

Día Escolar
de las Matemáticas

12 de mayo de 2018

Matemáticas y el poder de los votos



Los sistemas electorales

Los procesos electorales, tal y como hoy los conocemos, se desarrollan a partir del siglo XVII. La ideología de ese momento histórico otorga al individuo la consideración de unidad. La democracia se construirá entonces desde el sufragio universal de los adultos.

Los sistemas electorales están en permanente debate porque no cierran la relación entre ideal democrático y realidad política. De hecho, traducen en representación política la voluntad popular expresada en el voto pero no existe una única fórmula para transformar votos en escaños. Por eso el objetivo es la búsqueda, no del sistema electoral perfecto sino del que mejor se adecúa a las condiciones históricas del momento.

El sistema electoral establece la solución en cada país del problema de la representación política. Es decir, determina el principio que la define (mayoritario, proporcional o mixto) y el procedimiento aplicado para alcanzarlo.

Todos los sistemas electorales incluyen un conjunto de requerimientos técnicos. Entre ellos, determinar el tamaño del parlamento; el número de circunscripciones y cómo se establece su tamaño; establecer la barrera electoral; la fórmula electoral que se utiliza para repartir los escaños; y en caso de que las listas estén desbloqueadas, el método de votación y escrutinio. A continuación, vamos a resolver dos problemas. Por un lado, cómo repartimos los votos y por otro, cómo elegimos representantes.



Figura 1.
Foto: Carles Ribas, El País

¿Cuántos votos cuesta un escaño de cada partido?

Esta frase hace referencia a la relación entre el número total de votos obtenidos en una elección y el número de escaños obtenidos. Después de cada elección suele escucharse que un partido obtuvo un número de escaños con tantos votos y otro, con menos votos, obtuvo más escaños. Al final serás capaz de comprender esta paradoja.

La distribución de los escaños a quien ha obtenido mayoría simple no supone un problema matemático. Sin embargo, repartir los escaños proporcionalmente al número de votos no es tan sencillo. Hay dos condiciones que se deben cumplir: el número de escaños que se asigna a cada partido tiene que ser un número entero y la suma de todos los escaños repartidos tiene que ser exactamente el número de escaños distribuidos.

Actividad 1

Unas elecciones arrojan el siguiente resultado:

<i>Partidos</i>	<i>Número de votos</i>
A	1577
B	1558
C	892
D	351

Reparte 13 escaños entre ellos.
Describe las decisiones que has adoptado.

Vamos a proponerte algunos métodos.

Método de Hamilton

Como el reparto es proporcional, calcula la parte proporcional que corresponde a cada partido. Es decir, el producto del número de escaños a repartir por la parte proporcional de los votos obtenidos.

<i>Partidos</i>	<i>Número de votos</i>	<i>Parte proporcional</i>
A	1577	4,6827
B	1558	4,6263
C	892	2,6481
D	351	1,0423

Aplicamos las dos condiciones que señalamos al inicio. Por un lado, hay que asignar un número entero de escaños así que podemos asignar la parte entera. Al descartar la parte decimal, estamos asignando un número menor de los escaños que hay que distribuir. Así que para cumplir la segunda condición, adoptamos el criterio de asignar los restantes escaños a los partidos cuyos restos sean mayores.

Partidos	Número de votos	Parte proporcional	Escaños asignados
A	1577	4,6827	5
B	1558	4,6263	4
C	892	2,6481	3
D	351	1,0423	1

Actividad 2

En la página web del Ministerio del Interior podemos encontrar los resultados electorales de las consultas realizadas en España:

<http://www.nfoelectoral.mir.es/infoelectoral/min/>

Así, por ejemplo, en las elecciones municipales de Granada del año 2011 se obtuvieron los siguientes resultados para repartir 27 concejales. ¿Podrías repartirlos siguiendo el método de Hamilton?

Partidos	Número De Votos
Partido Popular	60519
Partido Socialista Obrero Español	31736
Izquierda Unida Los Verdes-Convocatoria por Andalucía	9106
Unión Progreso y Democracia	6242
Los Verdes Andalucía Ecológica	3071
Partido Andalucista-Espacio Plural Andaluz	1065

El método D'Hont

Los métodos para asignar los votos obtenidos por cada partido en escaños no son todos iguales y la elección de uno u otro influye en los resultados electorales. El procedimiento D'Hont es uno de los métodos más utilizados. España lo emplea en la mayoría de sus procesos electorales. El objetivo es hacer que el mínimo número de votos que representa cada diputado sea el mayor posible.

