Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

Esta sección se suma a conmemorar el centenario de la muerte de G. Cantor con un artículo en el que el autor, traductor al español de la obra del gran matemático alemán, se centra en describirla prescindiendo de su repercusión y del relato biográfico, aspectos para los que indica referencias.

Georg Cantor, centenario

por

Carlos Gómez Bermúdez

Georg Cantor nació en San Petersburgo en 1845, hijo de una alemana[1] y un danés de origen incierto.[2] Comenzó sus estudios en una prestigiosa escuela alemana de aquella ciudad y a los once años estaba en Frankfurt Main. Cursó la enseñanza secundaria en Darmstadt, donde luego entró en la Escuela Industrial Superior, estudió también en Zürich, en Berlín con Weierstraß, Kummer y Kronecker; en Gotinga con Minigerode y Schering, además del físico Weber. Cabe decir que en el año en que estudió en Gotinga murió Riemann, profesor allí, con el que no coincidió.

G. Cantor.

En lo que sigue, se pretende dar una descripción de la obra de Cantor. El orden es principalmente cronológico, desde sus primeros trabajos sobre formas cuadráticas hasta que completa un sistema de números, comenzando con los racionales, algebraicos, reales. . . , y terminando en los cardinales y ordinales transfinitos. En este proceso, como una herramienta indispensable, aparece la teoría de conjuntos.

[1] Parece que entonces había en San Petersburgo 40 000 alemanes.

[2] Las especulaciones acerca de su origen judío no tienen prueba alguna. Ni siquiera los intentos de profesores judíos de conseguir que el mayor especialista danés en Genealogía certificase tal cosa lograron nada. Bautizado como luterano, Cantor fue toda su vida un devoto cristiano.

PARA AMPLIAR INFORMACIÓN. Al final de este artículo se adjunta la relación de los trabajos publicados por Cantor. También es importante la correspondencia epistolar, pues en ella se ve cómo se fraguan ideas: la obra de Cavaillès [30], en francés, fue única hasta la aparición de la mucho más completa de Meschkowski [43]. Se indica, además, una relación, no exhaustiva, de obras de referencia, como la indispensable edición de sus obras por Zermelo [29] y otras en alemán: [42], [44], [45], [46]. En inglés: la obra de Dauben [31], completa y bien documentada, o la de Jourdain [40], que mantuvo correspondencia con Cantor. En español: [35], con un artículo de Cantor y parte de la correspondencia, y también [37] con toda la obra matemática publicada; sin dejar de recordar un reciente artículo [34] en esta misma revista.

1. Formas cuadráticas y teoría de números «clásica»

Las formas cuadráticas eran un tema recurrente en aquel tiempo, marcado por Euler, Lagrange, Legendre, Hermite, Dirichlet, Dedekind y muchos otros, además, por supuesto, de Gauss, que había muerto solo doce años antes. Cantor siguió la «moda» al comienzo de su actividad investigadora y nos dice, en la autobiografía que aporta con su tesis doctoral, que estudió durante un año las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss [36] y la teoría de números de Legendre, de las que sacó el material para la tesis [1], su primer trabajo conocido, leída en Berlín en 1867. En ella retoma un trabajo de Gauss [36, §294], quien dada la forma $ax^2 + by^2 + cz^2$, siendo a, b, c, primos entre sí y sin divisores cuadráticos, demuestra, apoyándose en resultados de Legendre, que existen soluciones enteras. A Cantor no le satisface la solución dada por Gauss y se propone mejorar el método. Como dicen Purkert e Ilgauds [44, p. 24]:

> Lo consiguió mediante consideraciones bastante complicadas y totalmente originales. Dedekind encontró más tarde otra solución del problema. [32, p. 418]

De hecho, no es un trabajo fácil de leer, aunque normalmente aclara muy bien todo lo que hace; el propio Cantor dice al final del mismo:

> admito libremente que se han omitido muchas cosas que se echan de menos para la explicación del método.

El año siguiente (1868) publicó otro trabajo sobre formas cuadráticas [2], mejorando dos demostraciones que había dado Göpel en su disertación de habilitación, en el sentido de no emplear fracciones continuas, que Göpel usaba, y eliminando algunas limitaciones. Luego, en 1869, pasó a Halle como *Privatdozent*, presentando para su habilitación un trabajo [5] en el que trataba de determinar todas las transformaciones de una forma cuadrática ternaria en sí misma.

El mismo año de su tesis de habilitación publicó dos trabajos de teoría de números, no en vano fue alumno de Kummer y Kronecker. En el primero de ellos [3] observó que Euler, dado un sistema de números $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$ y un número natural n, había planteado la cuestión de determinar la cantidad de representaciones posibles de n como combinación lineal, con coeficientes enteros, de los elementos de S. Cantor invierte el problema, y plantea: *¿cuál es la naturaleza de un sistema S de números en el que puede representarse todo número, y cada uno solo de una manera única?* [3, p. 122]

En el trabajo [4], del mismo año 1869, recupera otro tema de Euler, quien para el producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^\lambda})\cdots,$$

había obtenido el valor $\frac{1}{1-x}$ en el caso $x<1$, concluyendo que todo entero puede expresarse como suma de términos de la sucesión $\{2^\lambda\}$. Cantor demuestra que todo número real A puede representarse de modo único como $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\frac{1}{x_i})$, donde $x_i \geqq x_{i-1}^2$. Además, si A es racional, a partir de un término dado x_k se verifica que $x_{k+\nu} = x_{k+\nu-1}^2$.

Dice Meschkowski en 1983, a propósito de estos trabajos:

> Hoy son poco conocidos los trabajos de Cantor acerca de la representación de los números reales, del año 1869. Creo que es posible que en el futuro los sistemas de números de Cantor puedan llegar a ser importantes para las modernas calculadoras automáticas… [42, p. 11]

A partir de aquí y coincidiendo con el inicio de su carrera docente, abandona la teoría «clásica» de números, si excluimos un trabajo [19] publicado en 1880, basado en otro de Lipschitz, que se anuncia como teoría de funciones aritméticas. Es un trabajo de teoría clásica de números, que recurre a Euler, Riemann (funciones $\varphi(n)$, $\zeta(s)$) y Dirichlet. Cantor promete en él una continuación que no llegó nunca.

2. Series trigonométricas

Al incorporarse a la docencia universitaria en Halle, Cantor se encuentra con Heine, que estaba trabajando en un campo muy activo entonces, las series de Fourier. En concreto, estudiaba la convergencia uniforme y la unicidad de la representación. En esta última cuestión animó a trabajar a Cantor, que aceptó la invitación. Heine había conseguido demostrar la unicidad, bajo condiciones restrictivas tanto para las funciones como para las series. Cantor publicó siete artículos sobre series trigonométricas,[3] de los que, aparte de un teorema de unicidad, resulta una notable disminución de tales restricciones.

En 1870 [6] ya publica su primer resultado:

> Proposición: «Si para todo valor real de x entre límites dados ($a<x<b$):
>
> $$\text{lím}\,(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx) = 0,$$
>
> entonces es tanto
>
> $$\text{lím}\, a_n = 0, \qquad \text{como} \qquad \text{lím}\, b_n = 0.\text{»}$$

[3] Cinco [6, 7, 8, 9, 10] en menos de dos años: 1870–71.

