTAS OTRAS, NO HA LLEGADO HASTA NOSOTROS.

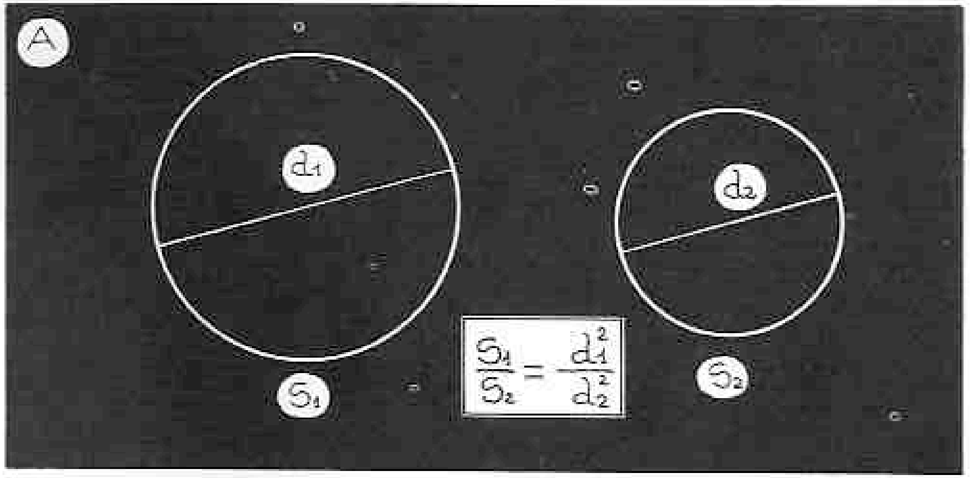
SE CREE QUE HIPÓCRATES SE SIRVIÓ DE LAS LETRAS PARA DESIGNAR LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS. NO OBSTANTE, ALGUNOS ESPECIALISTAS ADMITEN QUE ESTE "RECURSO" YA ERA HABITUAL ENTRE LOS PITAGÓRICOS.

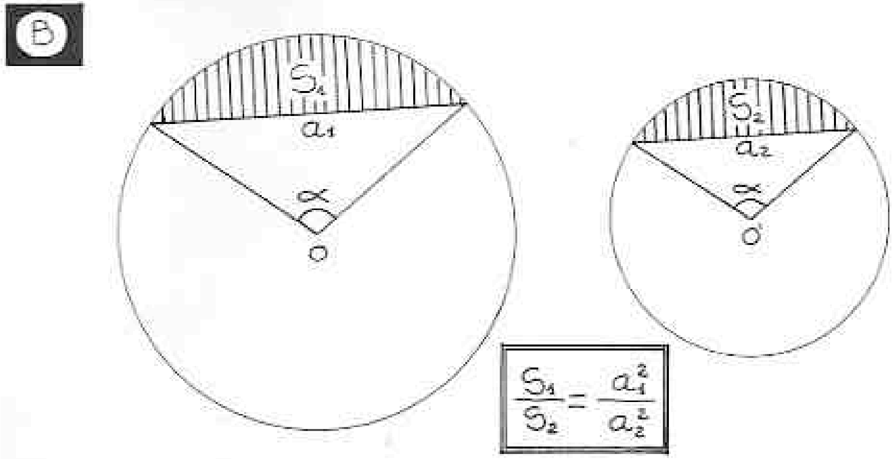


PODRÍA DECIRSE QUE HIPÓCRATES FUE EL PADRE DE LA GEOMETRÍA DEL CÍRCULO. DE ACUERDO CON ALGUNOS FRAGMENTOS DE LA OBRA "HISTORIA DE LA GEOMETRÍA" DE EUDEMO DE RODAS (DISCÍPULO DE ARISTÓTELES), CONSERVADOS POR SIMPLICIO, SE DEBEN A HIPÓCRATES LAS DOS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

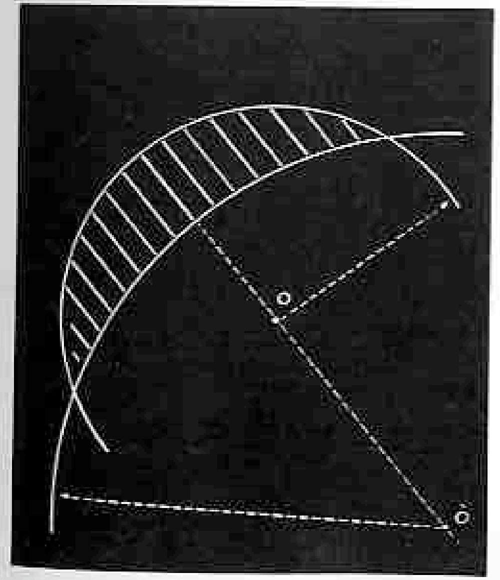
A) "LOS CÍRCULOS SON ENTRE SÍ COMO LOS CUADRADOS DE SUS DIÁMETROS".

B) "LOS SEGMENTOS SEMEJANTES DE CÍRCULO SON ENTRE SÍ COMO LOS CUADRADOS DE SUS BASES (CUERDAS)".





SIN DUDA ALGUNA, HIPÓCRATES SE HIZO MERECEDOR DE UN PUESTO RELEVANTE DENTRO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA, POR SUS ESTUDIOS SOBRE LOS PROBLEMAS DE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO Y LA DUPLICACIÓN DEL CUBO.

