Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

La colección de modelos matemáticos de la Universidad de Zaragoza

por

Julio Bernués Pardo, María Teresa Lozano Imízcoz e Irene Polo Blanco

1. Los modelos geométricos alemanes del siglo XIX

Profesores e investigadores en el área de la didáctica han buscado constantemente maneras de mejorar la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones en Inglaterra, Japón, China y los Estados Unidos apoyan la idea de que la enseñanza de las matemáticas y la comprensión de los estudiantes es más efectiva si se utiliza material manipulativo ([6]).

El uso de modelos concretos matemáticos e instrumentos dinámicos fue común en Europa durante los siglos XVII y XVIII ([9]), pero tuvo un nuevo impulso en el siglo XIX. Encontramos un ejemplo, entre otros, en las escuelas politécnicas de Alemania durante la segunda mitad del siglo XIX, donde se construyeron modelos matemáticos para facilitar la visualización de objetos geométricos.

El periodo de construcción de modelos en Alemania comenzó alrededor de 1870, cuando Ludwig Brill, hermano del matemático Alexander von Brill, comenzó a reproducir y vender copias de algunos modelos matemáticos. En 1880 se fundó una compañía con el nombre de L. Brill para la producción de modelos, que se estableció en Darmstadt, y se trasladó a Halle a. d. Saale en 1899 bajo el nombre de Martin Schilling.

Para 1902 Martin Schilling había producido 23 series de modelos, y su catálogo de 1903 contiene 29 series con casi 300 modelos y aparatos. Estos modelos representan objetos de geometría diferencial, superficies algebraicas o instrumentos para la física. Es el primer catálogo considerado como una publicación científica porque contiene una segunda parte que aporta datos matemáticos de cada pieza. Se presenta diciendo:

> *En esta segunda parte se destacan las características de los modelos relacionados de las distintas series y está destinado principalmente a ayudar*

CATALOG

mathematischer Modelle

für den höheren mathematischen Unterricht

veröffentlicht

durch die Verlagshandlung

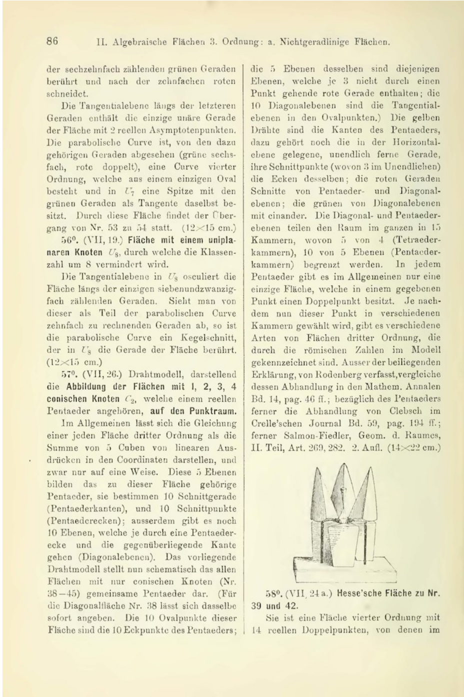
von

Martin Schilling in Halle a. S.

6705.7
9/11/05

Sechste Auflage.

Halle a. S.
1903.



86 II. Algebraische Flächen 3. Ordnung: a. Nichtgeradlinige Flächen.

der sechzehnfach zählenden grünen Geraden berührt und nach der zehnfachen roten schneidet.

Die Tangentialebene längs der letzteren Geraden enthält die einzige unäre Gerade der Fläche mit 2 reellen Asymptotenpunkten. Die parabolische Curve ist, von den dazu gehörigen Geraden abgesehen (grüne sechsfach, rote doppelt), eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem einzigen Oval besteht und in U_7 eine Spitze mit den grünen Geraden als Tangente daselbst besitzt. Durch diese Fläche findet der Übergang von Nr. 53 zu 54 statt. (12×15 cm.)