L. Kronecker y H. E. Heine.

> Este hecho [...] era conocido por Riemann; sin embargo, parece que solo lo ha demostrado considerando aquellos casos en que los coeficientes a_n, b_n pueden expresarse mediante las expresiones integrales
> $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt.$$

En el siguiente trabajo [7], utilizando lo demostrado en el artículo precedente y apoyándose en Riemann, Cantor da su prueba de la unicidad de representación de una función mediante una serie trigonométrica:

> Si una función $f(x)$, de una variable real x, está dada por medio de una serie trigonométrica convergente *para todos los valores* de x, entonces no hay ninguna otra serie de la misma forma, que sea asimismo convergente para todos los valores de x y represente a la misma función $f(x)$.

La cursiva es mía, porque justamente a partir de aquí irá reduciendo las restricciones al dominio de convergencia de la variable. El esquema de la demostración es sencillo: si una función admitiese dos representaciones mediante series, restando ambas tendríamos una representación del cero; demostrando que, en tal caso, los coeficientes de la serie resultante son cero, obtenemos la igualdad de las dos representaciones de la función:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{b_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx \\ f(x) &= \frac{b_0'}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \operatorname{sen} nx + b_n' \cos nx \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\underset{d_n = b_n - b_n'}{\overset{c_n = a_n - a_n'}{\Longrightarrow}} \quad 0 = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx + d_n \cos nx.$$

A partir de aquí demuestra que $c_n \operatorname{sen} nx + d_n \cos nx = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, y esto implica que $c_n = d_n = 0$.

2.1. Primera generalización del teorema de unicidad

En 1871, Cantor mejora técnicamente la demostración a sugerencia de Kronecker (todavía estaban en buena relación).

Reemplaza en $C_n = c_n \operatorname{sen} nx + d_n \cos nx$ la variable x, una vez por $u + x$ y otra por $u - x$. Pero hay otra novedad importante: hasta entonces se había demostrado la unicidad de la representación de una función mediante una serie *convergente* a ella *para todos los valores de la variable*; ahora esto ya no es necesario, la serie puede dejar de ser convergente para un conjunto de valores de la variable que, aun siendo infinito, solo posea *una cantidad finita de ellos en cada intervalo finito*. Más tarde, esta restricción se suaviza para pasar de un número finito de puntos en $(0, 2\pi)$ a un número infinito, y aquí dice:

> Esta generalización de la proposición de ningún modo es la última; he conseguido encontrar una extensión de la misma basada en un procedimiento igualmente riguroso y de mucho mayor alcance, que comunicaré cuando llegue la ocasión. [8]

Además, en este artículo utiliza por primera vez la expresión, y el concepto, de «conjunto de valores» [*Werthmenge*], con lo que inicia un proceso en el que tratando de saber si los puntos «excepcionales» son «muchos o pocos» y qué los caracteriza, termina casi de forma natural considerando conjuntos de puntos, que luego podrán ser de otro tipo, además de inquirir sobre su naturaleza topológica.

2.2. Segunda generalización del teorema de unicidad

Hasta este momento, Cantor utiliza el instrumental que otros habían creado; a partir de ahora empieza a usar herramientas creadas por él mismo. En 1872 publica un artículo que es, con mucho, el más novedoso de Cantor en este período y en el que generaliza aún más el teorema de unicidad de la representación de una función mediante series trigonométricas. Como en trabajos precedentes, emplea el método de demostrar que los coeficientes en una serie que representa al cero son nulos. Pero ahora puede prescindir de la convergencia de la serie en infinitos puntos, con tal de que estos sean de ν-ésima especie, es decir, estén en un conjunto P cuyo ν-ésimo derivado conste de una cantidad finita de puntos, por lo que el $(\nu + 1)$-ésimo derivado de P es vacío. Veremos que esto implica nuevos tipos de puntos de la recta en virtud de su «axioma de continuidad», que consiste en que a todo punto de la recta le corresponde un número, su coordenada con respecto a un origen y unidad dados, y *también, recíprocamente, a toda magnitud numérica corresponde un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a aquella magnitud numérica…* Y puntualiza:

> Llamo a esta proposición un *axioma*, porque está en su naturaleza el no poder ser demostrada de una manera general. [11]

Los racionales están bien determinados, pero los «huecos» no ocupados por ellos han de rellenarse, con lo que estamos ante una ampliación del sistema de números:

> La noción de número, por desarrollada que esté aquí, lleva en sí el germen de una ampliación necesaria y absolutamente infinita. [11]

Esta ampliación se basa en los racionales, que denota con (A):

> Los números racionales constituyen la base para el establecimiento del concepto ampliado de magnitud numérica.
>
> Si hablo de una magnitud numérica en sentido ampliado, esto ocurre en primer lugar cuando aparece, dada mediante una ley, una serie infinita de números racionales,
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$
>
> que tiene la característica de que la diferencia $a_{m+n} - a_n$ tiende a ser infinitamente pequeña al crecer n, cualquiera que sea el número entero positivo m, o con otras palabras: que para todo ε (positivo, racional) arbitrariamente dado, existe un entero n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n \geqq n_1$ y si m es un número entero positivo arbitrario.
>
> Esta característica de la serie (1) la expreso en los términos: «La serie (1) tiene un límite determinado b». [11]

Con el que llama «dominio» A de los racionales y los límites b forma un nuevo conjunto B y en él nuevas sucesiones fundamentales, a las que corresponden nuevos límites c, con los c y con B forma un nuevo conjunto C... Iterando el proceso λ veces, alcanza el conjunto [«dominio»] L. Si L' tiene una cantidad finita de elementos, lo denomina

> Magnitud numérica, valor o límite de λ-ésima especie, de lo cual se desprende que me sirvo de los términos magnitud numérica, valor y límite, con igual significación, en general. [11]

Al hablar de «derivados de todos los órdenes», Cantor explica que no solo contempla los órdenes finitos, sino también los «símbolos de infinitud» obtenidos con sumas, productos o potencias en las que entra ∞:

$$\infty, \infty + 1, \ldots, \infty + n, \ldots, \infty + \infty, \ldots, n \cdot \infty, \ldots, \infty^n, \ldots, \infty^\infty, \ldots, \infty^{\infty^\infty}, \ldots$$

En estos puntos límite y conjuntos derivados en sucesión ilimitada, $P', P'', P''', \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$, quedan englobados todos los reales que puedan existir, racionales o no y, aunque obviamente los racionales se amplían con irracionales, Cantor no menciona aquí la palabra «irracional». Por su parte, Dedekind, que aún no había iniciado su intercambio de ideas con Cantor, dice ese mismo año:

> Aún no soy capaz de percibir qué utilidad puede ofrecer la distinción, aunque solo sea conceptual, de magnitudes numéricas reales de especies más elevadas, precisamente en el dominio de los números reales que, en mi opinión, es completo en sí. [33]

Quien entendía esto era Heine, que asocia a cada sucesión de racionales, un símbolo al que llama número general:

> Los números generales, aunque en casos especiales serán racionales, se llamarán *números irracionales de primer orden*. Del mismo modo que a partir de los números racionales se han formado tales irracionales de primer orden A, se pueden formar nuevos irracionales de segundo orden A', a partir de estos los de tercer orden A'', etc. [38]

Así, si el primer derivado de los racionales permite «tapar agujeros» dejados por los racionales, mediante la creación de irracionales de primer orden (usando la terminología de Heine), todos los posibles «agujeros» restantes serían «tapados» por los sucesivos derivados.