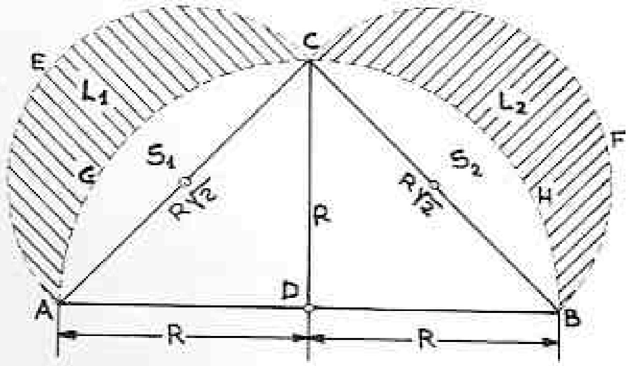


EN CUANTO SE REFIERE AL PRIMERO DE LOS DOS PROBLEMAS CITADOS, HIPÓCRATES — EN SU AFÁN POR LLEGAR A UNA SOLUCION SATISFACTORIA — FUE CAPAZ DE CUADRAR UNAS DETERMINADAS FIGURAS, LIMITADAS POR DOS ARCOS CIRCULARES DE RADIOS DISTINTOS, LLAMADAS "LÚNULAS", DEBIDO A SU FORMA PECULIAR.

AL PARECER, ESTOS FUERON LOS PRIMEROS CASOS EN LOS QUE, CON EL ÚNICO AUXILIO DE LA REGLA Y EL COMPÁS, SE DETERMINARON LAS ÁREAS DE FIGURAS LIMITADAS POR DOS CURVAS.

SIGUIENDO A ALEJANDRO DE AFRODISIA (FAMOSO COMENTARISTA DE LAS OBRAS DE ARISTÓTELES), HIPÓCRATES LLEVÓ A CABO LAS DOS CUADRATURAS SIGUIENTES:

- ① SOBRE LOS CATETOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES — INSCRITO EN UN SEMICÍRCULO — DESCRIBIÓ DOS SEMICÍRCULOS. A PARTIR DE ESTA CONSTRUCCIÓN, DEMOSTRÓ QUE EL ÁREA DE UNA DE LAS DOS LÚNULAS (DETERMINADAS SOBRE LOS CATETOS) ERA IGUAL A LA MITAD DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO DADO. CON ESTO, LA LÚNULA HABÍA SIDO CUADRADA.



$$\frac{\text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO ACB}}{\text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO AEC}} = \frac{(2R)^2}{(R\sqrt{2})^2} = \frac{4R^2}{2R^2} = 2 \Longrightarrow$$

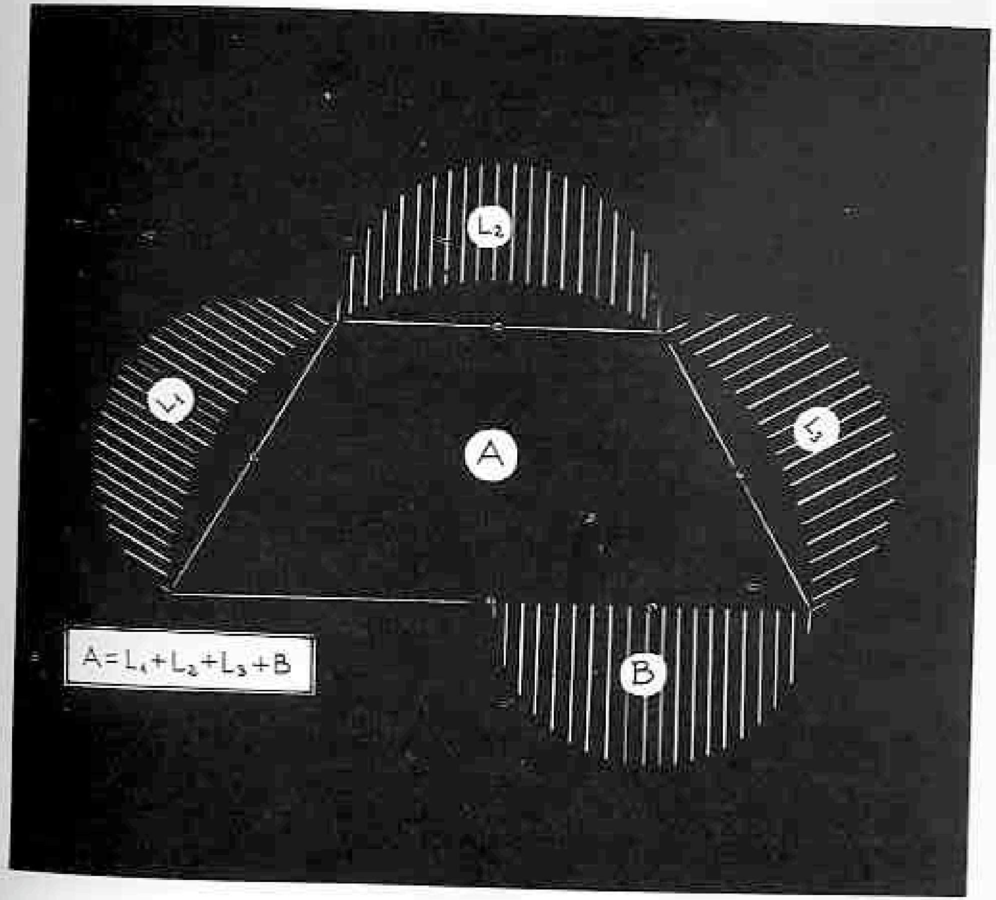
$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO ACB} = 2(\text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO AEC}) \\ \\ \text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO ACB} = 2(\text{ÁREA DEL CUADRANTE ACD})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ÁREA DEL SEMICÍRCULO AEC} = \text{ÁREA DEL CUADRANTE ACD} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L_1 + S_1 = S_1 + \widehat{ACD} \Longrightarrow L_1 = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\,\widehat{ACB}$$

- ② SOBRE TRES LADOS CONSECUTIVOS DE UN HEXÁGONO REGULAR, INSCRITO EN UN CÍRCULO, DESCRIBIÓ TRES SEMICÍRCULOS. APOYÁNDOSE EN ESTA CONSTRUCCIÓN, DEMOSTRÓ QUE EL ÁREA DEL TRAPECIO DETERMINADO POR LOS TRES LADOS CONSECUTIVOS Y EL DIÁMETRO DEL CÍRCULO, ERA IGUAL AL ÁREA DE LAS TRES LÚNULAS IGUALES (DETERMINADAS SOBRE CADA UNO DE LOS LADOS IGUALES) MÁS EL ÁREA DE UN SEMICÍRCULO (CONSTRUÍDO SOBRE UNO DE LOS LADOS IGUALES)

