Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

Presentación

En este número nos visita un protagonista destacado del avance en una rama reciente de la matemática, la teoría de categorías (TC), a la que ha contribuido de manera notable desde que se incorporó a ella en la segunda mitad de los años sesenta del pasado siglo. Lo que publicamos, pues, no es un estudio de investigación histórica, que es lo habitual en la sección, sino un documento para la historia, un texto que los historiadores podrán tener en cuenta.

Una vez terminada en 1965 la licenciatura en matemáticas en la Universidad de Buenos Aires, Eduardo J. Dubuc recaló en enero de 1967 en la Universidad de Chicago, donde cursó el doctorado bajo la supervisión de Saunders Mac Lane (1909–2005), uno de los fundadores de la TC. Estaba en una posición privilegiada para conocer de primera mano el desarrollo todavía reciente de esa rama emergente de la matemática y contribuir a ella. La experiencia de Dubuc durante su investigación doctoral se plasmó en 1970 en la obra *Kan extensions in enriched category theory*[1], una de las que cierran su recorrido por los primeros treinta años de la TC, desde los primeros años cuarenta a los primeros setenta del siglo XX. Este periodo se cierra, precisamente, cuando Mac Lane publicó el libro *Categories for the working mathematician*[2], que devino un clásico de referencia obligatoria en el tema.

Durante la década de los setenta Dubuc permaneció en Montréal, Québec, y luego retornó a su país como profesor en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires y miembro de la Carrera del Investigador en el CONICET[3], funciones en las que sigue activo.

El artículo que sigue ha surgido a partir de diez filminas manuscritas que el autor utilizó en una conferencia impartida en octubre de 2013 en Cali (Colombia), donde un cruce al azar de caminos personales situó a José Ferreirós entre el público. Con el fino sentido de quien fue responsable de esta sección, Ferreirós sugirió a Dubuc que su conferencia quedara recogida en La Gaceta de la RSME, lo que este aceptó. Llegado el asunto a mis manos como responsable actual de la sección, no me quedó sino agradecer a ambos la iniciativa. El profesor Dubuc ha completado el texto para dar continuidad como relato a lo que inicialmente era un esquema discreto, pero

[1]Springer, New York, 1970.

[2]Springer, New York, 1971. La obra tuvo una segunda edición ampliada en 1998.

[3]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina.

Eduardo Dubuc (izquierda) y Saunders Mac Lane (derecha) en el CT99 de Coimbra. Fotografía tomada por Jürgen Koslowski el día 21 de julio de 1999, durante la excursión en el congreso *Category Theory 1999* (`http://www.mat.uc.pt/~ct99/`).

manteniendo el estilo lineal del mismo, apoyado en una cuidada selección personal de obras clave y dejando también invariante el carácter de texto de conferencia, lo que limita la amplitud que puede darse al tratamiento del tema pero, a cambio, y no es poca la ventaja, ofrece un frasco de esencia concentrada.

La comprensión completa del artículo requiere algún conocimiento previo de la TC. Si su lectura incita al lector a conocer mejor o por vez primera la TC puede dirigirse al libro de Mac Lane ya citado, o al menos a la obra más pedagógica y asequible *Matemáticas conceptuales: Una primera introducción a categorías*[4] de F. W. Lawvere y S. H. Schanuel.

Sobre el desarrollo de la TC durante sus años iniciales e incluso toda la segunda mitad del siglo XX se han escrito diversos trabajos. El propio Mac Lane nos dejó en 1988 «Concepts and categories in perspective»[5]. El historiador L. Corry glosó la nueva «imagen» del álgebra, convertida en teoría de estructuras hacia los años treinta del pasado siglo, en un libro[6] que termina presentando la TC como un estadio avanzado de estructura matemática. Desde puntos de vista matemáticos, históricos o filosóficos responden varios autores a la pregunta *What is category theory?* que dio título a un libro colectivo[7] en el que participó R. Krömer, quien, un año después, publicó un grueso volumen[8] explicando el tránsito de la TC «de herramienta a objeto», una evolución que se aprecia bien en el artículo al que ya doy paso.

---

[4]Siglo XXI Editores, México, 2002. El original en inglés fue editado primero por Buffalo Workshop Press en 1991 y en 1997 por Cambridge University Press.

[5]En *A Century of Mathematics in America*, Part I, AMS, Providence, 1988, págs. 323–365.

[6]L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.

[7]G. Sica (ed.), Polimetrica, Monza, 2006. Contiene un artículo del filósofo J-P. Marquis que comparte título con el libro, págs. 221–255.

[8]*Tool and object. A history and philosophy of category theory*, Birkhäuser, Basel, 2007.

Categorías. Los 30 primeros años

por

Eduardo J. Dubuc

El lector debe tener en cuenta que esta recopilación de los 30 primeros años de vida de la teoría de categorías responde a lo que puedo recordar, y no es el resultado de una investigación histórica sobre el desarrollo de la misma. El relato tiene como hilo conductor las veintiuna referencias primarias que aparecen por orden cronológico al final del artículo, las secundarias irán en notas a pie de página.