56⁰. (VII, 19.) **Fläche mit einem uniplanaren Knoten** U_8, durch welche die Klassenzahl um 8 vermindert wird.

Die Tangentialebene in U_8 osculiert die Fläche längs der einzigen siebenundzwanzigfach zählenden Geraden. Sieht man von dieser als Teil der parabolischen Curve zehnfach zu rechnenden Geraden ab, so ist die parabolische Curve ein Kegelschnitt, der in U_8 die Gerade der Fläche berührt. (12×15 cm.)

57⁰. (VII, 26.) Drahtmodell, darstellend die **Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 conischen Knoten** C_2, welche einem reellen Pentaeder angehören, **auf den Punktraum.**

Im Allgemeinen lässt sich die Gleichung einer jeden Fläche dritter Ordnung als die Summe von 5 Cuben von linearen Ausdrücken in den Coordinaten darstellen, und zwar nur auf eine Weise. Diese 5 Ebenen bilden das zu dieser Fläche gehörige Pentaeder, sie bestimmen 10 Schnittgerade (Pentaederkanten), und 10 Schnittpunkte (Pentaederecken); ausserdem gibt es noch 10 Ebenen, welche je durch eine Pentaederecke und die gegenüberliegende Kante gehen (Diagonalebenen). Das vorliegende Drahtmodell stellt nun schematisch das allen Flächen mit nur conischen Knoten (Nr. 38–45) gemeinsame Pentaeder dar. (Für die Diagonalfläche Nr. 38 lässt sich dasselbe sofort angeben. Die 10 Ovalpunkte dieser Fläche sind die 10 Eckpunkte des Pentaeders; die 5 Ebenen desselben sind diejenigen Ebenen, welche je 3 nicht durch einen Punkt gehende rote Gerade enthalten; die 10 Diagonalebenen sind die Tangentialebenen in den Ovalpunkten.) Die gelben Drähte sind die Kanten des Pentaeders, dazu gehört noch die in der Horizontalebene gelegene, unendlich ferne Gerade, ihre Schnittpunkte (wovon 3 im Unendlichen) die Ecken desselben; die roten Geraden Schnitte von Pentaeder- und Diagonalebenen; die grünen von Diagonalebenen mit einander. Die Diagonal- und Pentaederebenen teilen den Raum im ganzen in 15 Kammern, wovon 5 von 4 (Tetraederkammern), 10 von 5 Ebenen (Pentaederkammern) begrenzt werden. In jedem Pentaeder gibt es im Allgemeinen nur eine einzige Fläche, welche in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt besitzt. Je nachdem nun dieser Punkt in verschiedenen Kammern gewählt wird, gibt es verschiedene Arten von Flächen dritter Ordnung, die durch die römischen Zahlen im Modell gekennzeichnet sind. Ausser der beiliegenden Erklärung, von Rodenberg verfasst, vergleiche dessen Abhandlung in den Mathem. Annalen Bd. 14, pag. 46 ff.; bezüglich des Pentaeders ferner die Abhandlung von Clebsch im Crelle'schen Journal Bd. 59, pag. 194 ff.; ferner Salmon-Fiedler, Geom. d. Raumes, II. Teil, Art. 269, 282. 2. Aufl. (14×22 cm.)

58⁰. (VII, 24 a.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 39 und 42.**

Sie ist eine Fläche vierter Ordnung mit 14 reellen Doppelpunkten, von denen im

Figura 1: Páginas del catálogo de Schilling (1903).

al experto en la búsqueda de los modelos adecuados para sus clases. Esta parte es, pues, interesante también para el estudio de los matemáticos que deseen entrar en la comprensión de los diversos grupos de modelos.[1]

La última frase de la reseña [15] de este catálogo realizada por el profesor Virgil Snyder de la Universidad de Cornell, publicada en 1904 en el *Bulletin* de la AMS, es:

Hacer modelos no es solo un arte, sino también una disciplina importante.[2]

En el catálogo de 1911, con la empresa trabajando en Leipzig, se describen 40 series de casi 400 modelos y aparatos. También este catálogo ([13]) contiene una segunda parte donde los modelos aparecen con una breve explicación matemática