En el mismo artículo, vemos a Cantor dando un resultado que ya había demostrado Weierstraß:

> Por *punto límite* de un conjunto de puntos P entiendo un punto de la recta, de tal naturaleza que en todo entorno del mismo se encuentran infinitos puntos de P, con lo cual puede ocurrir que él incluso pertenezca al exterior del conjunto. Por *entorno* de un punto entiéndase aquí todo intervalo que tiene al punto en su interior. Según esto es fácil demostrar que un conjunto de puntos, compuesto de una cantidad infinita de puntos [limitado], tiene siempre al menos *un* punto límite. [11]

De la importancia que da Cantor al concepto de derivado para completar el continuo, dan idea declaraciones suyas como estas:

> Considero a un punto de la recta como determinado cuando su distancia a o [origen de coordenadas] está dada, como magnitud numérica, valor o límite de λ-ésima especie, provista del signo correspondiente. [11]

> En él [el concepto de derivado], se basará, como mostraremos más adelante, la definición o determinación más simple y a la vez más completa de un continuo. [15]

Así, luego de definir un conjunto S como perfecto si coincide con sus derivados de todo orden, $S \equiv S^\gamma$ para cada γ, definirá en 1883 un *continuo* de puntos dentro de [un espacio n-dimensional] G_n, como un *conjunto perfecto y conexo.* [24]

Para Cantor, estos derivados eran el embrión de los ordinales transfinitos, como él mismo reconocerá 34 años más tarde en carta a P. Jourdain, donde dijo:

> Por lo que a los ordinales transfinitos se refiere, me parece que en 1871 tenía ya una idea de ellos. El concepto de numerabilidad lo formé por primera vez en 1873. [40]

En el mismo artículo de 1872, define por primera vez «conjunto». Su axioma de continuidad le permitirá estudiar propiedades de conjuntos de números en conjuntos de puntos y viceversa:

> A una cantidad finita o infinita dada de magnitudes numéricas la llamo, para abreviar, un *conjunto de valores*, y análogamente a una cantidad finita o infinita de puntos de una recta un *conjunto de puntos.* Lo que en adelante se afirme de los conjuntos de puntos se podrá, de acuerdo con lo dicho, trasladar inmediatamente a los conjuntos de valores. [11]

Cavaillès [30] dice que este artículo es «el acta de nacimiento de la teoría cantoriana de conjuntos». Es también su último trabajo sobre este tema, excluidas notas de réplica a intentos de mejorar sus demostraciones. A partir de aquí se ocupará de conjuntos de puntos o de números.

2.3. Irracionales

Sin salirnos aún del famoso artículo de 1872, encontramos también su teoría de irracionales (sin nombrarlos así). En su época, aparte de las cortaduras de Dedekind, los irracionales se definían como límites de sucesiones de racionales. Para Cantor había un problema, pues se presuponía la existencia del límite a definir, lo que califica de «error lógico». Él *asocia* a cada sucesión de racionales de Cauchy, que llama *fundamental*, un *signo* que será lo que luego llamará límite. Dada una sucesión fundamental de racionales $(a_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, afirma: *Esta sucesión tiene un límite* b, que es un signo asociado a (a_n).

Dada otra sucesión fundamental $(a'_n) = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots\}$ con límite b', establece un criterio de comparación como sigue:

$$\begin{cases} b < b', & \text{si } a_n - a'_n < \varepsilon \text{ para un racional } \varepsilon < 0, \\ b = b', & \text{si } a_n - a'_n \text{ se hace infinitamente pequeña}, \\ b > b', & \text{si } a_n - a'_n > \varepsilon \text{ para un racional } \varepsilon > 0, \end{cases}$$

a partir de un cierto n. Establece también comparaciones entre un límite b (de una sucesión (a_n)) y un número arbitrario a:

$$\begin{cases} a < b, & \text{si } a - a_n < \varepsilon \text{ para un racional } \varepsilon < 0, \\ a = b, & \text{si } a - a_n \text{ se hace infinitamente pequeña}, \\ a > b, & \text{si } a - a_n > \varepsilon \text{ para un racional } \varepsilon > 0, \end{cases}$$

a partir de un n dado.

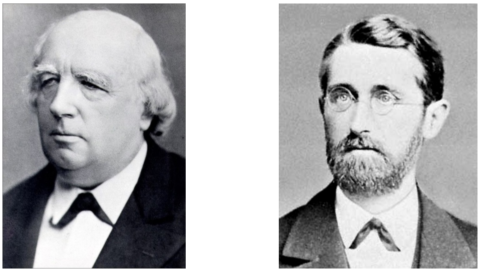
Formula reglas de operación con estos límites, por ejemplo: $b \pm b' = b''$ expresa que a partir de las sucesiones correspondientes $\text{lím}(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0$. De este modo, los «límites» b son realmente números, se justifica la palabra «límite» y los reales se definen a partir de los racionales. Es curioso que Cantor no use la palabra «irracional» justamente en el artículo en que los introduce, aunque doce años más tarde, al comparar los diferentes métodos de introducción de irracionales, pone como suyo el que define aquí. Y cuando presenta el procedimiento diagonal, lo justifica como independiente de la consideración de los números irracionales.

3. Numerabilidad

Un tema de capital importancia a lo largo de su obra es la posibilidad de establecer biyecciones entre conjuntos.[4] En una primera fase trata de determinar qué conjuntos son coordinables biyectivamente con $\mathbb{N}$, comenzando con el conjunto de los números racionales. Schoenflies dice:

> Me acuerdo de que Weierstraß, en el invierno 1873–74, planteó la cuestión de cómo podrían ponerse todas las fracciones consecutivamente en

[4] Cantor dice «coordinación completa unívoca y recíproca»; Bourbaki trajo la palabra biyección.



K. Weierstraß y R. Dedekind.

> una sucesión, con la observación de que un antiguo miembro del seminario (Cantor) había hecho esto una vez. Por cierto, según recuerdo, ante la actitud naturalmente negativa del seminario, no se habló más del tema. [46]

Esto da idea de lo novedoso que resultaba y de que Cantor, siendo todavía estudiante, se ocupaba ya de estas cuestiones.