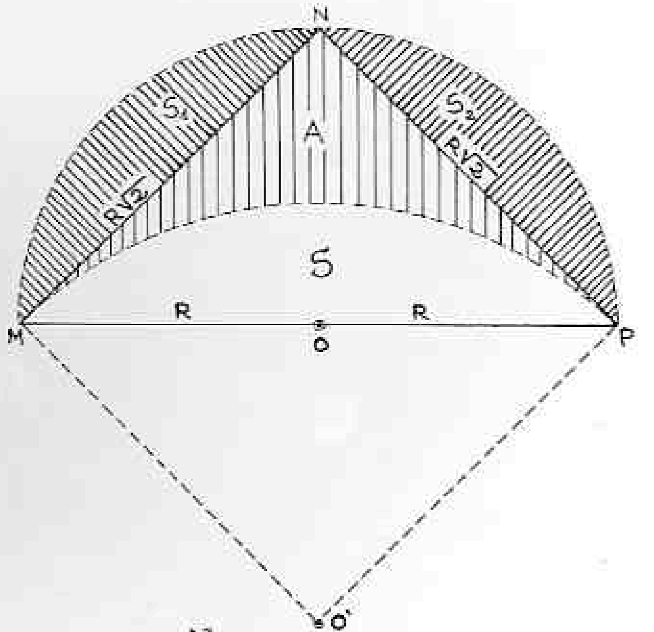
A PARTIR DE ESTA CONCLUSIÓN, RESULTA CLARO QUE SI LAS LÚNULAS FUESEN CUADRABLES, TAMBIÉN LO SERÍA EL SEMICÍRCULO, Y — EN CONSECUENCIA — EL CÍRCULO. POSIBLEMENTE, ESTE RESULTADO ANIMÓ A HIPÓCRATES A CONTINUAR LA BÚSQUEDA DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.



POR OTRO LADO, SIGUIENDO A EUDEMO, PARECE SER QUE LAS CUADRATURAS DE LÚNULAS ESTABLECIDAS POR HIPÓCRATES FUERON LAS SIGUIENTES:

— ① LÚNULA CUYO ARCO EXTERIOR ES UNA SEMICIRCUNFERENCIA.

SOBRE EL DIÁMETRO DEL SEMICÍRCULO CIRCUNSCRITO A UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES, DESCRIBIÓ UN SEGMENTO CIRCULAR SEMEJANTE A CADA UNO DE LOS DOS CUYAS CUERDAS RESPECTIVAS SON LOS CATETOS DEL TRIÁNGULO. ENTONCES, COMO EL ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR — ASÍ CONSTRUIDO — ES IGUAL A LA SUMA DE LAS ÁREAS DE LOS OTROS DOS, DEDUJO — FÁCILMENTE — QUE EL ÁREA DE LA LÚNULA LIMITADA POR EL ARCO DEL SEMICÍRCULO Y POR EL ARCO DEL SEGMENTO CIRCULAR MAYOR, ERA IGUAL AL ÁREA DEL TRIÁNGULO.



$$\frac{S_1}{S} = \frac{(R\sqrt{2})^2}{(2R)^2} = \frac{2R^2}{4R^2} \Longrightarrow$$

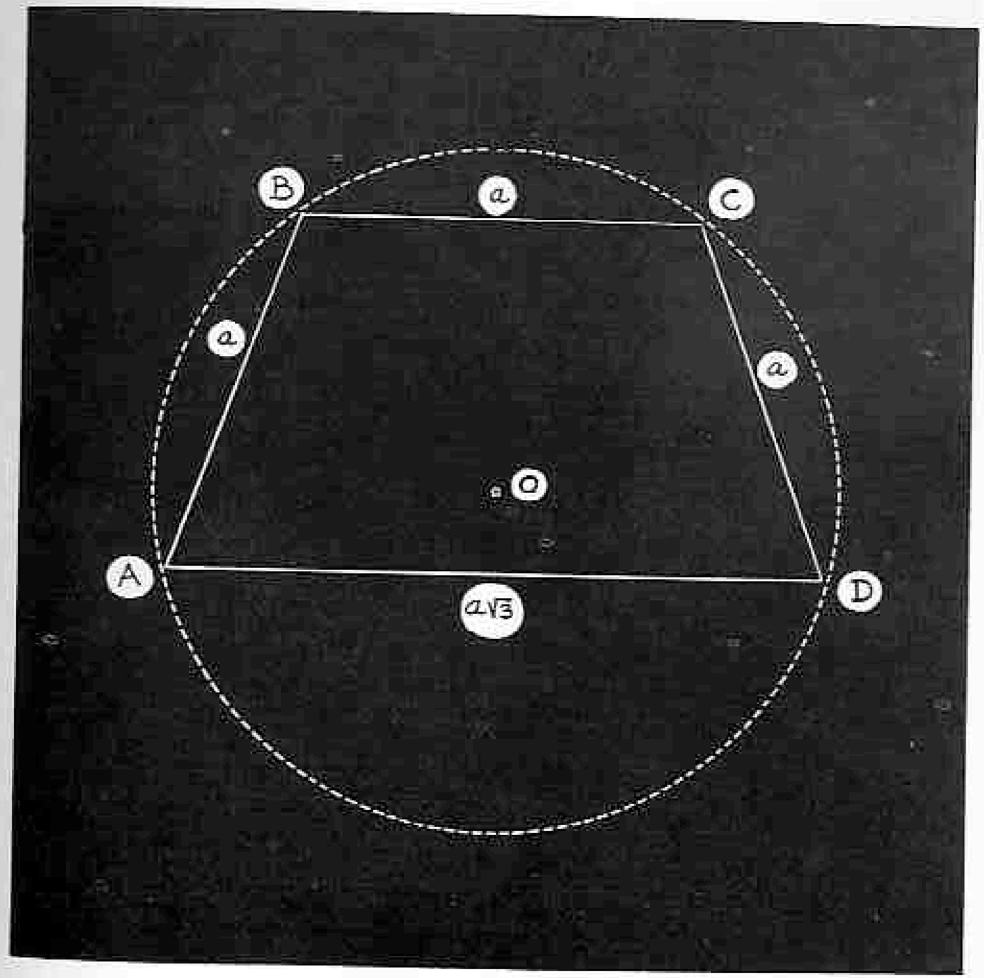
$$\Longrightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \Longrightarrow S = 2S_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S = S_1 + S_2 \Longrightarrow S + A = S_1 + S_2 + A \Longrightarrow$$