Asimismo, he querido que estas notas sean un fiel reflejo de la conferencia impartida en octubre de 2013 en la ENHEM 4[1], de contenido acotado por el tiempo, y no incluyen ni más ni menos que lo allí dicho. Quiero agradecer a los organizadores de la ENHEM 4, y en particular a Luis Recalde, el haberme invitado a la Escuela, sin lo que este trabajo nunca hubiese visto la luz.

La definición de categoría y los primeros pasos

[1941] Hacia 1941, en la teoría de la homotopía se empezó a representar funciones como flechas y ecuaciones como diagramas conmutativos:

$$h = gf \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd} \tag{1}$$

La validez de la ecuación dice que h es la *composición* de f con g, y se expresa gráficamente diciendo que el correspondiente triángulo es *conmutativo*.

Esta notación condujo a un concepto: se tienen *objetos*, se tienen *flechas* y se tienen diagramas que expresan la composición de flechas. Las propiedades básicas son las ecuaciones de *identidad*, $f\,\mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y\,f$, y la *asociatividad* de la composición, $h(gf) = (hg)f$. Es decir, se tiene una *categoría*.

[1942–1945] La definición de categoría apareció en el trabajo de Eilenberg-Mac Lane[2] [2] (1945) para dilucidar la estructura abstracta subyacente en los desarrollos de [1] (1942). En una categoría hay una correspondencia biyectiva entre los morfismos identidad «id_X» y los objetos «X», de forma tal que estos pueden ser omitidos en la definición de categoría. Sin embargo, Eilenberg y Mac Lane escriben:

[1] Cuarta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, Cali (Colombia).
[2] Samuel Eilenberg (1913–1998), Saunders Mac Lane (1909–2005).

> *Es claro por tanto que los objetos juegan un papel secundario y podrían ser completamente omitidos en la definición de categoría. Sin embargo, la manipulación de las aplicaciones sería algo menos conveniente si así se hiciera.*[3]

Así, desde el comienzo, una clara distinción entre objetos y flechas, acorde con la notación de diagramas, hace a la esencia misma de la noción de categoría, aunque desde un punto de vista puramente formal los objetos podrían haber sido completamente dejados de lado.

En [2] se establece explícitamente el principio: *Dado cualquier objeto matemático debe considerarse también una noción de morfismo.* Se llega así a la sucesión de nociones:

$$\textit{Categorías} \rightsquigarrow \textit{Funtores} \rightsquigarrow \textit{Transformaciones naturales.}$$

En los primeros ejemplos, este lenguaje se utilizó para clarificar y definir en forma compacta un concepto de gran complejidad, como es la comparación (*transformación natural* α) entre dos teorías de homología (*funtores* F *y* G) que asocian a cada espacio X (*objeto de la categoría* $\mathcal{G}$) un álgebra (FX, GX, *objetos de la categoría* $\mathcal{A}$). Todo esto se resume con una representación conjunta en el sencillo diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, shift right=2, "G"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad FX \xrightarrow{\alpha_X} GX \tag{2}$$

En estas obras, la teoría de categorías es desarrollada y utilizada esencialmente como una notación y un lenguaje, y también para unificar construcciones. Un ejemplo considerado explícitamente en [2] es la noción de *límite inverso*, que unifica la construcción de los números p-ádicos con la construcción de la homología de Cĕch:

Dado el conjunto ordenado de los números $\{\ \cdots\ \geq n \geq n-1 \geq\ \cdots\ \geq 0\}$, se tiene el sistema inverso determinado por el grupo de enteros módulo p^n, cuyo límite inverso es el grupo de enteros p-ádicos:

$$\mathbb{Z}_p \quad \to \quad \left\{\ \cdots\ \to \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{p^{n-1}\mathbb{Z}} \to\ \cdots\ \to \{0\}\right\}.$$

Un espacio topológico X determina el conjunto de cubrimientos abiertos ordenado por refinamiento $\{\ \cdots\ \succ \mathcal{V} \succ \mathcal{U} \succ\ \cdots\ \succ \{X\}\}$. Dado un grupo G y un entero q, se tiene el sistema inverso determinado por el q-ésimo grupo de homología del nervio del cubrimiento con coeficientes en G, cuyo límite inverso es el q-ésimo grupo de homología de Cĕch de X:

$$\text{Cĕch}(X) \quad \to \quad \left\{\ \cdots\ \to H^q(N(\mathcal{V}), G) \to H^q(N(\mathcal{U}), G) \to\ \cdots\ \to \{0\}\right\}.$$

En ese primer momento, estos límites se construyen con los elementos de los conjuntos subyacentes. No se considera la *propiedad universal* del límite.

---

[3] *It is thus clear that the objects play a secondary role, and could be entirely omitted from the definition of a category. However, the manipulation of the applications would be slightly less convenient were this done.* [2, pág. 238]