3.1. Numerabilidad de los racionales

En 1873, en carta a Dedekind, Cantor afirma que es fácil establecer la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, aunque la demostración no la publicó hasta 1878, después de haber publicado la numerabilidad de los algebraicos y la no numerabilidad de los reales. Dado un racional $\frac{p}{q}$, define $N = p + q$, y los ordena, primero por orden creciente de los valores de N, y luego para igual valor de N, en orden de magnitud creciente. Considerando solo fracciones irreducibles, la sucesión se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \cdot \\ & \swarrow & & & \\ \frac{3}{1} & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

3.2. Numerabilidad de los algebraicos, existencia de trascendentes

El mismo año, también en carta a Dedekind, propone estudiar si hay una biyección $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ y, de manera más restringida, entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de los algebraicos, que denota con (ω). Argumenta que si existe la biyección $\mathbb{N} \longleftrightarrow (\omega)$, pero no la $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{R}$, es que hay reales que no son algebraicos, lo que demostraría la hipótesis de Liouville [41] de que existen números trascendentes.[5]

Dedekind responde positivamente a la cuestión de la numerabilidad de los algebraicos, dando incluso indicaciones de cómo demostrarla, pero afirmando que la

[5]Hay que recordar que ese año Hermite demostró que e es trascendente, en un artículo en cuatro entregas [39].

numerabilidad de los reales carece de interés práctico. Al año siguiente (1874) Cantor publicó [13] la demostración de la numerabilidad de los algebraicos. Lo hizo como sigue: define un «número algebraico» como aquel que verifica una ecuación del tipo $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$, con coeficientes enteros sin divisores comunes, y a_0 y n positivos; la «altura» de ω es $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$. Para cada ω hay un N positivo determinado y para cada N solo hay una cantidad finita $\varphi(N)$ determinada de números que tienen esa altura N ($\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$,...). De esta manera (ω) puede ordenarse por alturas crecientes y dentro de una misma altura por magnitudes crecientes.

3.3. NO NUMERABILIDAD DE $\mathbb{R}$

En el mismo artículo de 1874, que se titulaba *Sobre una propiedad de todos los números algebraicos reales*, Cantor publicó la primera de sus tres demostraciones de que $\mathbb{R}$ no es numerable. Dada una sucesión arbitraria (I) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \ldots$ de números reales diferentes, en todo intervalo real (α, β) hay elementos que no están en (I). La demostración se basa en el principio de los intervalos encajados, que por algo se llama también de Cantor-Dedekind.

Dado un intervalo (α, β) de números reales arbitrarios, sean α', β' los dos primeros números de la sucesión (I) contenidos en (α, β), sean α'', β'' los dos primeros números de la sucesión (I) contenidos en $(\alpha', \beta')\ldots$; iterando el proceso, se eliminan en cada paso dos elementos de (I) y se construye una sucesión de intervalos encajados:

$$(\alpha, \beta) \supset (\alpha', \beta') \supset (\alpha'', \beta'') \supset (\alpha''', \beta''') \supset \ldots$$

Ahora puede ser:

(i) La cantidad n de intervalos es finita. En el último (α^n, β^n) hay a lo sumo un elemento de (I), todos los demás son elementos de $\mathbb{R}$ que no están en (I).

(ii) La cantidad de intervalos es infinita. La sucesión infinita $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ como monótona creciente y acotada $(\alpha^n < \beta^m)$ tiene un límite superior α^∞; análogamente, la sucesión infinita monótona decreciente y acotada β, β', β'',... tiene un límite inferior β^∞. Pueden ocurrir dos casos:

(ii.1) $\alpha^\infty = \beta^\infty = \eta$, con lo que η está en todos los intervalos. Si η coincide con algún ω_p, a causa de la construcción de la sucesión, a partir de un cierto intervalo (α^p, β^p), ω_p no está incluido en (α^p, β^p) ni en los siguientes, contra la hipótesis de que está en todos ellos.

(ii.2) $\alpha^\infty < \beta^\infty$. En cuyo caso todo elemento de $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$ está fuera de (I).

En 1879 publica por segunda vez esta demostración, utilizando el concepto, recién presentado por él, de *densidad por doquier* (similar a las «pantaquias» de Du Bois-Reymond). El procedimiento diagonal, más conocido, vino en 1891. Se demuestra por reducción al absurdo: expresando $\mathbb{R}$ en un sistema binario con dos caracteres m y w, supuesto $\mathbb{R}$ numerable puede ordenarse en una sucesión $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ en la que cada número se escribe con infinitas coordenadas: $\omega_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_p}, \ldots)$. Cada una de estas coordenadas es m o w. En tal caso, el número real $E = (b_1, b_2,$

$\ldots, b_n, \ldots)$, con $b_n \neq x_{n_n}$, definido por

$$b_n = \begin{cases} m & \text{si } x_{n_n} = w, \\ w & \text{si } x_{n_n} = m, \end{cases}$$

no coincide con ninguno en la sucesión, pues si $E = \omega_n$, debería ser $b_n = x_{n_n}$, algo que es imposible por construcción.

Por otro lado, adelantándonos a lo que vendrá y trabajando en binario, si el cardinal de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$, el del continuo $\mathbb{R}$ debería ser, calculando variaciones con repetición, $VR_2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Si $\mathbb{R}$ es no numerable, debería ser $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$.

Habiendo demostrado que $\mathbb{R}$ no es coordinable biyectivamente con $\mathbb{N}$, el interés de Cantor se centra en determinar qué conjuntos son biyectivameente coordinables con $\mathbb{R}$ y, agotados los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que interesaban, Cantor prueba más allá.

3.4. La biyección $\mathbb{R}^p \longleftrightarrow \mathbb{R}^q$

El haber demostrado la biyección $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$, tomada como una biyección $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}^2$, plantea la cuestión de la existencia de la biyección $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ y, en general, $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$. Cantor resuelve esta cuestión positivamente, demostrando de paso, directamente, que los irracionales no son numerables. Usando un proceso que, en notación moderna, consistiría en la construcción del siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} ([0,1] \setminus \mathbb{Q})^n & \overset{C}{\longleftrightarrow} & [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \updownarrow D' & & \updownarrow D \\ [0,1]^n & \overset{A}{\longleftrightarrow} & [0,1] \end{array}$$

Cantor demuestra que C, D, D' son biyecciones, con lo que el caracter biyectivo de A queda probado. La demostración sorprendió al propio Cantor, que escribió a Dedekind:

> Tenga la bondad de disculpar mi celo por la cuestión, al requerir tan a menudo su amabilidad y esfuerzo; las cosas que le he comunicado hace poco son para mí mismo tan inesperadas, tan nuevas, que por así decirlo no podré alcanzar una cierta tranquilidad de ánimo antes de haber obtenido de usted, muy admirado amigo, un veredicto sobre la corrección de las mismas. Mientras no tenga su aprobación solo puedo decir: *je le vois, mais je ne le crois pas.* [43]

Consecuencia evidente es que Cantor se cuestiona el concepto de dimensión como el número de coordenadas independientes de una variedad dada. Dedekind, siempre cauteloso, insiste en que la constancia del número de dimensiones de una configuración es «el primero y más importante de sus invariantes», aunque ahora tiene que demostrarse, «pues parece aniquilada por su teorema»; conjetura que si existe una biyección entre dos variedades de dimensiones diferentes, esta ha de ser discontinua en todas partes. Y advierte:

> Espero haberme explicado con suficiente claridad; el propósito de mi carta consiste solo en rogarle que, sin un examen profundo de mi objeción, no se dedique a polemizar públicamente contra los artículos de fe de la teoría de variedades, tenidos por ciertos hasta ahora. [43]

Cantor aceptó inmediatamente la conjetura de Dedekind y publicó una demostración, pero ocho años después Jürgens observó que era «tan poco satisfactoria como otros intentos de demostraciones precedentes». No fue hasta 1910 (veintitrés años después del artículo sobre la biyección $\mathbb{R}^1 \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$) que Brouwer demostró definitivamente la discontinuidad de la correspondencia. De todos modos, en su intento de demostración Cantor introduce conceptos como punto interior, punto exterior, frontera, bola, conjuntos disjuntos,[6] reunión de conjuntos disjuntos $a', a'', a''', \ldots$ que denota $a = \{a', a'', a''', \ldots\}$; también está latente el concepto de homeomorfismo.