[1]Der zweite Teil enthält eine systematische Anordnung der Modelle und gewährt somit einen Überblick über das in den einzelnen mathematischen und physikalischen Wissenszweigen Gebotene. Er hebt die charakteristischen Merkmale der verwandten Modelle aus den verschiedenen Serien hervor und soll vornehmlich dem Fachmanne die Aufgabe erleichtern, die für seine speciellen Zwecke gewünschten, insbesondere die für die einzelnen Vorlesungen geeigneten Modelle aufzufinden. Dieser Teil eignet sich also vorzugsweise auch zum Studium für solche Mathematiker, die in das Verständnis der einzelnen Modellgruppen eindringen wollen.

[2]Model-making is not only a fine art but an important discipline.

y en ocasiones acompañados de un dibujo, como en el catálogo de 1903 (véase la figura 1).

Muchos de los modelos originales fueron construidos en el Instituto de Matemáticas de la Real Universidad Técnica de Munich bajo la dirección de Felix Klein (1849–1925) y de Alexander von Brill (1942–1935). Los dos eran profesores de cursos avanzados de matemáticas e instaban a sus alumnos a diseñar y construir modelos. Por ejemplo, la serie VII de la colección de Schilling contiene algunos modelos de superficies cúbicas con singularidades aisladas, presentados por el estudiante de F. Klein, Carl Rodenberg, junto con su tesis en 1878 ([11]). Los 18 modelos de la serie III fueros diseñados por R. Diesel, estudiante de A. Brill.

Los modelos tenían una finalidad didáctica, como se aprecia en la figura 2 que muestra el anuncio («Models for the Higher Mathematical Instruction») publicado en *American Journal of Mathematics* en 1890.

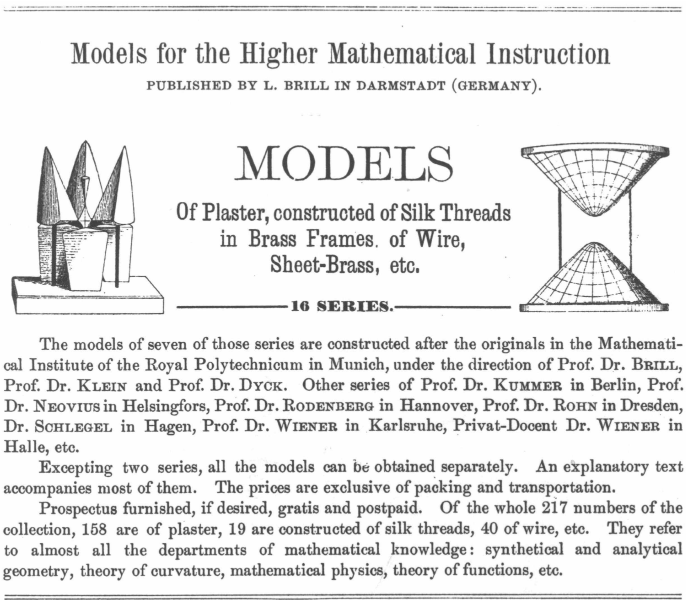


Figura 2: Anuncio publicado en *American Journal of Mathematics* en 1890.

Fueron utilizados en docencia para «*reducir ... la dificultad del estudio de las matemáticas ... y la excesiva abstracción de la formación universitaria*», F. Klein [8]. En la fotografía de la figura 3, se observa cómo el profesor Van Dantzig, durante una de sus clases en la Escuela Politécnica de Delft, muestra dos modelos de cuerda. Uno de ellos pertenece a la serie IV de la colección de Schilling y representa un paraboloide hiperbólico, cuya ecuación está escrita en la pizarra.