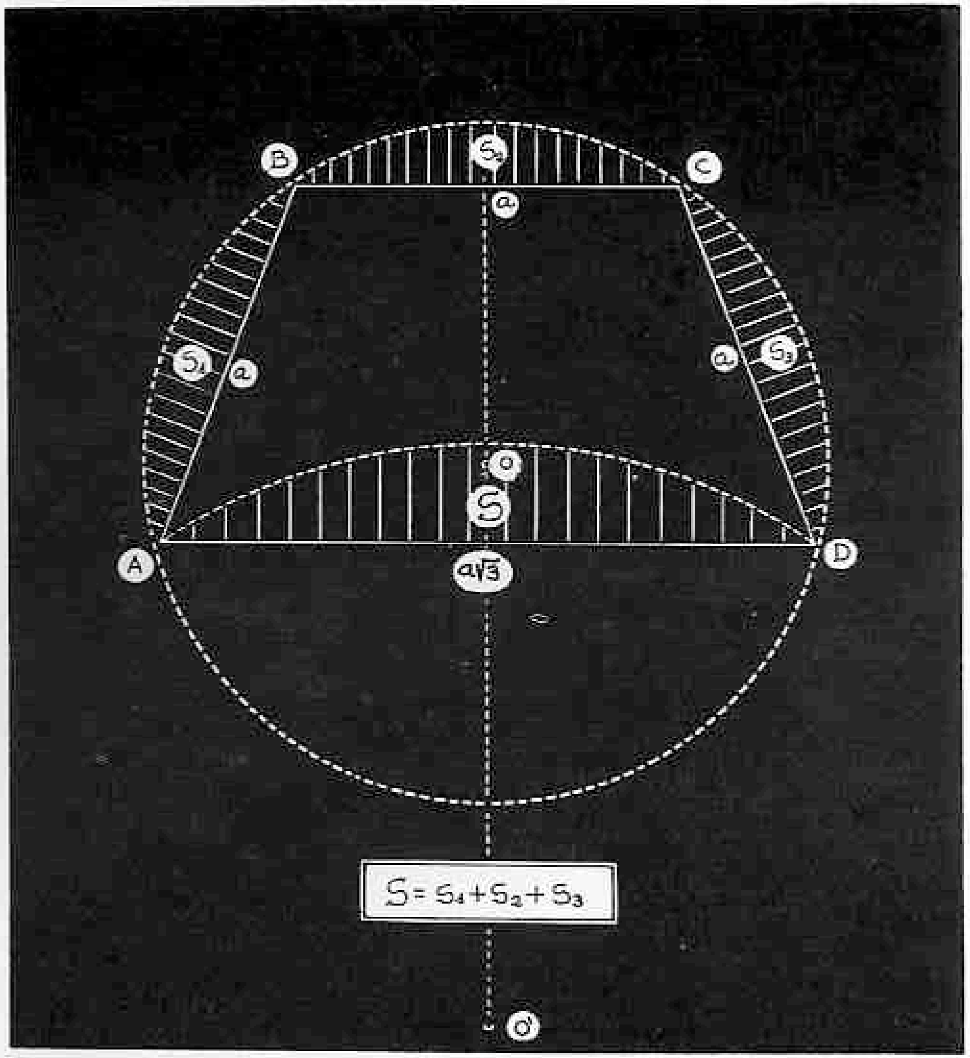
$\Longrightarrow \widehat{MNP}$ = ÁREA DE LA LÚNULA.

— ② LÚNULA CUYO ARCO EXTERIOR ES MAYOR QUE UNA SEMICIRCUNFERENCIA:

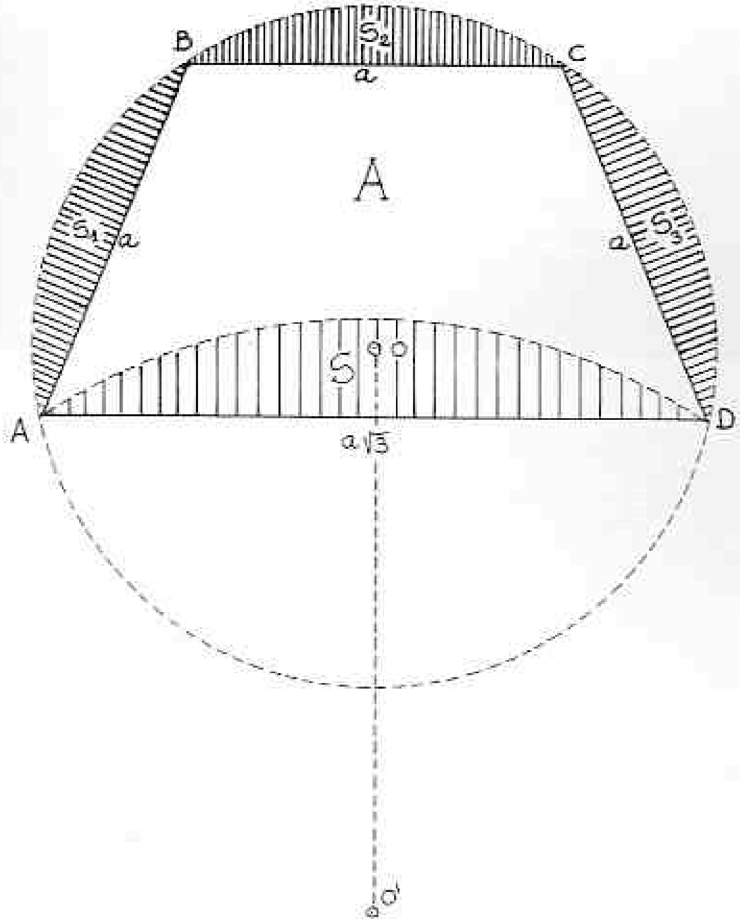
PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA, EL PRIMER PASO — DADO POR HIPÓCRATES — FUE LA CONSTRUCCIÓN DE UN TRAPECIO CON TRES LADOS DE LA MISMA LONGITUD Y TALES QUE LA SUMA DE SUS CUADRADOS FUESE IGUAL AL CUADRADO DE LA BASE MAYOR. ACTO SEGUIDO, INSCRIBIÓ DICHO TRAPECIO EN UN CÍRCULO. LA POSIBILIDAD DE LLEVAR A CABO ESTA ÚLTIMA CONSTRUCCIÓN RESULTA EVIDENTE, BISECANDO LOS ÁNGULOS DEL TRAPECIO Y CONSIDERANDO ALGUNAS PROPOSICIONES ELEMENTALES RELATIVAS A LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y A LA IGUALDAD DE TRIÁNGULOS.