4. Conjuntos

Aparte de lo ya citado, Cantor publica una serie de artículos dedicados explícitamente a conjuntos, seis de ellos titulados *Sobre variedades lineales infinitas de puntos*. El título parece limitar su alcance a conjuntos de la recta, pero en el primero de ellos, de 1879, advierte de que las variedades lineales interesan porque, demostrada la existencia de biyección $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$, se pueden extender propiedades de las lineales a

> . . . un dominio muy amplio de variedades aritméticas y geométricas, tanto continuas como discontinuas. [15]

Así, comienza por decir:

> . . . el concepto de *derivado* de una variedad dada, no está limitado a las variedades lineales, sino que vale también de igual manera para variedades *planas*, *espaciales* y *n-ples*, continuas y discontinuas. [15]

Define conjunto P de «primer género» como aquel que tiene una cantidad finita n de derivados, de manera que $P^{(n)}$ carece de derivado, con lo que P es de «primer género y n-ésima especie»; en cambio, si tiene infinitos derivados no nulos es de «segundo género». Así, si P es de primer género y de n-ésima especie, entonces sus derivados sucesivos son de primer género y especies decrecientes. En cambio, si P es de segundo género sus derivados también. Demuestra que si un conjunto P es denso por doquier en un intervalo, es de segundo género, pero un conjunto de primer género no puede ser denso por doquier en ningún intervalo. Luego de volver a demostrar que $\mathbb{R}$ es no numerable (primer uso de este término), mediante el concepto de densidad por doquier, demuestra que la clase de los conjuntos numerables y la de los equipotentes a $[0, 1]$ son distintas.

En 1880 define identidad de conjuntos, que denota $P \equiv Q$, y distingue la unión disjunta de conjuntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$, que denota $P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$, de la unión cualquiera, que llama *mínimo común múltiplo* y denota $\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$. Define

[6] En ese momento llamados «variedades sin conexión», pues los conjuntos eran «variedades».

L. Brouwer y D. Hilbert.

también intersección, a la que llama *máximo común divisor*, $\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$, con lo que un subconjunto de P es un *divisor* de P; en la misma ocasión, introdujo la notación O para el conjunto vacío,[7] de manera que dos conjuntos están «conectados» entre sí por su máximo común divisor, que en caso de ser disjuntos («sin conexión») es O. Y afirma que los conjuntos de primer género están completamente caracterizados por la ecuación $P^{(\infty)} \equiv O$.

En 1882 [22] precisa su concepto de conjunto bien definido:

> A una variedad (una colección, un conjunto) de elementos, que pertenecen a cualquier esfera conceptual, la llamo *bien definida* cuando en base a su definición y siguiendo el principio lógico del tercio excluso, debe verse como *internamente determinado* tanto si un objeto cualquiera, perteneciente a la misma esfera conceptual, forma parte o no como elemento de dicha variedad, *como también* si dos objetos pertenecientes al conjunto, son iguales uno a otro o no, a pesar de diferencias formales en la manera de presentarlos. [22]

El principio del tercio excluso sería muy polémico, pero hay que decir que tanto Cantor como Hilbert previenen contra el uso irreflexivo de tal principio. A propósito de «determinación interna», dice que a menudo es un problema difícil, y da como ejemplo la determinación de si π es trascendente o no.[8] En el mismo artículo, Cantor demuestra que en un «dominio» n-dimensional, un conjunto infinito de «subdominios» n-dimensionales continuos, separados unos de otros, que coinciden a lo sumo en sus fronteras, es siempre numerable. Luego de demostrar esto, hablando de las magnitudes puramente aritméticas critica

> ...los errores de aquellos autores que conciben lo infinitamente pequeño como *magnitud* y no como un modo de variabilidad de las magnitudes. Desde el punto de vista del *análisis* puramente *aritmético* no hay ninguna magnitud infinitamente pequeña, sino más bien magnitudes variables *tendentes* a ser infinitamente pequeñas. [22]

[7] En cuanto a notaciones, Peano aportaría $\cup$ y $\cap$, Schröder $\subset$ y Bourbaki, con Weil, trajo $\emptyset$.

[8] Curiosamente, en el mismo número de la revista en que dice esto, Lindemann demuestra que π sí es trascendente.

Pero el mismo año, en carta a Kurd Laßwitz, Cantor parece intuir el análisis no estándar:

> Pero con ello, no está excluido que, en una situación más avanzada del análisis, puedan encontrarse medios para definir magnitudes *diferentes* que merezcan el nombre de infinitésimos, porque serían menores que todas las magnitudes empleadas hasta ahora; pero estas magnitudes infinitamente pequeñas propias, no tendrían, con seguridad, ninguna relación con nuestras diferenciales. [43]

En 1883 modifica las notaciones, así para la unión disjunta de $P_1, P_2, P_3, \ldots$ propone la «más cómoda» $P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$, definiendo también, si $Q \subset P$, «diferencia de conjuntos»: $R \equiv P - Q$, y «conjunto aislado»: Q es aislado si $\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv O$; a partir de un conjunto P cualquiera se obtiene uno aislado Q restándole $\mathfrak{D}(P, P')$, es decir, $Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$, de lo que resulta:

I. Todo conjunto aislado es numerable.

II. P' numerable $\Rightarrow P$ numerable.

III. Si P es de primer género y n-ésima especie, es numerable.

IV-V. Si P es de segundo género y $P^{(\infty)}$ o $P^{(\alpha)}$ es numerable, P es numerable.

VI. Si $P \subset (a, b)$ es tal que P' es numerable, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\{(a_i, b_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$ tal que $P \subset \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i)$ y $\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \varepsilon$.

4.1. La sucesión extendida de números

Habiendo completado $\mathbb{R}$ (por debajo del infinito) con los puntos límite, asentado el concepto de biyecciones entre conjuntos, caracterizado racionales, algebraicos, irracionales y reales, Cantor dice en 1883 [24][9]:

> La anterior exposición de mis estudios en la teoría de variedades ha llegado a un punto en el que su continuación dependerá de una ampliación del concepto de número entero auténtico más allá de los límites actuales, y ciertamente esta ampliación va en una dirección en la que a mi entender nadie ha investigado hasta ahora.
>
> La dependencia, en la que me encuentro, respecto de esta ampliación del concepto de número es tan grande que sin ella apenas me sería posible dar sin problemas el menor paso adelante en la teoría de conjuntos.

Comienza por distinguir entre infinito «impropio» (una variable que, o crece más allá de todo límite, o decrece hasta una pequeñez arbitraria, pero permaneciendo finita) y el infinito «propio» que definirá con propiedades y operaciones como los números ordinarios.

[9]Se editó el mismo año 1883 como un opúsculo, con el título *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre* (*Fundamentos de una teoría general de variedades*).