Existen colecciones de modelos geométricos del catálogo de Schilling en universidades y museos repartidos por todo el mundo: Alemania, Estados Unidos, Holanda,

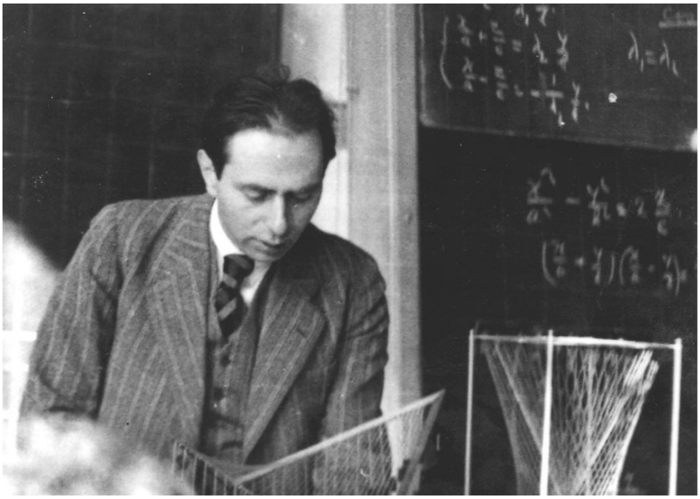


Figura 3: El profesor Dantzig utilizando modelos.

Inglaterra, Italia, Francia, Japón, pero no tenemos noticia de que existan actualmente en España más colecciones que la conservada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, a la que dedicamos este artículo (aunque hay constancia de que existió otra al menos en la Universidad Central, [2, página 134]). El interés por estudiar, catalogar y exhibir estas colecciones es bastante reciente.

La visita a Zaragoza de la exposición RSME-Imaginary fue una excusa perfecta para catalogar, restaurar y exhibir los modelos geométricos antiguos que acompañaban «desde siempre», como decoración olvidada en algunos despachos (figura 4), a los profesores de la Universidad de Zaragoza. Uno de los autores de este artículo, Irene Polo, realizó, como parte de su tesis doctoral [10], un inventario completo de la colección de modelos de la Universidad de Groningen en Holanda (`http://www.math.rug.nl/models`) que ha permitido identificar la mayoría de las piezas.

2. Historia de los modelos en Zaragoza

Los propios modelos nos proporcionan la principal información sobre cómo llegaron a la Facultad de Ciencias, pues algunos de ellos todavía conservan bajo su peana una envejecida etiqueta en papel en la que se lee «Donado a la Facultad de Ciencias de Zaragoza por el Profesor D. Zoel G. de Galdeano».

Don Zoel García de Galdeano y Yanguas (Pamplona, 1846 – Zaragoza, 1924) fue profesor en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza durante 30 años. Escribió más de 190 trabajos entre libros, artículos, conferencias y reseñas. Durante las dos últimas décadas del siglo XIX y primera del XX, la intensa actividad de García de Galdeano se centró en dar a conocer a la comunidad matemática española

Figura 4: Colección de modelos de Zaragoza.

las principales teorías de la matemática de la época en álgebra, geometría y análisis matemático. Fundó y financió de su bolsillo la primera revista matemática española, *El progreso matemático*. En la última etapa de su trayectoria profesional acentuó sus contribuciones a temas de enseñanza de las matemáticas y de representación en sociedades científicas, siendo presidente de la RSME (1916–1924) y presidente fundador de la Academia de Ciencias de Zaragoza (1916–1922). También fue el primer matemático español contemporáneo que participó asiduamente en congresos internacionales y en organismos directivos de la comunidad matemática internacional, [1, 7].

García de Galdeano conocía de primera mano el programa pedagógico de Felix Klein. Él mismo redacta, para *El progreso matemático*, [3], la crónica de la conferencia de Klein en el congreso franco-alemán de Dusseldorf de 1898 en la que éste expresaba *... la enseñanza matemática, debe tener en cuenta el desarrollo histórico de la ciencia...; en vez de comenzar por nociones abstractas ... debe tener un carácter concreto y despertar de una manera tangible la concepción de las cosas. La Geometría debe preceder al Álgebra.*

D. Zoel compartía intensamente esta visión defendiendo la necesidad de que la intuición empírica, la percepción, la imaginación debían ser protagonistas de la primera fase de la enseñanza toda vez que *no se puede generalizar, abstraer, inducir ni deducir si no hay elementos para estas superiores funciones de la inteligencia*, [4]. Podemos por tanto adivinar las razones ideológicas de su interés en los modelos geométricos de F. Klein.