A CONTINUACIÓN, DESCRIBIÓ SOBRE LA BASE MAYOR DEL TRAPECIO UN SEGMENTO CIRCULAR SEMEJANTE A CADA UNO DE LOS "SEPARADOS POR LOS TRES LADOS IGUALES". CON ESTO, EL ÁREA DEL SEGMENTO CONSTRUÍDO ERA IGUAL A LA SUMA DE LAS ÁREAS DE LOS OTROS TRES. DEMOSTRÓ DESPUÉS — UTILIZANDO RECURSOS QUE NOS PARECE OPORTUNO OMITIR — QUE EL ARCO DEL SEGMENTO CIRCULAR EN EL QUE SE ENCONTRABA INSCRITO EL TRAPECIO ERA MAYOR QUE UNA SEMICIRCUNFERENCIA.



HABIENDO LLEGADO A ESTE PUNTO, NUESTRO PERSONAJE DISPONÍA YA DE LAS "HERRAMIENTAS" NECESARIAS PARA DEDUCIR — CÓMODAMENTE — QUE EL ÁREA DE LA LÚNULA LIMITADA POR LOS DOS ARCOS SUBTENDIDOS POR LA BASE MAYOR DEL TRAPECIO ERA IGUAL AL ÁREA DE DICHO CUADRILÁTERO.



$$S + A = S_1 + S_2 + S_3 + A \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{ÁREA DEL TRAPECIO} = \text{ÁREA DE LA LÚNULA}}$$

— ③ LÚNULA CUYO ARCO EXTERIOR ES MENOR QUE UNA SEMICIRCUNFERENCIA:

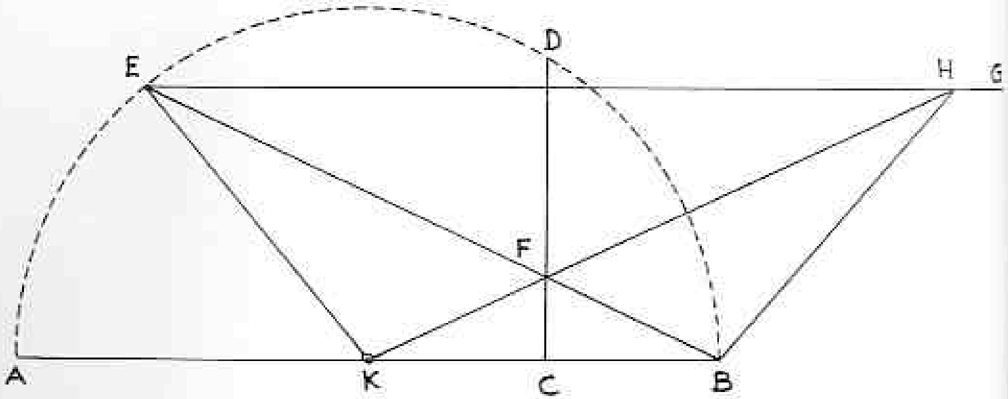
PARA PODER CUADRAR UNA LÚNULA DE ESTE TIPO, HIPÓCRATES IDEÓ — EN PRIMERA INSTANCIA — LA CONSTRUCCIÓN SIGUIENTE:

A) TRACEMOS POR C — PUNTO MEDIO DEL RADIO KB DE UN CÍRCULO DE DIÁMETRO AB — UNA PERPENDICULAR A DICHO RADIO.

SEA CD ESTA PERPENDICULAR.

B) CON ORIGEN EN EL PUNTO E, PERTENECIENTE A LA CIRCUNFERENCIA DEL CÍRCULO, DESCRIBAMOS UNA SEMIRRECTA — PASANDO POR B — TAL QUE EL CUADRADO DEL SEGMENTO EF, INTERCEPTADO POR LA PERPENDICULAR CD Y LA CIRCUNFERENCIA, SEA IGUAL A UNA VEZ Y MEDIA EL CUADRADO DEL RADIO.