La noción de propiedad universal

[1948] Parece que la noción de propiedad universal surge por primera vez en 1948, en trabajos sobre topología de Pierre Samuel, que era miembro de Bourbaki. Las propiedades universales fueron incorporadas por Bourbaki en su libro sobre la teoría de conjuntos y el concepto de estructura [3] (1939–1957). Allí considera, por ejemplo, el grupo libre $L(S)$ sobre un conjunto S y el producto tensorial $G \otimes H$ de dos grupos abelianos, expresados aquí abajo por sus diagramas:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, bend right, "\forall\ \text{función}"'] & L(S) \arrow[d, dashed, "\exists!\ \text{morfismo}"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\text{bilineal}"] \arrow[dr, bend right, "\forall\ \text{bilineal}"'] & G \otimes H \arrow[d, dashed, "\exists!\ \text{morfismo}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Allí también se consideran las construcciones de límite inverso (o *proyectivo*) y de *límite directo* (o *inductivo*). Estas son construcciones totalmente distintas, pero ambas caracterizadas por propiedades universales, y, significativamente, esta caracterización es el primer enunciado demostrado por Bourbaki inmediatamente después de las respectivas definiciones conjuntistas. Luego figuran una serie de proposiciones todas demostradas a partir de la propiedad universal, y no de las construcciones explícitas de la definición. Sin embargo, Bourbaki se ve obligado a escribir en detalle dos veces cada demostración, una para cada concepto. Ello es debido a que, si bien se trata de propiedades universales duales una de la otra (por lo que basta una única demostración para validar ambas), para el propio enunciado de este hecho es necesario contar con la noción de categoría, de propiedad universal definida con ese lenguaje, y del principio de dualidad de Mac Lane considerado más abajo.

Cuenta Armand Borel (1923–2003)[4] que Alexander Grothendieck había presentado a Bourbaki un proyecto (detallado) para escribir los fundamentos en el lenguaje categórico, pero fue descartado luego de largas discusiones, porque finalmente primó la política que afirmaba que generalizaciones que no agregan aplicaciones deben descartarse, versus la política de Grothendieck que sostenía que los fundamentos deberían estar hechos *no solo para la matemática existente sino también para la posible matemática futura.*[5]

Es posible pensar que también haya influido en la decisión de Bourbaki el hecho de que aceptar el proyecto de Grothendieck implicaba una reescritura completa de todo un libro que ya estaba escrito en su forma final. También se aduce (en mi opinión equivocadamente) que utilizar las categorías implicaba dificultades debido a que la teoría de conjuntos no resultaba suficiente para definir la noción de categoría en forma adecuada. Sin embargo, estas dificultades son puramente de naturaleza técnica y ya habían sido satisfactoriamente resueltas por Grothendieck con su teoría de

[4] Armand Borel, «Twenty-five years with Nicolas Bourbaki (1949–1973)», *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998) (3), 373–380.

[5] En palabras de Borel: *his plan aimed at supplying foundations not just for existing mathematics, as had been the case for the «Elements», but also for future developments to the extent they could be foreseen.* [*op. cit.* pág. 378]

universos (cardinales fuertemente inaccesibles), más tarde publicada en un apéndice de [16] firmado por Bourbaki.

La noción categórica de propiedad universal

[1948–1950] Pasó una década sin grandes novedades en la propia teoría de categorías. Los inventores del concepto trabajaron con enunciados categóricos pero en categorías particulares. Mac Lane lo hizo en sus artículos sobre categorías de grupos [4] (1948) y [5] (1950). Allí utiliza la riqueza del lenguaje categórico, que permite considerar *enunciados duales* (el enunciado dual se obtiene invirtiendo la direccion de las flechas, como está ilustrado aquí abajo) y *demostraciones duales*, lo que resulta posible por ser los axiomas de categoría *autoduales*. Explícitamente establece el principio de dualidad: *si un enunciado sobre una categoría se sigue de los axiomas de categoría, el enunciado dual también se sigue*[6]. También introduce la definición de objetos por medio de propiedades universales en lugar de las clásicas construcciones conjuntistas. Esto permite automáticamente la consideración de las definiciones duales.

Como ejemplos de definiciones universales y sus duales tenemos las siguientes, expresadas por sus diagramas (entre paréntesis indicamos la correspondiente construcción en la categoría de los conjuntos). En la primera fila, el *producto cartesiano* «$\times$» (conjunto de pares de elementos) y el *objeto final* «1» (conjunto de un solo elemento $\{*\}$), y debajo, en la segunda, sus respectivos duales, el *coproducto* «$\amalg$» (unión disjunta) y el *objeto inicial* «0» (conjunto sin elementos $\emptyset$):

$$\begin{tikzcd} & & & A \\ X \arrow[rrru, bend left] \arrow[rrrd, bend right] \arrow[rrr, dashed, "\exists!"] & & & A \times B \arrow[u] \arrow[d] \\ & & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rrr, dashed, "\exists!"] & & & 1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & & A \arrow[d] \arrow[llld, bend right] \\ X & & & A \amalg B \arrow[lll, dashed, "\exists!"'] \\ & & & B \arrow[u] \arrow[lllu, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X & & & 0 \arrow[lll, dashed, "\exists!"'] \end{tikzcd}$$

Este ejemplo, pero en la categoría de los grupos, es considerado explícitamente en [5]. En ese caso, «$\times$» sigue siendo el grupo de pares de elementos, y «1», el grupo de un solo elemento $\{e\}$[7]. Pero «$\amalg$» no es la unión disjunta (que no tiene estructura de grupo) sino que es el producto libre de grupos. «0» es ahora también $\{e\}$, así, $1 = 0$ en la categoría de grupos.