4.2. Potencias

Tras tanta biyección, el concepto de potencia estaba maduro. Dados dos conjuntos A y B, Cantor dice que son «equivalentes» ($A \backsim B$) si es posible establecer entre ellos una biyección, en cuyo caso se dice que tienen igual «potencia». Más tarde diría:

> Llamamos «potencia» o «número cardinal» de M al concepto general que resulta del conjunto M cuando, con ayuda de nuestra capacidad activa de pensar, se hace abstracción de la naturaleza de sus diferentes elementos m y del orden en que están dados. [27]

En principio, la potencia de M la denota con $\overline{\overline{M}}$ (doble abstracción). Al final del artículo en que demuestra la biyección $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}^n$, ya plantea la cuestión de cuántas clases de conjuntos (variedades) hay en $\mathbb{R}$ atendiendo a su potencia y dice que son dos: las que se pueden poner en forma de «*functio ipsus* ν» ($\nu \in \mathbb{N}$) o «*ipsus* x» ($x \in [0,1]$). Así que, en principio, hay conjuntos con la potencia de $\mathbb{N}$ (más tarde se llamarán numerables), otros tienen la potencia de $\mathbb{R}$, que es mayor porque $\mathbb{N} \backsim \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y no existe $A \subset \mathbb{N}$ tal que $A \backsim \mathbb{R}$. Surge ya la cuestión de si hay alguna potencia entre ellas, apunta pues la hipótesis del continuo.

En 1895, denota públicamente con $\aleph_0$ al cardinal de $\mathbb{N}$ (primero había usado la letra gótica $\mathfrak{O}$) y demuestra que es transfinito, porque si el cardinal de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$ y el cardinal de $\{e, \mathbb{N}\}$ es $1 + \aleph_0$, la correspondencia

$$\begin{array}{cccccc} e & 1 & 2 & . & n & . \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & . & \updownarrow & . \\ 1 & 2 & 3 & . & n+1 & . \end{array}$$

establece una equivalencia entre $\mathbb{N}$ y $\{e, \mathbb{N}\}$, por lo que $\mathbb{N} \sim \{e, \mathbb{N}\}$, y por tanto $\aleph_0 = 1 + \aleph_0$, relación que no puede darse en los números finitos.

4.3. Conjuntos ordenados

Conjuntos simplemente ordenados. La primera ampliación del conjunto de números más allá del infinito tiene su origen en el concepto de conjunto ordenado. Un conjunto será «simplemente ordenado», si está definida una relación de precedencia entre sus elementos.

Dados dos conjuntos ordenados A, B, dice Cantor que son «semejantes», $A \simeq B$, o tienen el mismo «tipo de orden», si entre ellos hay una biyección que conserva el orden (luego tienen la misma potencia). Y añade:

> A todo conjunto ordenado M corresponde un «tipo de orden» determinado, o más brevemente un «tipo», que denotaremos con $\overline{M}$. Por tal entendemos el concepto general que resulta de M, si hacemos abstracción solo de la naturaleza de sus elementos m, pero mantenemos el orden de precedencia entre ellos. [27]

Todos los conjuntos finitos equivalentes tienen el mismo tipo de orden, que es el de la subsucesión de naturales, con su orden natural, que comenzando en 1 es equivalente a ellos:

$$\begin{array}{ccccccc} \{ & 5, & 2, & 4, & 3, & 6, & 1 \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \{ & 6, & 1, & 3, & 2, & 5, & 4 \} \end{array} \quad \Longrightarrow \overline{\{5,2,4,3,6,1\}} = \overline{\{6,1,3,2,5,4\}} = 6.$$

En los conjuntos infinitos esto no ocurre: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y $\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\}$ son equivalentes, pero no tienen el mismo tipo de orden; no son semejantes, aunque tienen igual potencia. Los conjuntos equivalentes a uno dado forman una *clase de tipos* determinada por su potencia. Estudia varios tipos particulares: el tipo η de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ en su orden natural, el tipo θ de $(0, 1)$ o el tipo ω de $\left\{1 - \frac{1}{\nu} \mid \nu \in \mathbb{N}\right\}$, que es el mismo que el de $\mathbb{N}$.

Los tipos correspondientes a conjuntos finitos que coinciden con los números enteros finitos $1, 2, 3, \ldots$ forman la primera clase de tipos. Los tipos correspondientes a conjuntos de la primera potencia (la de $\mathbb{N}$) forman la segunda clase de tipos; los correspondientes a conjuntos de la segunda potencia forman la tercera clase de tipos; y así sucesivamente.

Además, dado un tipo, por ejemplo ω, define el tipo opuesto ω_*, que es el que resulta invirtiendo el orden de precedencia de los términos.

CONJUNTOS BIEN ORDENADOS. En 1883, define un conjunto P como «bien ordenado» si:

(i) Tiene primer elemento.

(ii) Todo elemento determinado y todo subconjunto finito o infinito de P es seguido por un elemento bien determinado, el «sucesor», que es el que sigue inmediatamente a todos ellos en la sucesión, a no ser que no siga ninguno.

Curiosamente, al menos en público, definió antes buen orden que orden simple. Como recordaría Schönfliess, para Cantor «era una especie de dogma» el que

> siempre es posible poner todo conjunto *bien definido* en *forma* de *conjunto bien ordenado.* [24]

Esto mucho tiempo antes de la demostración de Zermelo. En el caso de conjuntos bien ordenados infinitos, el sucesor en la sucesión ampliada de números es su «numeral» [*Anzahl*], más tarde será el «número ordinal». Obviamente, el «ordinal» correspondiente a la sucesión de todos los números naturales *no* es un número de esta sucesión. Cantor lo designa con ω, el «primer número entero de la sucesión extendida de números *que sigue inmediatamente a los naturales*». Así, $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y $\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\}$ tienen respectivamente ordinal ω y $\omega + \omega = \omega 2$. Nótese que en los ordinales se ha de cuidar el orden de los factores $\omega = 2\omega \neq \omega 2$, pues

$$2\omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega, \quad \omega 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots; f_1, f_2 \ldots, f_\nu, \ldots)}.$$

En los conjuntos finitos, el ordinal es el último número de la subsucesión de naturales que, comenzando en 1, es semejante a él. Con α finito, el ordinal (y potencia) de $\{n_1, n_2, \ldots, n_\alpha\} \simeq \{1, 2, \ldots, \alpha\}$ es α.

Un conjunto infinito: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\} \simeq \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, su ordinal es ω. Es interesante notar que $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$; de hecho, $\omega + 1$ corresponde a $\{2, 3, \ldots, \nu, \ldots, 1\}$, que no es semejante, aunque es equivalente a $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\} = \mathbb{N}$; en cambio, $1 + \omega$ sería el ordinal de $\{\mu, 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$, que es semejante a $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$.

En base a los conceptos de sección y resto, define una aritmética de ordinales que se ha de manejar con cuidado, pues, por ejemplo:

- Si $\alpha = \overline{F}$ y $\beta = \overline{G}$ entonces $\alpha + \beta = \overline{(F, G)}$, luego $\begin{cases} \alpha < \alpha + \beta, \\ \beta \leq \alpha + \beta. \end{cases}$
- Siempre $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$; no siempre $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.
- $\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta$.
- La ecuación $\beta = \gamma\alpha$ tiene solución única para γ: $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$.
- La ecuación $\beta = \alpha\xi$ puede tener varias soluciones para ξ, denotadas $\frac{\beta}{\alpha}$.