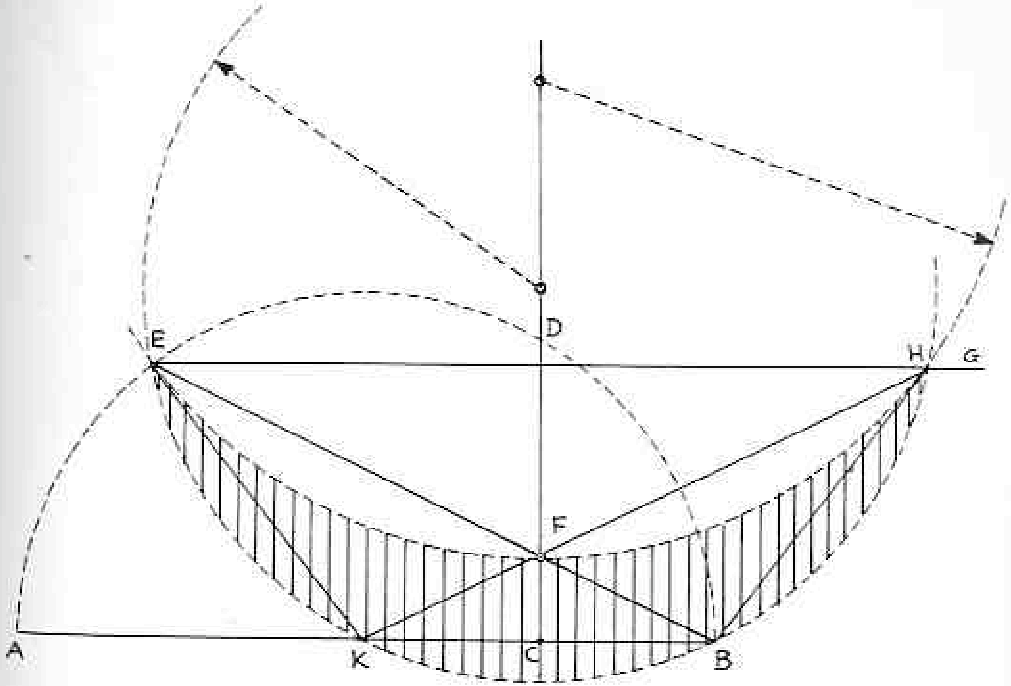
C) PARALELAMENTE AL DIÁMETRO AB TRACEMOS LA SEMIRRECTA EG. UNAMOS K CON E, B CON H Y K CON F. SEA H EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS SEMIRRECTAS EG Y KF.



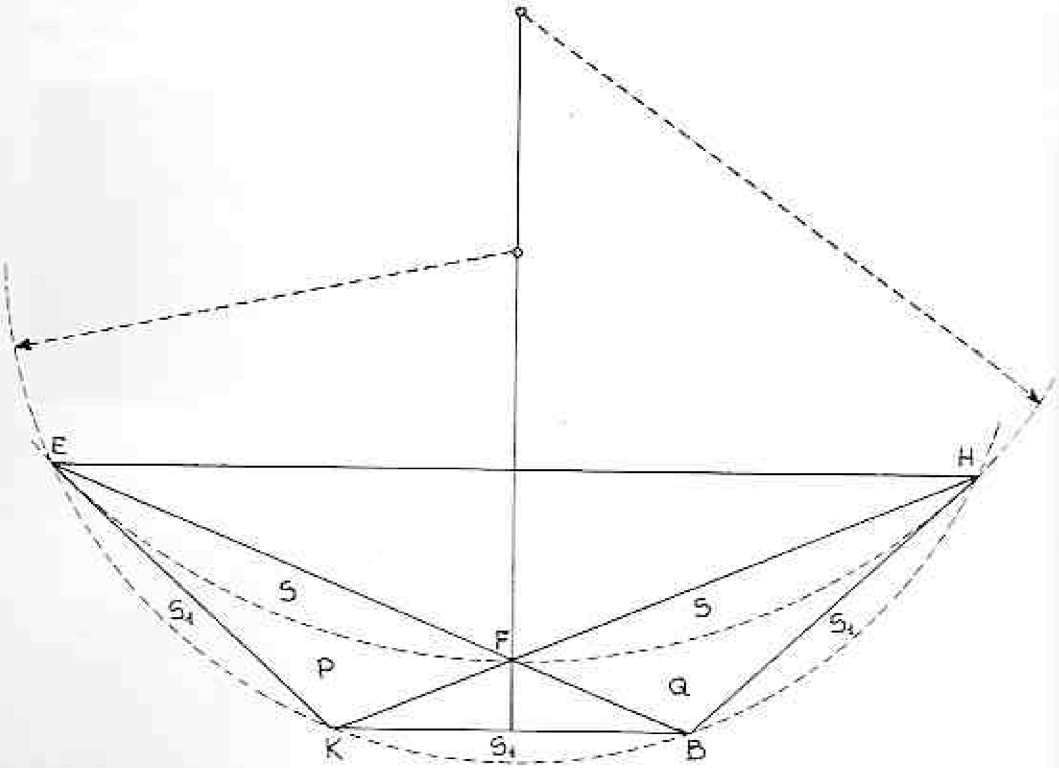
$$EF^2 = \frac{3}{2} KB^2$$

INSCRIBAMOS, A CONTINUACIÓN, EL TRAPECIO EHBK EN UN CÍRCULO Y DESCRIBAMOS EL SEGMENTO CIRCULAR CIRCUNSCRITO AL TRIÁNGULO EHF. CON ESTO, QUEDA DEFINIDA UNA LÚNULA, CUYO ARCO EXTERIOR — SEGÚN DEMUESTRA HIPÓCRATES — ES MENOR QUE UNA SEMICIRCUNFERENCIA.