Otro ejemplo considerado lo proporciona el grupo cociente asociado a un subgrupo $K \subseteq G$, que da lugar a un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G/K$ que verifica $\rho(K) = e$,

[6] *DUALITY PRINCIPLE. If any statement about a category is deducible from the axioms for a category, the dual statement is likewise deducible.* [5, pág. 498]

[7] Se usa la letra e para denotar la unidad de un grupo.

donde el grupo G/K es un conjunto de clases de equivalencia. Ahora, la noción se enuncia como la propiedad universal del homomorfismo ρ entre todos los que tienen la propiedad $\varphi(K) = e$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, bend right, "\forall\, \varphi"'] & G/K \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \rho(K) = e \\ & B & \varphi(K) = e \end{tikzcd}$$

Definidos de esta manera, los objetos son caracterizados salvo isomorfismo (único). Así, cualquier suryección de grupos $\varphi : G \longrightarrow H$ puede ser considerada el cociente $H = G/K$ por el subgrupo $K = \text{Núcleo}(\varphi) = \varphi^{-1}(e)$. Esta manera de pensar «categórica» es tan radicalmente diferente de la clásica manera «conjuntista» que el mismo Mac Lane, en ese entonces, todavía se le acerca con precaución, tímidamente. Por ejemplo, en el mismo trabajo, en su tratamiento de la dualidad observa que contrariamente a la relación de subgrupo, la relación dual, de cociente, no es transitiva, pues un cociente de un cociente no es un cociente (pensando cociente en el sentido conjuntista de clases de equivalencia), y hace toda una complicada elaboración con congruencias para arreglar el asunto. Sin embargo, de haber definido cociente por propiedad universal, la relación resulta automáticamente transitiva dado que cualquier suryección entre grupos es un cociente.

Dos libros fundamentales

[1950, 1953/56] En estos años Eilenberg, en colaboraciones con N. Steenrod (1910–1971) y con H. Cartan (1904–2008), publica dos libros fundamentales, [6] (1950) y [7] (1956)[8], que hacen uso extensivo de las categorías, funtores y transformaciones naturales como una eficiente herramienta para demostraciones en la categoría de módulos. Estos libros hicieron época, introdujeron el término *álgebra homológica* y dejaron la matemática madura para el desarrollo de la teoría de categorías en sí misma. Sin embargo, todavía no hacen uso del concepto de propiedad universal.

El lema de Yoneda

Las categorías son la estructura apropiada para tratar la noción de propiedad universal en su generalidad correcta, y a su vez esta noción hace que la teoría de categorías sea algo más que un exitoso lenguaje (para establecer enunciados) y una poderosa herramienta (para establecer demostraciones), como había sido utilizada fructíferamente hasta el momento en los libros [6] y [7] antes citados.

[8] Según Cartan, el segundo libro fue entregado a Princeton University Press en 1953. Véase Hyman Bass, Henri Cartan, Peter Freyd, Alex Heller, and Saunders Mac Lane, «Samuel Eilemberg 1913–1998», *Bibliographical Memoirs*, vol. 79, The National Academic Press, 2000.

Las definiciones por *propiedad universal* implican una revolución en el pensamiento matemático. Su íntima relación con la noción de *funtor representable* dada por el *lema de Yoneda* es lo que hace de las categorías una teoría con construcciones y teoremas profundos.

[1954] Mac Lane y N. Yoneda (1930–1996) coincidieron en París al principio de los años 50, donde Mac Lane aprendió de boca del propio Yoneda sus trabajos en álgebra homológica. Mac Lane identificó, oculto como un caso particular en el cómputo de los funtores *Ext* en categorías de módulos, un resultado al que le otorgó una importancia que iba mucho más allá que el cálculo para el que lo utilizó Yoneda. Así lo popularizó en varias charlas (anteriores a la publicación de Yoneda [8] en 1954), y lo bautizó con el nombre «lema de Yoneda», enunciándolo ya en categorías abstractas[9].

Propiedades universales y funtores representables. Un funtor $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre categorías es una función que asigna objetos a objetos y flechas a flechas, respetando la estructura, lo que significa que envía triángulos conmutativos en triángulos conmutativos. El funtor se dice *contravariante* si invierte la dirección de las flechas, lo que se indica con «op», $F : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{Y}$. Dada una categoría $\mathcal{X}$ y en ella un objeto C, se tiene el funtor contravariante con valores en los conjuntos, $\hom(-, C) : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, definido en los objetos por el conjunto de flechas $\hom(X, C) = \{f \mid f : X \to C\}$. Un funtor contravariante $F : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ es *representable* si es isomorfo a un funtor $\hom(-, C)$.

Yoneda [8] (1954) estableció el resultado conocido como *lema de Yoneda*. Dada una transformacion natural $\theta : \hom(-, C) \to F$, el lema afirma que la asignación del elemento $\xi = \theta_C(\mathrm{id}_C) \in F(C)$ determina una biyección entre el conjunto de transformaciones naturales $\{\hom(-, C) \to F\}$ y el conjunto $F(C)$,

$$\mathrm{Nat}(\hom(-, C), F) \cong F(C).$$

Esta biyección usualmente se describe con el siguiente diagrama (donde indicamos también la aplicación inversa):

$$\frac{\theta_X : \hom(X, C) \to F(X), \quad \theta_X(f) = F(f)(\xi)}{\xi \in F(C), \quad \xi = \theta_C(\mathrm{id}_C)}.$$

Que F sea un funtor representable significa entonces que se tiene un objeto C y un elemento $\xi \in F(C)$ tal que la correspondiente transformación θ_X es biyectiva para todo X. Es decir:

(i) $\xi \in F(C)$.