Volvamos al ejemplo anterior en el que cuatro hipotéticos partidos, A, B, C y D obtenían respectivamente 1577, 1558, 892 y 351 votos. Dividimos el número de votos de cada partido entre 1, 2, 3, y así sucesivamente hasta el

número de concejales o escaños a repartir. En nuestro caso 13 (aunque por obtener mayor visibilidad hemos llegado solo hasta 7).

Partidos	Número de votos	1	2	3	4	5	6	7
A	1577	1577	788,50	525,67	394,25	315,40	262,83	225,29
B	1558	1558	779,00	519,33	389,50	311,60	259,67	222,57
C	892	892	446,00	297,33	223,00	178,40	148,67	127,43
D	351	351	175,50	117,00	87,75	70,20	58,50	50,14

A continuación, asignamos los concejales a los cocientes mayores.

Partidos	Número de votos	1	2	3	4	5	6	7
A	1577	1577	788,50	525,67	394,25	315,40	262,83	225,29
B	1558	1558	779,00	519,33	389,50	311,60	259,67	222,57
C	892	892	446,00	297,33	223,00	178,40	148,67	127,43
D	351	351	175,50	117,00	87,75	70,20	58,50	50,14

La asignación de concejales queda de la siguiente manera.

Partidos	Número de votos	Escaños asignados
A	1577	5
B	1558	5
C	892	2
D	351	1

¿Qué observas como diferencia con el reparto empleado en el método de Hamilton?

Actividad 3

Reparte los concejales de la actividad 2 anterior utilizando el método D'Hont.

Índices de poder

En una votación política, en el consejo de una empresa, en el Consejo Escolar de un centro educativo, se producen alianzas en favor de una propuesta o en contra. El voto de algunos colectivos o representantes es decisivo para oponerse o conseguir que la propuesta salga adelante.

Cuando uno o más grupos se unen para dar sus votos en la misma dirección se denomina coalición.

Las alianzas entre grupos o personas que pueden conseguir que una propuesta salga adelante se llama coalición ganadora. Cuando las alianzas se realizan para bloquear una propuesta se denomina coalición de bloqueo. El peso de la coalición es el número de votos que suman los miembros de la coalición.

Pero todos no tienen la misma capacidad para decidir o bloquear la propuesta. En general, cuanto mayor sea el número de votos que el votante posea el poder será mayor. Pero no siempre es así. En política, algunos grupos con un pequeño número de diputados tienen a veces mucho poder.

En el consejo de una empresa hay seis grupos, cada uno de ellos con los siguientes votos: {grupo A: 31 votos, grupo B: 31, grupo C: 28, grupo D: 21, grupo E: 2, grupo F: 2}. Por tanto 115 votos y la mayoría absoluta se consigue con 58 votos. Una coalición puede ser la formada por los grupos B, C y E. Además esta coalición es ganadora porque suman 61 votos y por tanto tienen mayoría absoluta. La coalición A, D, E y F es una coalición perdedora porque la suma de sus votos, 56, es inferior a la mayoría absoluta.

Actividad 4

- a) Escribe todas las diferentes coaliciones que se pueden hacer con tres partidos P_1, P_2, P_3 . ¿Cuántas coaliciones diferentes has encontrado?
- b) De forma similar, calcula cuántas coaliciones diferentes hay con 5 partidos.
- c) Generaliza el recuento para N partidos y di cuántas coaliciones diferentes hay con N partidos.

Actividad 5

En un ayuntamiento en el que hay representados tres partidos ($P_1=5$ concejales, $P_2=5$ concejales y $P_3=4$ concejales), la mayoría absoluta se consigue con 8 votos. Haz una lista con las posibles coaliciones que se podrían hacer e indica cuáles de ellas serían ganadoras y cuáles perdedoras. ¿Qué ocurriría si para conseguir un acuerdo se necesitasen 12 votos?

El poder de Banzhaf

El Consejo Escolar de un centro está constituido por grupos que representan a los padres, a los profesores, a los estudiantes y al PAS. En general, esperamos que todos los miembros del mismo grupo ideológico o de inte-

reses voten en la misma dirección. Pero no siempre ocurre así y se forman coaliciones para apoyar o rechazar las propuestas.