4.4. Clases de números

Cuando, completado $\mathbb{R}$, Cantor da el paso al mundo transfinito, divide todos los números imaginables en clases.

La primera clase de números (I) es $\mathbb{N}$, formada partiendo de 1 mediante sucesivas adiciones de la unidad, método que denomina «primer principio de generación».

El «segundo principio de generación» consiste en lo siguiente:

> Dada una determinada sucesión de números, reales, de los cuales ninguno es el mayor, se crea uno nuevo que es el que sigue inmediatamente a todos ellos. [24]

Este nuevo número, el primero que sigue a todos,[10] lo denota ω, lo considera «el límite al que tienden los números $\nu \in \mathbb{N}$» y con él inicia la segunda clase de números (II). Luego se continúa con la aplicación del primer principio:

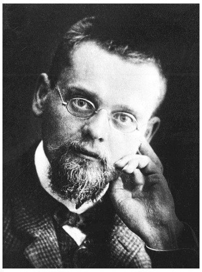
$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots$$

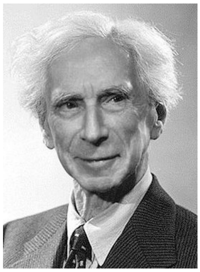
Dado que de todos los infinitos $\omega + n$ ninguno es el mayor, crea otro, por medio del segundo principio, $\omega + \omega = \omega 2$, y, en general, $\sum_{\mu<\omega} \lambda_\mu \omega^\mu$. El proceso sigue con la aplicación de los dos principios:

$$\sum_{\mu<\omega} \lambda_\mu \omega^\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \alpha.$$

Al final, a los números α de la clase (II) que se obtienen a partir de uno «inmediatamente inferior» α_- con el primer principio, $\alpha = \alpha_- + 1$, los llamará «de primera

[10] Igual que 1 es el primero que sigue a todos los de $\{1 - \frac{1}{\nu}\}$, de los cuales ninguno es el mayor.





E. Zermelo, C. Burali-Forti y B. Russell.

especie», y a los obtenidos aplicando el segundo principio de generación, $\alpha = \text{lím}_\nu \alpha_\nu$, los llamará «de segunda especie».

Todas estas sucesiones de números son numerables, es decir, todos los números que preceden a uno dado en esta sucesión forman un conjunto con la potencia de la clase (I). Por ejemplo, los números que preceden a ω^ω son de la forma $\sum_{\mu<\omega} \lambda_\mu \omega^\mu$, que pueden ser numerados mediante un proceso similar al de numeración de los números algebraicos. Cantor demuestra que todos los números α de la clase (II) pueden expresarse de manera única como

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega_1^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega_\tau^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

donde $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_\tau \geq 0$ son números de las clases (I) o (II), $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\tau$ son de (I) y no nulos. A esto es a lo que llama «forma normal», siendo α_0 el «grado» y α_τ «el exponente» de α; para $\tau = 0$ coinciden grado y exponente.

Finalmente, a los dos principios de generación citados, añade un tercer «principio de limitación»:

> ... solo se puede proceder a la creación de un nuevo número entero, con ayuda de uno de los otros dos principios, cuando la totalidad de los números preexistentes tiene la potencia de una clase de números definida ya en su totalidad. [24]

Así, la creación de números y clases de números puede continuar indefinidamente. Hasta ahora solo se habla de enteros, pero Cantor propone agregar a cada número entero α la totalidad de los reales mayores que 0 y menores que 1 para obtener un conjunto continuo de números.

4.5. El sistema de todos los números

Cantor denota con $\mathbf{\Omega}$ el sistema $1, 2, 3, \ldots, \omega_0, \omega_0 + 1, \ldots$ de «todos los números» (acaba identificando ordinal con número). Curiosamente, de acuerdo con la antinomia de Burali-Forti,[11] no está bien ordenado, porque si lo estuviese debería corresponderle un ordinal y, siendo mayor que todos los de $\mathbf{\Omega}$, no podría pertenecer

[11] Cuya argumentación tanto Russell como Bernstein consideran mal fundada, y que el propio Cantor conocía antes que Burali-Forti.

a $\boldsymbol{\Omega}$. Sin embargo, ser bien ordenado debería ser una característica esencial de todo sistema de números.

En relación con las potencias, denota con $Z(\aleph_0)$ la clase (II), es decir, la colección de todos los conjuntos bien ordenados, de cardinal $\aleph_0$, y demuestra que no hay transfinito menor que $\aleph_0$ ni mayor que $\aleph_0$ y menor que el cardinal de (II), así que define $\mathrm{card}(II) = \aleph_1$. No da ningún representante para un cardinal mayor que $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Denota ת (Tav) el sistema de todos los álefs,

$$\text{ת} = \{\aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \ldots, \aleph_{\omega_1}, \ldots\},$$

y demuestra que es equivalente a $\boldsymbol{\Omega}$, lo cual es como numerar ת.

En 1899, dice en carta a Dedekind:

> Surge ahora la cuestión de si en este sistema ת están contenidos *todos los números cardinales transfinitos*, con otras palabras, ¿hay algún *conjunto* cuya potencia *no es un álef*?
>
> A esta pregunta debe responderse negativamente, y el fundamento para ello reside en la, por nosotros, conocida inconsistencia de los sistemas $\boldsymbol{\Omega}$ y ת... [29]

Cantor esboza una demostración que Zermelo declara fallida por imprecisa y vaga. Respecto de la consistencia, escribe en la misma carta:

> ...una multiplicidad puede ser de tal naturaleza que la consideración como *una colectividad* de *todos* sus elementos lleva a una contradicción, de manera que es imposible concebirla como *un ente acabado*. A tales multiplicidades las llamo *multiplicidades inconsistentes* o *absolutamente infinitas*; [...] por el contrario, [...] cuando la totalidad de una multiplicidad puede ser imaginada sin contradicción como una *existencia conjunta*, de manera que sea posible concebirla como *un* objeto, la llamo *multiplicidad consistente* o *conjunto*. [29]

Y en la misma carta, luego de volver a definir «número ordinal», o simplemente «número», como el tipo de orden de un conjunto bien ordenado o «sucesión», demuestra que

> *el sistema* $\boldsymbol{\Omega}$ *[ordinales] de todos los números es una multiplicidad absoluta infinita inconsistente.* [43]

La antinomia de Burali-Forti, en vez de resultar una calamidad, le sirve para demostrar que el conjunto $\boldsymbol{\Omega}$ de todos los ordinales no se acaba nunca. Purkert [45, p. 152–153] dice que la causa de esta suposición de inacababilidad de los ordinales hay que buscarla en razones extramatemáticas; de hecho, uno de los filósofos favoritos de Cantor, Spinoza, había ya utilizado la expresión «infinito absoluto», que consiste en un ente con infinidad de atributos, cada uno de los cuales posee una esencia eterna e infinita. En esta línea de pensamiento, la serie de los álefs sería algo así como «los escalones que conducen al trono de Dios» [42, p. 124].