(ii) $\forall\, x \in F(X), \exists! f : X \to C \mid F(f)(\xi) = x$.

[9] Véase `http://math.stackexchange.com/questions/53656/what-is-the-origin-of-the-expression-yoneda-lemma`

El objeto C (junto con ξ) es la solución a una *propiedad universal* en la categoría $\mathcal{X}$. Toda propiedad universal corresponde a un funtor Datos : $\mathcal{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. La existencia de solución significa que se tiene un *dato universal*, es decir, que el funtor «Datos» es representable. Nótese que nos estamos mordiendo la cola:

La definición abstracta de propiedad universal en una categoría $\mathcal{X}$ es, por definición, la representabilidad de un funtor definido en $\mathcal{X}$ con valores en los conjuntos.

Moduli spaces. Son de este tipo los problemas llamados «de Moduli» (*Moduli spaces*), versión actual del clásico problema que consiste en darle una estructura geométrica al conjunto de objetos geométricos que se quieren clasificar y estudiar cómo varían (modulan) continuamente (familias continuas parametrizadas por un espacio).

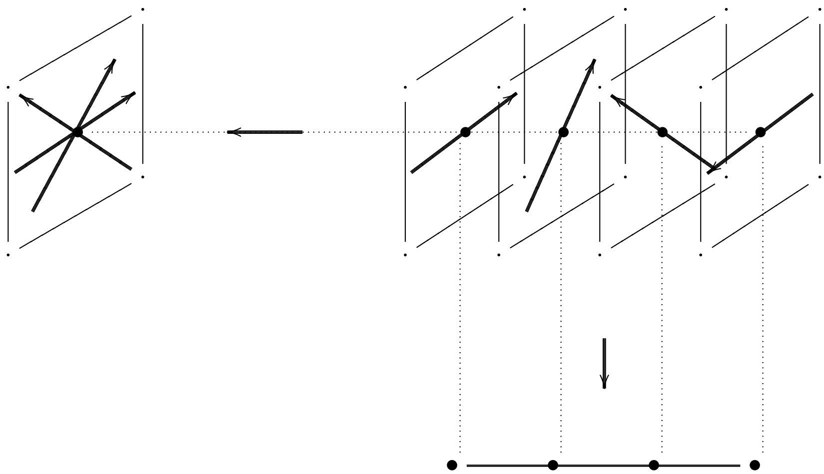

Figura 1: La recta proyectiva y la familia universal.

Lo ilustramos con el clásico ejemplo de los espacios proyectivos, más particularmente la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$, que es el conjunto de rectas por el origen en el plano. Este conjunto puede considerarse como el intervalo real $[0, \pi]$ con los extremos identificados: a cada $x \in [0, \pi]$ le corresponde la recta de pendiente x. Se construye un conjunto C en el espacio, $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^2$, dotado de la proyección $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$, poniendo sobre cada x la recta de pendiente x (figura 1). Así, cuando x avanza a partir de $x = 0$ hacia la derecha, las rectas van girando («modulan») hasta llegar a $x = \pi$, que es la misma recta de partida. La continuidad de este movimiento está dada matemáticamente por la topología del intervalo $[0, \pi]$ con los extremos identificados, y la del espacio $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$.

Consideremos la categoría Top de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, y el funtor $F : \mathrm{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ tal que $F(X)$ es el conjunto de familias continuas indexadas por X de rectas del plano que pasan por el origen, es decir,

$$F(X) = \{p : V \longrightarrow X,\ V \subseteq X \times \mathbb{R}^2,\ V_x = p^{-1}(x) = \text{una recta por el origen}\}.$$

El funtor F actúa en las flechas por medio del producto fibrado: para cada aplicación continua $f : Z \to X$, $F(f)(V) = f^*(V)$,

$$\begin{tikzcd} f^*(V) \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad f^*(V)_z = V_{f(z)}$$

Este funtor es representable por el par $\mathbb{P}^1 \in \text{Top}$, $(C \longrightarrow \mathbb{P}^1) \in F(\mathbb{P}^1)$, que es la *familia universal.* Esto significa que para cada familia $V \to X \in F(X)$, existe una única función continua $f : X \to \mathbb{P}^1$ tal que $V = f^*(C)$. Se tiene un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\forall"'] & C \arrow[d] \\ X \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad V_x = C_{f(x)}$$

La recta V_x se identifica con la recta de pendiente $f(x)$, y las rectas de la familia V indexada por X varían («modulan») continuamente según la función f.

Por el principio de dualidad, el lema de Yoneda es también válido para funtores covariantes $\hom(C, -) : \mathcal{X} \to \text{Set}$, $F : \mathcal{X} \to \text{Set}$, que definen propiedades universales del otro lado de la dualidad. En realidad, es el mismo lema pero enunciado en la categoría dual. En el caso contravariante el morfismo único «llega» a la solución, en el caso covariante el morfismo único «sale» de la solución.