$\widehat{EKBH}$ < SEMICIRCUNFERENCIA



A PARTIR DE AQUÍ NO RESULTA DIFÍCIL COMPROBAR QUE EL ÁREA DE LA LÚNULA ES IGUAL A LA SUMA DE LAS ÁREAS DE LOS TRIÁNGULOS EFK, FKB Y FBH.



$$\frac{S}{S_1}=\frac{EF^2}{EK^2}=\frac{EF^2}{KB^2}=\frac{\frac{3}{2}KB^2}{KB^2}=\frac{3}{2}\Longrightarrow 2S=3S_1$$

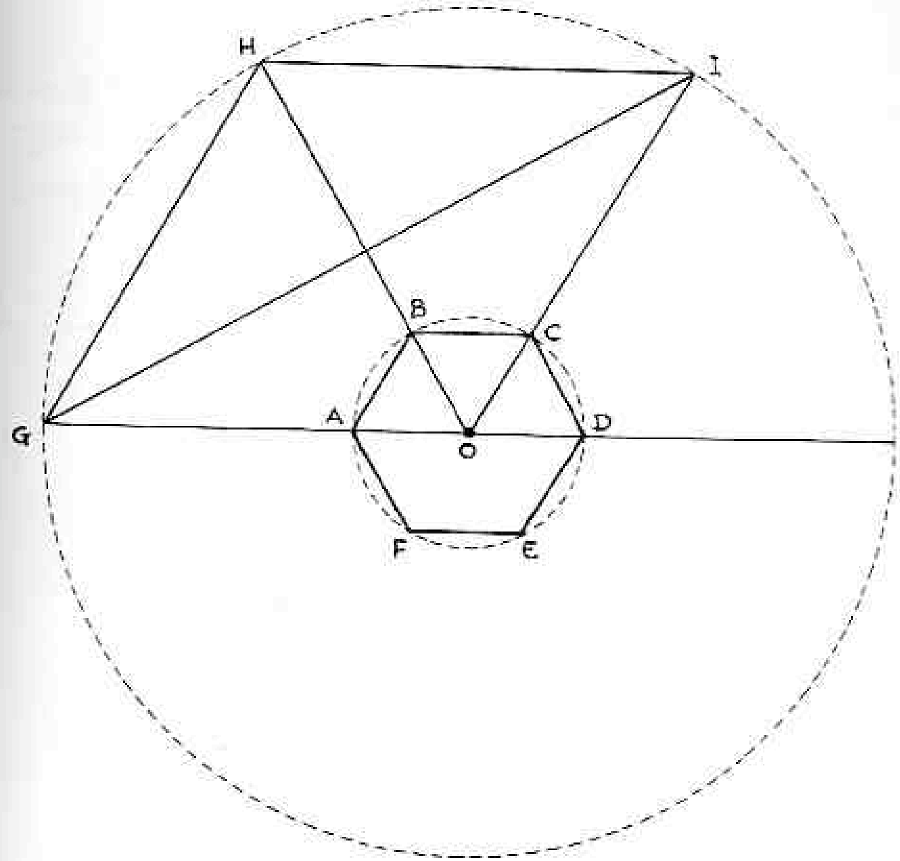
$$\widehat{EFK}+\widehat{FKB}+\widehat{FBH}=(S+P)+\widehat{FKB}+(S+Q)=$$
$$=P+\widehat{FKB}+Q+2S=P+\widehat{FKB}+Q+3S_1=$$
$$=\text{ÁREA DE LA LÚNULA}$$

LA ÚLTIMA "CUADRATURA" RESEÑADA POR EUDEMO PUEDE SER DESCRITA EN LOS SIGUIENTES TÉRMINOS:

SEAN DOS CÍRCULOS CONCÉNTRICOS — DE CENTRO COMÚN O — TALES QUE EL CUADRADO DEL DIÁMETRO MAYOR ES IGUAL A SEIS VECES EL CUADRADO DEL DIÁMETRO MENOR. INSCRIBAMOS EN EL CÍRCULO INTERIOR EL HEXÁGONO REGULAR ABCDEF Y PROLONGUEMOS — HASTA LA CIRCUNFERENCIA DEL CÍRCULO EXTERIOR — LOS RADIOS OA, OB Y OC.

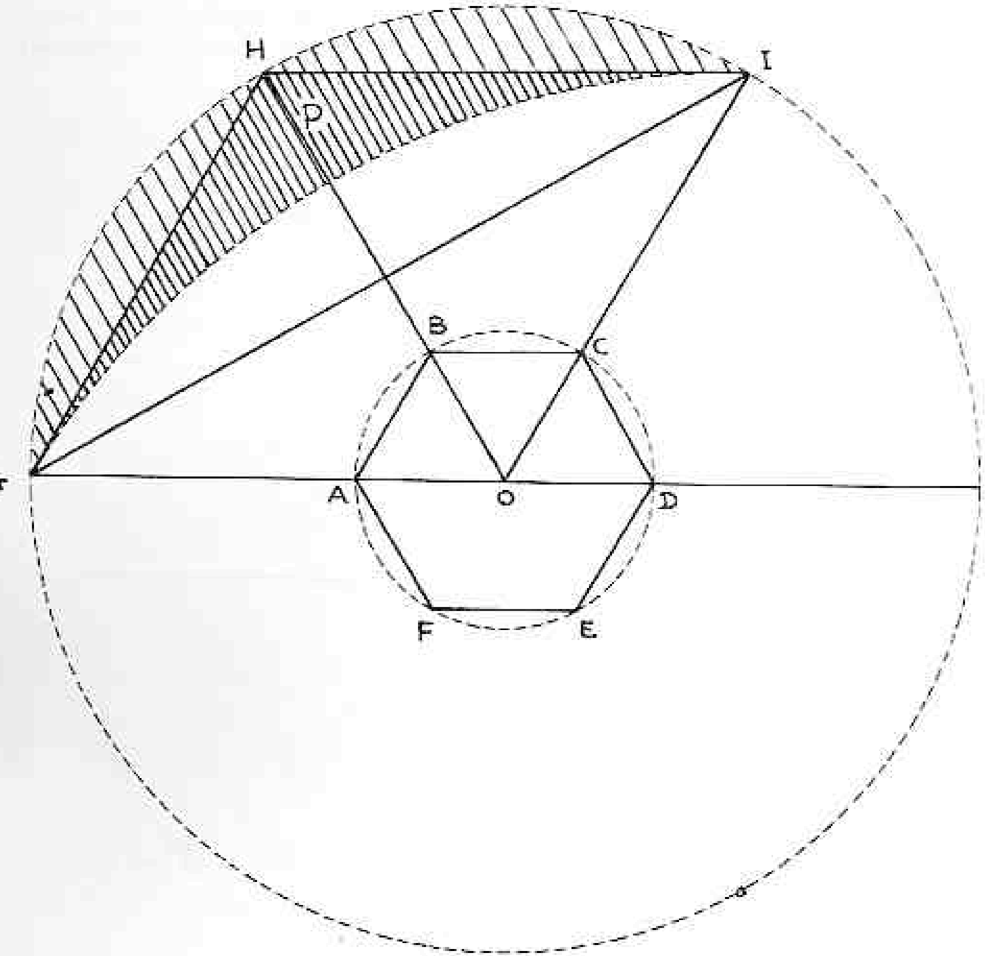
SEAN G, H E I LOS PUNTOS EN QUE DICHAS PROLONGACIONES CORTAN, RESPECTIVAMENTE, A LA CIRCUNFERENCIA MAYOR.