Figura 5: Zoel García de Galdeano y Yanguas.

Encontramos un dato más concreto de este interés en su discurso de inauguración del curso académico 1895–96, [5], donde, hablando de los modernos avances en geometría, se expresa diciendo *... Terminaremos esta nota, citando los notables modelos en yeso, que posee el Establecimiento del señor Brill en Darmstadt, que representan las superficies de curvatura constante positiva y negativa...* Varios de esos ejemplares forman parte de la colección zaragozana.

La búsqueda de datos sobre los modelos, y en particular sobre su donación, nos ha permitido dibujar aspectos inéditos de los 6 últimos años de la vida de D. Zoel. Su jubilación, de manera forzosa según el R.D. de 4-5-1918, tuvo lugar el 20 de septiembre de 1918 a los 72 años, hecho que fue recogido en la prensa regional (*Diario de Huesca*, 21-9-1918). La Facultad de Ciencias acordó inmediatamente la realización de un homenaje en reconocimiento a su labor, que hubo de ser retrasado por la gripe española: «el acto proyectado en honor del Dr. Galdeano lo realizará la Universidad una vez que cesen las anormalidades presentes a causa del estado sanitario» (Actas, 19-10-1918). Durante los siguientes años Don Zoel siguió participando en las actividades y juntas de la Facultad aunque de forma cada vez menos frecuente, posiblemente condicionado por sus problemas de salud.

En 1921 D. Zoel otorga testamento. Es notorio el contraste entre los detalles con los que describe el legado a la Facultad de Ciencias y su total ausencia para el resto. A aquélla lega *todas las obras de que soy autor, manuscritos científicos y cuantos libros constituyan mi biblioteca. Y los seis cuadros pintados al óleo que poseo... y una acuarela. Estos seis cuadros y la acuarela queda expresamente autorizada la Facultad legataria para venderlos si lo juzga conveniente y para invertir el precio que obtenga en las necesidades de la misma Facultad...* Y *el capital efectivo que sea necesario al tiempo de mi muerte para producir una renta líquida anual de mil quinientas pesetas, que se destinará a saber: Quinientas pesetas a un premio anual para un alumno brillante de la Facultad de Ciencias Exactas o Físicas, previo un* *ligero ejercicio ante cinco profesores de dicha Facultad... Y las mil pesetas restantes anuales para fomento de la biblioteca de la Facultad de Ciencias de Zaragoza.*

La Universidad de Zaragoza advirtió al Ministerio de Instrucción Pública de las dificultades para llevar a cabo la aceptación de la herencia pues, dado lo inusual de la situación, existía un vacío legal. El Directorio Militar, presidido por Miguel Primo de Rivera, a la vista de la importancia del legado de Galdeano se propuso resolver el tema emitiendo un Real Decreto (R.D. de 9 junio de 1924) por el que «las Universidades y las Facultades disfrutarán de personalidad jurídica para adquirir bienes, para poseerlos, y para administrarlos». Ese fue el comienzo de un vasto proceso legal que no tuvo feliz conclusión para la Facultad nada menos que hasta 1929.

La última vez en que D. Zoel acudiría a una Junta de su querida Facultad fue el 25 de septiembre de 1923. El motivo de su asistencia fue comunicar formalmente «la cesión ... de su magnífica biblioteca» formada por aproximadamente 3000 libros, el mayor tesoro de D. Zoel.

Zoel García de Galdeano y Yanguas falleció el viernes día 28 de marzo de 1924 a las nueve y treinta de la mañana en la clínica de la Facultad de Medicina a consecuencia de una hemorragia encefálica. Al día siguiente la noticia fue recogida por la prensa local (*Heraldo de Aragón*) y nacional (*ABC*, *La Vanguardia*).