La teoría de categorías abstractas

[1955–1957] Categorías abelianas. Alexander Grothendieck desarrolla el álgebra homológica del libro de Cartan-Eilenberg en categorías abstractas definidas por propiedades categóricas, llamadas *categorías abelianas* con las propiedades AB3, AB4, AB5, AB6. Esta publicación [9] (1957)[10] (conocida como *el Tohoku*) engloba, además de las categorías de módulos, a las categorías de haces de módulos. Se emplea por primera vez un sistemático uso de propiedades universales en las definiciones y sus duales.

[1958] Funtores adjuntos. Daniel M. Kan, al utilizar la teoría de categorías en un trabajo sobre la homotopía [10] (1958), introduce y desarrolla en abstracto el concepto de *funtores adjuntos*, teniendo en mente la realización geométrica de un conjunto simplicial.

[10] El trabajo ya estaba escrito en 1955 (carta a Serre del 4 de junio de 1955) y leído en un encuentro del grupo Bourbaki (respuesta de Serre del 13 de julio de 1955); véase *Correspondance Grothendieck-Serre*, Société Mathématique de France, 2001.

Un par de funtores $\mathcal{X} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$ se dicen *adjuntos*, y se denota $F \dashv G$, si se tiene una correspondencia biunívoca entre flechas expresada en el siguiente diagrama:

$$\forall\, X \in \mathcal{X},\ Y \in \mathcal{Y}, \qquad \frac{F(Y) \to X}{Y \to G(X)}. \tag{3}$$

La teoría de categorías abstractas comienza a despegarse de un desarrollo abstracto del álgebra homológica y se desarrolla en categorías que ya no son abelianas, inspirada en otras áreas de la matemática.

[1958] Categorías como generalizacion de grupoides, categorías internas. En esa época, un grupoide se concebía como un grupo cuya operación estaba solo parcialmente definida. Tenía identidades a izquierda y a derecha, y todo elemento era inversible. Charles Ehresmann (1905–1979), estudiando grupoides diferenciables, llega al concepto de categoría quitando el requerimiento de que todo elemento sea inversible. Introduce así el concepto de *categoría interna* (en la categoría de variedades diferenciables). Quitando además el requerimiento de que el conjunto de elementos sea una variedad diferenciable, abstrae el concepto de categoría. Es decir, las concibe como un monoide cuya operación está solo parcialmente definida. Así, desde este origen, las categorías no tienen objetos y flechas, solo elementos, entre ellos las identidades. Ehresmann desarrolla la teoría de categorías abstractas y muchas de sus nociones y resultados fundamentales, pero lo hace con un lenguaje desprovisto de objetos (ver página 336). Como consecuencia, sus trabajos resultan ilegibles y han sido ignorados y frecuentemente redescubiertos por otros autores.

Hoy en día, a los propios grupoides se les ha incorporado objetos, y son concebidos como categorías en las que toda flecha es inversible.

[1960] SGA1: Funtores pro-representables. Categorías fibradas. Grothendieck introduce en [12] (1960–61) estos conceptos fundamentales y desarrolla en particular una *teoría del descenso*, fundamentos que van mucho más allá de sus aplicaciones a la geometría algebraica. Un concepto clave en la noción de categoría fibrada es el de *morfismo cartesiano*, definido por una propiedad universal. Un *clivaje* consiste en una elección de morfismos cartesianos, pero Grothendieck omite el clivaje como parte de la estructura de categoría fibrada. Al respecto, hace el siguiente comentario: *es por otro lado probable, al contrario del uso todavía hoy predominante debido a viejas maneras de pensar, que terminará por adoptarse en los problemas universales no poner el acento en* una *solución elegida de una vez por todas, sino en poner todas las soluciones en un pie de igualdad*[11].

[11]SGA1 Exposé VI: *Il est d'ailleurs probable que, contrairement a l'usage encore prépondérant maintenant, lié à d'anciennes habitudes de pensée, il finira par s'avérer plus commode dans les problèmes universels, de ne pas mettre l'accent sur* une *solution supposée choisie une fois pour toutes, mais de mettre toutes les solutions sur un pied d'égalité.* [12, pág. 194]

[1964] El primer libro. En 1964 aparece un hermoso librito [13] (1964) del cual aprendimos mucho sobre categorías los estudiantes como yo, más acostumbrados a los libros que a los artículos originales.

[1967] Categorías de fracciones. El desarrollo por P. Gabriel y M. Zisman [14] (1967) de las categorías de fracciones está, como el concepto de funtor adjunto, inspirado en la teoría de homotopía.

Los topos

[1962–1964] Topos de Grothendieck y «cambio de base». La monumental obra SGA4 de Grothendieck (con M. Artin y J-L. Verdier) [16] (1963–64), precedida por [15] (1962), inicia la teoría de topos al estudiar las categorías de haces de conjuntos. Los topos aparecen como «generalización» de espacio topológico. Se considera esencial la noción de morfismo $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de topos, que corresponde a la noción de función continua y que incorpora explícitamente la imagen inversa. Los topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ son definidos por un sitio pequeño $\mathcal{C}$ (noción que generaliza el retículo de abiertos de un espacio topológico) en la categoría Set de los conjuntos, $\mathcal{E} = \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, y están dotados de un morfismo canónico (y único) $\mathcal{E} \to$ Set. El verdadero objeto de estudio es la 2-categoría $\mathcal{T}op$ de topos sobre Set, y los *cambios de base*, que son sus morfismos.