Supongamos un consejo formado por cuatro votantes que llamaremos A, B, C y P. Cada uno tiene un voto y el presidente (P) puede utilizar un segundo voto en caso necesario. Se formará una coalición ganadora si se consiguen al menos tres votos. La coalición PA es una coalición ganadora en la que P es fundamental. Es decir, la presencia de P garantiza la victoria de la coalición. Igual ocurre con la coalición PBC. Sin embargo, P no es fundamental en la coalición PABC.

Para medir el poder que tienen los grupos para formar coaliciones ganadoras o de bloqueo se utilizan algunos indicadores. El índice de Banzhaf es uno de ellos y se calcula sumando el número de coaliciones ganadoras en las que el votante es fundamental y el número de coaliciones de bloqueo en las que también es fundamental.

En el comité anterior, las posibles coaliciones son: {P, A, B, C, PA, PB, PC, AB, AC, BC, PAB, PAC, PBC, ABC, PABC}. De ellas, son ganadoras {PA, PB, PC, PAB, PAC, PBC, PABC}. Pero PABC es la única coalición en la que ninguno de los miembros es fundamental. Tampoco hay coaliciones de bloqueo. Por tanto, el poder de Banzhaf de P es:

$I(P)$ = coaliciones ganadoras en las que P es fundamental = 6.

$I(A)$ = coaliciones ganadoras en las que A es fundamental = 1.

$I(B)$ = coaliciones ganadoras en las que B es fundamental = 1.

$I(C)$ = coaliciones ganadoras en las que C es fundamental = 1.

Así que P tiene mucho más poder que el resto de los miembros del consejo.



Figura 2. John Banzhaf
Fuente: Alamy, Times Higher Education

Actividad 6 La composición actual del Ayuntamiento de Madrid es la siguiente:

PP, 21 concejales
 AhoraMadrid, 20 concejales
 PSOE, 9 concejales
 C's, 7 concejales

Estudia el índice de poder de Banzhaf de cada uno de ellos.

Índice de Shapley-Shubik

Este índice mide el poder no en una coalición sino en una votación en la que todos participan aunque con distintos pesos. Es el caso de las votaciones en los Consejos de Ministros de la Unión Europea. El método de obtención del índice de poder para un miembro dado, P , consiste en obtener todas las permutaciones de los miembros o votantes en el juego y , en cada una de las permutaciones en las que figure P , observar si los partidos que le preceden en el orden que figura en esa permutación forman coalición no ganadora que, sin embargo, si se le sumara el votante P entonces tal coalición sí pasaría a ser ganadora. En este caso, tal permutación se denominará un pivote de P .



Figura 3. Lloyd S. Shapley
 Fuente: UBS Together

El índice de poder del miembro P se define como el cociente de dividir el número de pivotes de P por el número total de permutaciones.

Pensemos en el consejo de una empresa dirigido por cuatro familias con los siguientes porcentajes de representación:

Familias	% representación
Familia A	40
Familia B	5
Familia C	25
Familia D	30

Vamos a escribir todas las posibles permutaciones:

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	CABD	CADB
CBAD	CDAB	CDBA	BDCA	BDAC	CBDA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

En verde están señaladas las permutaciones en las que C es pivote y en amarillo aquellas en las que D es pivote. El índice de poder de C es

$I(C) = 8/24 = 1/3$ y el de D, $I(D) = 8/24 = 1/3$. Si estudias las permutaciones para las que A y B es pivote obtendrás como resultado $I(A) = 1/3$ e $I(B) = 0$. Observa que aunque A tiene más acciones que C y D, sin embargo tiene el mismo poder.

Estudia y explica las consecuencias, en términos de poder, de que A ceda el 5% de sus acciones a alguna de las otras familias. Actividad 7

Elijamos delegado

Si queremos elegir el delegado de la clase podemos pedir que todos los estudiantes del aula recojan en una papeleta sus preferencias. Se cantan los votos y la alternativa que más votos tenga será finalmente el representante de la clase.

Si tenemos dos candidatos, el que más votos tenga resultará ganador. Este método se conoce como método de mayoría absoluta. Si el número de electores es par se podría producir un empate, pero si no hay empate, este método siempre proporciona un ganador.

Si hay más de dos candidatos este método no produce siempre un ganador *absoluto* y se han encontrado métodos que permiten aproximarse a ello.