El obituario del *Heraldo*, escrito por un compañero de la Facultad, finaliza expresando que «Sus únicos amores fueron la Matemática, la Música y su querida Facultad de Ciencias, a la que hace ya algunos meses cedió su valiosísima biblioteca, seguramente la mejor biblioteca científica de España». Para ejemplo de científicos de todas las generaciones quedan las lapidarias frases de su Hoja de Méritos y Servicios: *Me he gastado próximamente 7 000 duros en mi Biblioteca Matemática ... 7 000 en mis publicaciones de propaganda. Y vivo con privaciones que otros no tienen*, cuando el salario anual de un Catedrático de Universidad no superaba los mil duros, [7].

García de Galdeano sigue ligado actualmente a la Facultad de Ciencias y llevan su nombre el premio de licenciatura, el seminario de investigación, la hemeroteca y su magnífica biblioteca y, finalmente, la colección de modelos matemáticos geométricos.

3. La colección

La colección actual consta de 35 modelos de escayola, que podemos dividir en cuatro bloques:

- 11 modelos de la serie VII.
- 9 modelos de la serie XIV que corresponden a un total de seis funciones complejas.
- 5 modelos de superficies diferenciables de curvatura constante (tres de curvatura negativa y dos de curvatura positiva).
- 10 modelos de varias series, incluyendo la superficie de Kummer, el paraboloide, el hiperboloide, el elipsoide, una cíclida, cuatro curvas espaciales dibujadas en cilindros elípticos, hiperbólicos y parabólicos, y un modelo correspondiente a un cristal óptico con birrefringencia positiva.

Figura 6: Exhibición de la colección durante septiembre 2011.

Describimos a continuación algunos detalles, históricos y matemáticos, de los tres primeros bloques.

3.1. Los modelos de la serie VII

La serie VII del catálogo de Schilling, que consta de 27 modelos, está dedicada a superficies algebraicas de orden 3, aunque contiene también algunas de orden superior pero relacionadas con ellas. Es fruto del trabajo de Carl Rodenberg, estudiante de Felix Klein.

Los modelos 1–23 son superficies algebraicas reales de orden 3, llamadas por ese motivo superficies cúbicas. Es decir, el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que son solución de una ecuación

$$p(x, y, z) = 0,$$

donde $p(x, y, z)$ es un polinomio de grado 3.

Una superficie cúbica es suave si no contiene singularidades, es decir, si tiene un plano tangente bien definido en cada uno de sus puntos. En 1849 Arthur Cayley y George Salmon probaron que toda superficie cúbica suave contiene 27 rectas sobre los números complejos, pero el número de rectas sobre los reales puede ser inferior. A. Clebsch (1871) y F. Klein (1873) estudiaron una cúbica que contiene las 27 rectas reales. Se conoce como superficie de Clebsch y es el primer modelo de esta serie. Una de sus posibles ecuaciones en $\mathbb{R}^3$ es

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0.$$

El mismo Clebsch mandó construir en 1872 un modelo de escayola de la superficie mencionada anteriormente (figura 7, izquierda) ilustrando las 27 rectas (nótese que, al ser las 27 reales, estas pueden ser representadas en un modelo). En la misma figura 7 (centro) está el dibujo de este modelo contenido en el catálogo [13]. El escultor C. Ramírez, que construyó también un modelo de dicha superficie en 2005 para la Universidad de Groningen, es el autor de la escultura de la figura 7 (derecha), que corresponde a una cúbica de Clebsch.