[1962–1970] Topos elementales. Los topos elementales surgen como generalización de la categoría de los conjuntos. En el periodo 1962–1970, en su programa de fundamentar la matemática con el concepto de categoría, F. William Lawvere publica una serie de artículos donde descubre e investiga propiedades de la categoría de conjuntos expresables por enunciados elementales del lenguaje categórico, y que son válidos también en las categorías de haces. Estos desarrollos culminan con la noción de *topos elemental* en un trabajo conjunto con Myles Tierney, presentado en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1970 [17]. Se considera al topos como un universo $\mathcal{S}$, aislado. Se muestra que es posible trabajar «internamente» en un topos $\mathcal{S}$. Lawvere introduce conectivas proposicionales por *propiedad universal* y cuantificadores como *funtores adjuntos* asociados a una proyección $\pi : X \times Y \to Y$:

$$\exists_x \dashv \pi_x^{-1} \dashv \forall_x : \ \mathrm{Partes}(Y) \begin{array}{c} \xleftarrow{\ \forall_x\ } \\ \xrightarrow{\ \pi_x^{-1}\ } \\ \xleftarrow[\ \exists_x\ ]{} \end{array} \mathrm{Partes}(X \times Y)\ .$$

Considerando Partes como extensiones de fórmulas con las correspondientes variables libres, las correspondencias dadas por la adjunción (ver diagrama (3)) resultan ser las siguientes:

$$\frac{\phi(y) \Rightarrow \forall_x \varphi(x,y)}{\pi_x^{-1}\phi(y) \Rightarrow \varphi(x,y)}, \qquad \frac{\exists_x \varphi(x,y) \Rightarrow \phi(y)}{\varphi(x,y) \Rightarrow \pi_x^{-1}\phi(y)},$$

donde «⇒» denota la relación de contenido entre subobjetos. Se obtienen exactamente la reglas de la *lógica intuicionista*, que no son otra cosa entonces que un caso del concepto matemático de funtores adjuntos.

El trabajo de Lawvere tiene un sustrato filosófico inspirado en el materialismo que considera la conciencia como parte de la materia. Así, para Lawvere, la lógica está contenida en la matemática, invirtiendo la relación establecida por Bertrand Russell.

[1970–1972] En varias conferencias impartidas en 1970–72, nunca publicadas pero ampliamente difundidas ([21]), André Joyal hace aportes fundamentales a la teoría de topos. En particular:

Semántica de Kripke-Joyal. La idea es aplicar la semántica de Tarski para la interpretación de las fórmulas lógicas en la categoría Set de los conjuntos, pero esta vez con la interpretación en un topos de Grothendieck arbitrario $\mathcal{E}$. Joyal logra describir explícitamente la semántica resultante, se tiene una *Sheaf semantics* que puede ser utilizada para validar enunciados internos en topos particulares. Esta semántica tiene como caso particular la semántica de Kripke, y frecuentemente es referida como *Kripke-Joyal semantics*.

Topos relativos a un topos de base. Joyal hace una síntesis de Lawvere y Grothendieck. Utilizando la lógica del topos, Joyal considera sitios internos en un topos $\mathcal{S}$, y muestra cómo construir un topos de haces (internos) $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, dotado de un morfismo canónico al topos («de base») $\mathcal{S}$. Son los $\mathcal{S}$-topos. Joyal demuestra que todo morfismo de topos de Grothendieck $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$ es de esa forma. Como $\mathcal{S}$ es arbitrario, dado un morfismo cualquiera entre topos de Grothendieck $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ puede ser considerado como un $\mathcal{F}$-topos. Esta es la culminación del concepto de «cambio de base».

Categorías enriquecidas, Bicategorías

[1966–1970] Categorías enriquecidas. Primero Eilenberg y Max Kelly (1930–2007) en [18] (1966) y luego Eduardo J. Dubuc en [20] (1970) establecen y desarrollan las nociones de *categorías cerradas*, *categorías monoidales cerradas* y la teoría de *categorías enriquecidas*. Toda categoría $\mathcal{X}$ esta dotada del funtor $\hom : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Set}$ que a cada par de objetos le asigna el conjunto $\hom(X, Y)$ de flechas entre X e Y. Una categoría monoidal cerrada $\mathcal{V}$ es una categoría que tiene la estructura suficiente para ser receptora de un funtor hom, y una categoría $\mathcal{X}$ enriquecida es una categoría dotada de un funtor $\hom : \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}$. Por ejemplo, si $\mathcal{V}$ es la categoría de los grupos abelianos, las categorías enriquecidas son las *categorías aditivas*, cuyos conjuntos $\hom(X, Y)$ son un grupo conmutativo.