Mayoría simple

Uno de los métodos más conocidos es el de mayoría simple. Cada estudiante deposita su voto en la urna en la que se incluye su preferencia y se cuentan los votos. El candidato con más votos será el elegido. Por ejemplo, si en una clase con 30 alumnos el candidato A tiene 12 votos y los candidatos B y C tienen 9 cada uno, no hay ningún candidato con mayoría absoluta (se necesitan 15 votos) pero por el método de mayoría simple, A sería el ganador. Sin embargo, podría ocurrir que ganara la más impopular de todas las alternativas. Para ello sería suficiente que todos los electores de B y C pensarán que estos dos candidatos están mejor cualificados para representar la clase que A. Así B o C serían preferidos por 18 votantes y A por 12.



Figura 4. Papeleta de Reino Unido empleada en los sistemas de votación por mayoría simple.
Fuente: chalkdust. *A magazine for the mathematically curious*

El candidato que obtendría el mayor apoyo si confrontamos a los candidatos uno a uno, se denomina vencedor de Condorcet. En el método de mayoría simple se puede dar la circunstancia de que el perdedor de las elecciones, sería el vencedor de Condorcet.

<i>Número de votantes y sus preferencias</i>			
2	8	8	7
A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A

El método de mayoría simple determinará como ganador al candidato A con 10 votos frente a B, 8 votos, y C con 7 votos. Sin embargo, B y C serían los preferidos de 15 votantes mientras que A es preferido por 10 de los votantes. De hecho, si los comparamos uno a uno, el orden de elección sería $C > B > A$.

Segunda vuelta

Una técnica suele evitar el problema de la mayoría simple, la elección en segunda vuelta. Los electores se someten a una primera vuelta en la que se aplica el método de mayoría simple. Si el vencedor gana con mayoría absoluta de votos saldrá elegido. En otro caso, se seleccionan los candidatos más votados (generalmente dos) y se realiza una segunda vuelta. El vencedor de esta será la elegida.

Supongamos que se presentan tres candidatos A, B y C y las preferencias de los electores son las siguientes:

<i>Número de votos</i>	<i>Preferencias de los electores</i>			
	5	7	4	3
A	B	A	C	
B	A	C	B	
C	C	B	A	

En la primera vuelta, A recibiría 9 votos, B recibiría 7 y C recibiría 3. Como ningún candidato recibe los 10 votos necesarios para obtener mayoría absoluta, pasamos a la segunda vuelta con los dos candidatos con más votos. La descripción de las preferencias sería la siguiente:

<i>Número de votos</i>	<i>Preferencias de los electores</i>			
	5	7	4	3
A	B	A	B	
B	A	A	B	

Finalmente B, con 10 votos, gana a A con 9. Este sistema se utiliza en las elecciones presidenciales de Francia pero no se pueden mantener en el

modelo las preferencias de la primera vuelta porque la campaña electoral entre la primera y la segunda vuelta cambia el sentido del voto.

Método de Borba

Como vemos, sería interesante conocer las preferencias de los electores. El método de Borba permite al elector dar una ordenación completa de las alternativas. Después se asigna una puntuación fija al primero, al segundo, al tercero, y así sucesivamente.

Vamos a asignar los puntos 3, 2 y 1 en la siguiente elección.

Número de votos	Preferencias de los electores			
	5	7	4	3
A	B	A	C	
C	C	C	B	
B	A	B	A	

Por mayoría simple, C sería perdedor con tan solo 3 votos. Sin embargo, por el método de Borba sería el ganador con 41 puntos frente a los 37 de A y los 36 de B.

Lo más discutible de este método es la asignación de la puntuación porque los resultados pueden ser diferentes según los resultados. Si en el ejemplo anterior la puntuación asignada fuese 4, 2 y 1 entonces el ganador habría sido A con 44 puntos.

Este método suele utilizarse en competiciones deportivas. Por ejemplo para determinar el mejor país en la competición de los juegos olímpicos se asignan 3 puntos por cada medalla de oro, 2 por cada medalla de plata y 1 por cada medalla de bronce.

En las carreras de F1 cada posición de llegada tiene asignada una puntuación. Eso determina el ganador final de la temporada automovilística .

Voto Único Transferible

Este método, también conocido como método de Hare, ha sido utilizado en Australia y en Irlanda.

Si ningún candidato obtiene mayoría basada en los votos del primer lugar de preferencia, eliminamos al candidato con el menor número de votos y realizamos una nueva elección basada en votar solo para los candidatos que han quedado. Repetimos el proceso hasta que un candidato reciba la mayoría de votos en primer lugar de preferencias.