DESCRIBAMOS, A CONTINUACIÓN, LOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS GH, HI (LADOS DE UN HEXÁGONO REGULAR INSCRITO EN EL CÍRCULO MAYOR) Y GI.



ACTO SEGUIDO, CONSTRUYAMOS SOBRE GI UN SEGMENTO CIRCULAR SEMEJANTE AL "SEPARADO" POR EL SEGMENTO RECTILÍNEO GH.

DE ESTE MODO SE DELIMITA LA LÚNULA GHI. TENIENDO PRESENTE LA RELACIÓN EXISTENTE ENTRE EL LADO Y LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO, RESULTA CLARO QUE: $GI^2 = 3.GH^2$. POR TANTO, EL ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR DESCRITO SOBRE GI ES IGUAL A TRES VECES EL ÁREA DEL QUE TIENE A GH COMO CUERDA.



ADEMÁS, RECORDANDO LA RELACIÓN QUE EXISTE ENTRE LOS CUADRADOS DE LOS DIÁMETROS DE LOS CÍRCULOS QUE ESTAMOS CONSIDERANDO, RESULTA QUE: EL ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR SOBRE GH ES IGUAL A SEIS VECES EL ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR SOBRE AB.

A PARTIR DE AQUÍ, SE DEDUCE — FÁCILMENTE — QUE EL ÁREA DE LA LÚNULA MÁS EL ÁREA DEL CÍRCULO MENOR ES IGUAL AL ÁREA DEL TRIÁNGULO GHI MÁS EL ÁREA DEL HEXÁGONO REGULAR ABCDEF.

$GH^2 = 6AB^2 \Longrightarrow$ SEGMENTO SOBRE GH = 6.(SEGMENTO SOBRE AB)

SEGMENTO SOBRE GI = 3 (SEGMENTO SOBRE GH) =
= 2 (SEGMENTO SOBRE GH) + 6 (SEGMENTO SOBRE AB)

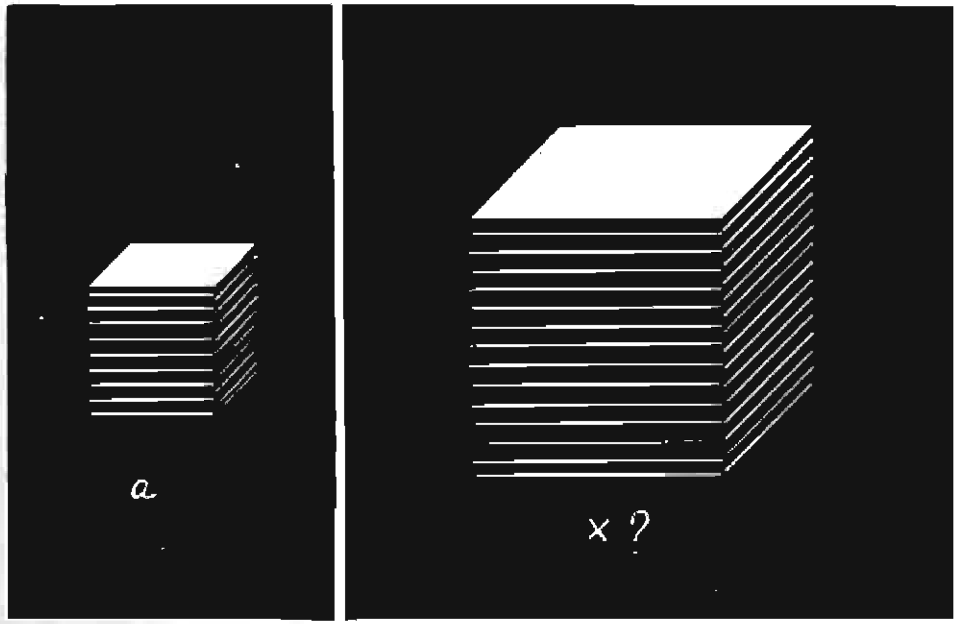
SEGMENTO SOBRE GI + HEXÁGONO ABCDEF =
= 2 (SEGMENTO SOBRE GH) + 6 (SEGMENTO SOBRE AB) + HEXÁGONO ABCDEF =
= 2 (SEGMENTO SOBRE GH) + CÍRCULO MENOR $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (SEGMENTO SOBRE GI + P) + HEXÁGONO ABCDEF =
= 2 (SEGMENTO SOBRE GH) + P + CÍRCULO MENOR =
= LÚNULA + CÍRCULO MENOR $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ TRIÁNGULO GHI + HEXÁGONO ABCDEF =

= $\boxed{\text{LÚNULA + CÍRCULO MENOR}}$

EN CUANTO AL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO SE REFIERE, HIPÓCRATES COMPROBÓ QUE ERA EQUIVALENTE A LA BÚSQUEDA DE DOS MEDIAS PROPORCIONALES ENTRE UNA LÍNEA DADA Y SU DOBLE. ES DECIR: ENCONTRAR DOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS X E Y, TALES QUE A: X = X: Y = Y: 2A.



$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases} \Longrightarrow x^4 = 2a^3x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{x^3 = 2a^3}$$