[1969] Bicategorías. Si $\mathcal{V}$ es la categoría de categorías, las categorías enriquecidas son las 2-*categorías*, los conjuntos $\hom(X, Y)$ son una categoría cuyos objetos son las flechas $X \to Y$, y cuyas flechas, llamadas 2-*celdas*, son flechas entre flechas. El primer ejemplo es la categoría de categorías, cuyas flechas son los funtores, y cuyas 2-celdas son las transformaciones naturales, ver diagrama (2), en la página 336. Los conjuntos pueden considerarse como categorías cuyas únicas flechas son las identidades, son las 0-*categorías*, y en ellas solo tenemos la relación de igualdad $X = Y$ entre objetos. En las categorías usuales o 1-*categorías* podemos comparar objetos y tenemos la relación de *isomorfismo* $X \cong Y$, pero solo tenemos la relación de igualdad $f = g$ entre flechas. En las 2-*categorías* podemos comparar objetos de dos formas, con la relación de *equivalencia* $X \sim Y$, y con la relación de isomorfismo $X \cong Y$, y podemos comparar flechas con la relación de isomorfismo $f \cong g$, pero solo tenemos la relación de igualdad $\alpha = \beta$ entre 2-celdas. Está claro cómo esto puede seguir hasta el infinito. Así, una 3-*categoría* es una categoría cuyos hom son 2-categorías, y en ella se pueden comparar 2-celdas por medio de 3-*celdas*, etc.

0-cat: Conjunto: $X = Y$.
1-cat: Categoría: $X \to Y,\ X \cong Y,\ f = g$.
2-Categoría: $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & Y \end{tikzcd}$, $X \sim Y,\ X \cong Y,\ f \cong g,\ \alpha = \beta$.
...

Consideremos una estructura, como las 2-categorías, que tiene objetos, flechas y cuyos conjuntos $\hom(X, Y)$ son categorías, es decir, tiene 2-celdas. Entonces, el diagrama original (1) con el que comenzamos este artículo, al poder comparar flechas, puede expresarse

$$h \cong gf \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\cong"] & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Así, en una tal estructura, podemos relajar las ecuaciones de identidad y la asociatividad y poner como parte de la estructura isomorfismos $f\,\mathrm{id}_X \cong f \cong \mathrm{id}_Y\, f$, $h(gf) \cong (hg)f$. De este modo se tiene una estructura (que no es una categoría), introducida y desarrollada por Bénabou [19] (1969) bajo el nombre de *bicategoría.* A los isomorfismos de las identidades y de la asociatividad se les imponen unas pocas ecuaciones que resultan en este caso «dictadas» por el propio formalismo, que son los axiomas llamados *de coherencia.*

Hoy en día las bicategorías se llaman 2-*categorías débiles* dado que, repitiendo esta relajación de la asociatividad, al poder comparar 2-celdas se puede pedir que las identidades y la asociatividad de la composición de 2-celdas valgan «salvo» isomorfismos dados por 3-celdas. Estas son las 3-*categorías débiles.* En este caso, los axiomas de coherencia llenan varias páginas, y en el caso de las 4-*categorías débiles* nadie los ha podido escribir. Estas especulaciones no son vacías de contenido, ya que están íntimamente ligadas a la noción de homotopía entre funciones continuas, a las homotopías entre homotopías, y así sucesivamente. Es decir, se tiene un modelo concreto, pero no se sabe cuáles son los axiomas que cumple.

Pero hasta el año 1970 solo se había llegado a $n = 2$, es decir, a las bicategorías.

Referencias

[1] S. Eilenberg y S. Mac Lane, Group Extensions and Homology, *Ann. of Math.* **43** (1942), 757–831.

[2] S. Eilenberg y S. Mac Lane, General Theory of Natural Equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945), 231–294.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques, vol. I, Théorie des Ensembles*, Hermann, 1939–1957, 2.ª ed., 1970 (reimpresión en Springer, 2006).

[4] S. Mac Lane, Groups, categories and duality, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **34** (1948), 263–267.

[5] S. Mac Lane, Dualities for Groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **56** (1950), 485–516.

[6] S. Eilenberg y N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, 1952.

[7] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[8] N. Yoneda, On the homology theory of modules, *J. Fac. Sci. Tokyo, Sect. I.* **7** (1954), 193–227.

[9] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J. (2)* **9** (1957), 119–221.

[10] D. M. Kan, Adjoints functors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 294–329.

[11] C. Ehresmann, Catégories topologiques et catégories différentiables, *Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958)*, Centre Belgue Rech. Math., Louvain, 1959, 137–150.

[12] A. Grothendieck, *SGA1, 1960/61*, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer, 1971.

[13] P. Freyd, *Abelian Categories*, Harper and Row, 1964.

[14] P. Gabriel y M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebenisse der Mathematik vol. 35, Springer, 1967.

[15] M. Artin, *Grothendieck topologies*, Seminar notes, Harvard Univ. Press, 1962.

[16] M. Artin, A. Grothendieck y J. Verdier, *SGA4, 1963/64*, Lecture Notes in Mathematics **269** y **270**, Springer, 1972.

[17] F. W. Lawvere, Quantifiers and Sheaves, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Nice 1970)*, Gauthier-Villars, 1971, 329–334.

[18] S. Eilenberg y M. Kelly, Closed categories, *Proceedings of the 1965 La Jolla conference*, Springer, 1966, 421–562.

[19] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, Lecture Notes in Mathematics **47**, Springer, 1969.

[20] E. J. Dubuc, *Kan extensions in enriched category theory*, Lecture Notes in Mathematics **145**, Springer, 1970.

[21] A. Joyal, *varias conferencias no publicadas*, 1970–72.

Eduardo J. Dubuc, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Buenos Aires, Argentina
Correo electrónico: `edubuc@dm.uba.ar`