Quedan problemas abiertos, y entre los más importantes está, por supuesto, el del continuo. Tampoco resolvió nunca lo que prometió en el siguiente párrafo al final del §6 de sus *Beiträge* [27, p. 495]:

> Pero la sucesión ilimitada de los números cardinales
>
> $$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$
>
> tampoco agota el concepto de número cardinal transfinito. Se justificará la existencia de un número cardinal, que denotamos con $\aleph_\omega$, el cual se revela como el inmediatamente superior a todos los $\aleph_\nu$; de él resulta uno inmediatamente superior $\aleph_{\omega+1}$, de la misma manera como $\aleph_1$ procede de $\aleph_0$ y así sucesivamente sin fin. [27]

Esto lo afirmaba en 1895, cuando publicó la primera parte de *Beiträge*; en 1897, cuando publica la segunda, construye $\aleph_1$ a partir del concepto de sucesión («serie») fundamental, y en 1899, en carta a Dedekind, insiste:

> $\aleph_\omega$ es el inmediatamente siguiente a todos los $\aleph_\nu$, es decir, el inmediatamente superior e igual a $\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots + \aleph_\nu + \cdots$. [43, p. 405], [29, p. 442], [30, p. 238][12]

Una vez adoptado el concepto de «consistencia» no vuelve a interesarse por el tema. Ni siquiera reacciona a la antinomia de Russell, provocada directamente por una demostración suya.

No obstante, aunque sin publicaciones, hasta su retirada de la universidad en 1913 sí mantuvo relación con la matemática en forma de intercambio epistolar, con Hilbert, Schwarz, Russell o Jourdain, por ejemplo; eso sí, cada vez más espaciada. Sus problemas de salud aumentaron, no solo los mentales. Además, aunque sin comunicación propia, participó en congresos, como el de la Asociación de Matemáticos Alemanes o el Internacional de Matemáticos de 1904 en Heidelberg. También hubo proyectos de publicaciones que no se realizaron.

REFERENCIAS

[1] G. CANTOR, *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, C. Schultz, Berlín, 1867.

[2] G. CANTOR, Zwei Sätze aus der Theorie der binären quadratische Formen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **13** (1868), 259–261.

[3] G. CANTOR, Über die einfachen Zahlensysteme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **14** (1869), 121–128.

[4] G. CANTOR, Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Produkte, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **14** (1869), 152–158.

[5] G. CANTOR *De transformatione formarum ternarium quadricarum*, Habilitationsschrift, Universität Halle, 1869.

[6] G. CANTOR, Über[13] eine die trigonometrische Reihen betreffenden Lehrsatz, *J. Reine Angew. Math.* **72** (1870), 130–138.

---

[12] Donde Meschkowski escribe ω, Zermelo escribe ω_0, y donde Meschkowki pone $\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \cdots + \aleph_\nu + \cdots$, Zermelo pone $\lim_{\nu\to\omega_0} \aleph_\nu$. Cavaillès, por su parte, hace como Zermelo.

[13] El hecho de que transcriba unas veces *Über* y otras *Ueber*, se debe a que así está en el original alemán, hoy unificado con *Über*; otra opción podría dificultar la búsqueda de documentos.

[7] G. Cantor, Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion *f(x)* sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, *J. Reine Angew. Math.* **72** (1870), 139–142.

[8] G. Cantor, Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion *f(x)* sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. Bd. 72, Seite 139 dieses Journals, *J. Reine Angew. Math.* **73** (1871), 294–296.

[9] G. Cantor, Rezension: Hankel, H., Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, *Literarisches Centralblatt* **7** (1871), 150–151.

[10] G. Cantor, Ueber trigonometrische Reihen, *Math. Ann.* **4** (1871), 139–143.

[11] G. Cantor, Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrische Reihen, *Math. Ann.* **5** (1872), 123–132.

[12] G. Cantor, Historische Notizen über die Warscheinlichkeitsrechnung, *Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle*, 1873, 34–42. Editado por H. W. Schmidt, Halle, 1974.

[13] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **77** (1874), 258–262.

[14] G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *J. Reine Angew. Math.* **84** (1877), 242–258.

[15] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 1, *Math. Ann.* **15** (1879), 1–7.

[16] G. Cantor, Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten, *Göttinger Nachrichten* (1879), 127–135.

[17] G. Cantor, Bemerkung über trigonometrische Reihen, *Math. Ann.* **16** (1880), 113–114.

[18] G. Cantor, Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen, *Math. Ann.* **16** (1880), 267–269.

[19] G. Cantor, Zur Theorie der zahlenteoretischen Funktionen, *Math. Ann.* **16** (1880), 583–588.

[20] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 2, *Math. Ann.* **17** (1880), 355–358.

[21] G. Cantor, Ueber ein neues, und allgemeines Condensationprinzip der Singularitäten von Funktionen, *Math. Ann.* **19** (1882), 588–594.

[22] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 3, *Math. Ann.* **20** (1882), 113–121.

[23] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 4, *Math. Ann.* **21** (1883), 51–58.

[24] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 5, *Math. Ann.* **21** (1883), 545–591. Edición separada: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-Philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen, G. Teubner, 1883.

[25] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten 6, *Math. Ann.* **23** (1884), 453–488.

[26] G. Cantor, Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **1** (1890-91), 75–78.

[27] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel), *Math. Ann.* **46** (1895), 481–512.

[28] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Artikel), *Math. Ann.* **49** (1897), 207–246.

[29] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, 1932. Edición preparada y comentada por Zermelo.

[30] J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, París, 1962.

[31] J. Dauben, *Georg Cantor, his Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1979.

[32] R. Dedekind, *Supplemente zur dritten Auflage von: Dirichlet, P. G. Lejeune: Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, 1879.

[33] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, 1892.

[34] A. J. Durán, Cien años sin Cantor, *La Gaceta de la RSME* **21** (2018), 259–274.

[35] J. M. Ferreirós Domínguez (ed.), *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, Crítica, Barcelona, 2006.

[36] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, trad. de Hugo Barrantes, Michael Josephy y Ángel Ruiz, Academia Colombiana de Ciencias, Bogotá, 1982.

[37] C. Gómez Bermúdez, *G. Cantor, Obra Matemática*, UDC-RSME, 2018.

[38] H. Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, *J. Reine Angew. Math.* **74** (1872), 172–188.

[39] C. Hermite, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[40] P. Jourdain (ed.), *Georg Cantor: Contributions to the Founding of the Theory of the Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago y Londres, 1915. Reimpreso en Dover, 1955.

[41] J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *J. Math. Pures Appl.* **16** (1851), 133–142.

[42] H. Meschkowski, *Georg Cantor, Leben, Werk und Wirkung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1983.

[43] H. Meschkowski y W. Nilson, *Georg Cantor. Briefe*, Springer, Berlín, 1991.

[44] W. Purkert y H. J. Ilgauds, *Georg Cantor*, Teubner, Leipzig, 1985.

[45] W. Purkert y H. J. Ilgauds, *Georg Cantor 1845–1918*, Birkhäuser, Basilea, 1987.

[46] A. Schönflies, Zur Erinnerung an Georg Cantor, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **31** (1922), 97–106.

Carlos Gómez Bermúdez, Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña
Correo electrónico: `carlos.gbermudez@udc.gal`