Las sociedades democráticas describen la votación y las elecciones como el resultado inevitable de la contribución de los votantes. El ganador

de las elecciones es, de alguna manera, la elección del pueblo. Sin embargo, los resultados de los métodos de elección anteriores aplicados al mismo ejemplo cuestionan esta afirmación. Los resultados de esta elección dependen de la selección del sistema utilizado para llevarla a cabo: las papeletas son las mismas en cada caso, solo el resultado es diferente. Así pues, quienes tienen el poder de seleccionar el método de elección pueden determinar el resultado. Solo se necesita acompañar cada uno de estos métodos de una explicación atractiva para respaldarlo.

Actividad 8

- ¿Cuántos votos se necesitan para ganar por mayoría absoluta si hay 27 electores?
- ¿De cuántas maneras posibles podemos ordenar los resultados de unas elecciones con seis candidatos suponiendo que el empate no es posible?

Actividad 9

- Álex, Marta y Raúl se presentaron para delegado de la clase de sexto. De los 36 estudiantes, 16 votaron por Álex, 12 por Marta y 8 por Raúl. ¿Cuál fue la razón de los votos de Álex a los votos de Raúl? ¿Cuál fue la razón de votos de Marta a los votos de Raúl? ¿Cuál fue la razón de votos para Marta para los votos de Álex?
- Debido a que nadie obtuvo la mitad de los votos, tuvieron que tener una segunda vuelta electoral. Marta se retiró y convenció a todos sus votantes a votar por Raúl. ¿Cuál es la nueva razón de votos de Raúl a los votos de Álex?
- Álex y Raúl también se postularon para el Consejo Escolar. Hay 90 estudiantes votando en la escuela. Si la proporción de votos de Raúl a los votos de Álex sigue siendo la misma que en la parte (b), ¿cuántos votos más obtendrá Raúl que Álex?

Actividad 10

Considera los siguientes resultados de unas elecciones en los que se incluye la prioridad de los votantes.

Encuentra el vencedor de las elección utilizando:

Número de votos	Preferencias de los electores					
	18	12	10	9	4	2
A	B	C	D	E	E	E
D	E	B	C	B	C	C
E	D	E	E	D	D	D
C	C	D	B	C	B	B
B	A	A	A	A	A	A

- El método de mayoría simple.

- b) El método de segunda vuelta.
- c) El método de Borba. Asigna tú los pesos.
- d) Por Voto Único Transferible.

Actividad 11

Los estudiantes de la clase de un instituto van a elegir a su delegado entre cuatro candidatos: A, B, C y D. Las preferencias de los estudiantes se reparten de la siguiente manera:

Número de votos	Preferencias de los electores			
	16	10	8	2
	A	B	C	B
	B	A	B	A
	C	D	A	C
	D	C	D	D

- a) ¿Cuántos estudiantes hay en clase?
- b) ¿Quién sería el delegado si lo elegimos por mayoría?
- c) ¿Quién sería el delegado si lo elegimos por el método de Borba asignando los pesos (3, 2, 1, 0)?
- d) ¿Quién sería elegido si la clase decide utilizar el método de Borba con pesos (5, 2, 1, 0)?

Actividad 12

Los 25 estudiantes de una clase tienen que elegir su delegado entre tres candidatos. La tabla con las preferencias es la siguiente:

Número de votos	Preferencias de los electores			
	8	6	7	4
	X	Y	Z	Y
	Z	Z	X	X
	Y	X	Y	Z

Han decidido utilizar un sistema de puntuación donde se asigna n puntos a la primera preferencia, 2 a la segunda y 1 a la tercera. Sabiendo que n es un número entero mayor que 2.

- a) ¿Para qué valores de n , X es el vencedor?
- b) ¿Para qué valores de n , Y es el vencedor?
- c) ¿Para qué valores de n , Z es el vencedor?
- d) ¿En algún caso no hay un vencedor?

Bibliografía

- MORENO, A., y A. VILLEGAS (2017), *Matemáticas electorales*, Catarata Ediciones, Madrid.
- RAMÍREZ, V. (2002). «Matemática electoral», *El lenguaje matemático en sus aplicaciones*, Ministerio del Interior, Madrid.
- WALLIS, W. D. (2014), *The Mathematics of Elections and Voting*, Springer, Nueva York.