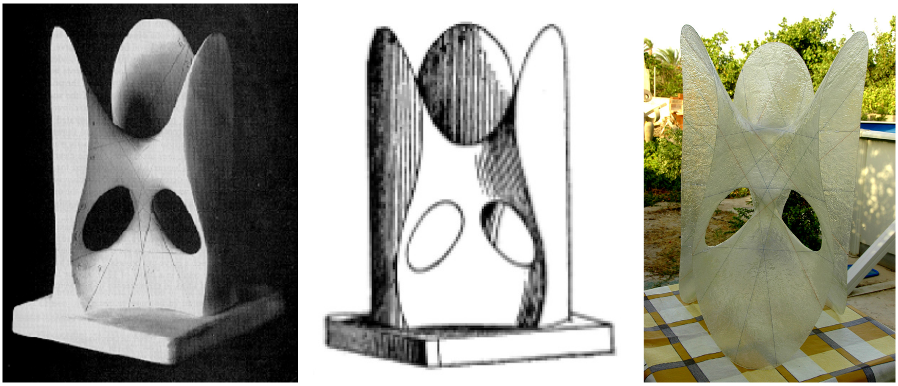


Figura 7: Cúbica de Clebsch: Modelo de 1872, dibujo en el catálogo, y escultura de C. Ramírez.

En los modelos de la cúbica de Clebsch se pueden apreciar tres túneles, agujeros o «pasajes» (como se denominaban en la literatura clásica). Además, hay otros cuatro túneles que aparecen en el modelo rellenos de escayola, pero que se pueden apreciar en otras representaciones de la superficie. Klein trabajó en la obtención de todos los tipos de singularidades de las superficies cúbicas deformando o colapsando estos siete túneles de una superficie cúbica suave. En la colección de modelos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza no disponemos de este primer modelo, pero tenemos 11 modelos de escayola de esta serie: 2, 16–25.

Los modelos 2, 16–19 (figura 8) tienen puntos singulares aislados de distinto tipo. (El modelo 2 está incompleto a falta de una pieza central.) Proponemos un ejercicio de imaginación topológica ideando el proceso de deformación de la superficie de Clebsch en cada uno de estos modelos citados.

Los modelos 20–23 (figura 9) son superficies regladas, formadas por rectas, con singularidades no aisladas a lo largo de una recta (proyectiva). Se diferencian en el subconjunto de puntos dobles ordinarios en la recta singular. En el modelo 20 toda la recta singular es de puntos dobles, en el 21 solo un segmento finito, en el 22 toda la

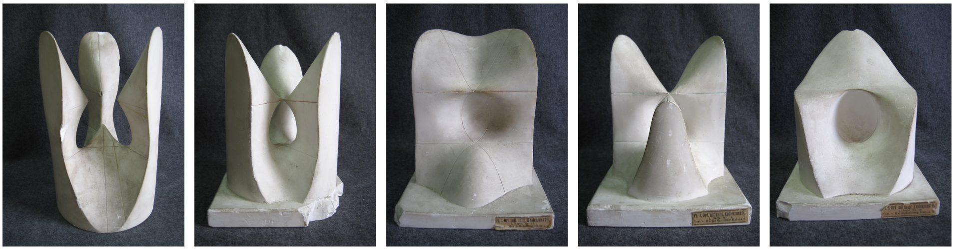


Figura 8: Modelos VII2, VII16, VII17, VII18 y VII19 de la colección de Zaragoza.

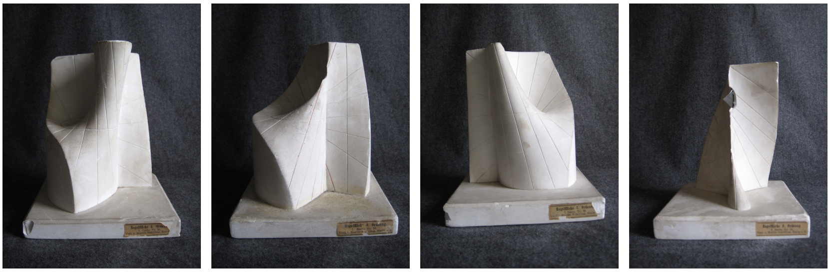


Figura 9: Modelos VII20, VII21, VII22 y VII23 de la colección de Zaragoza.

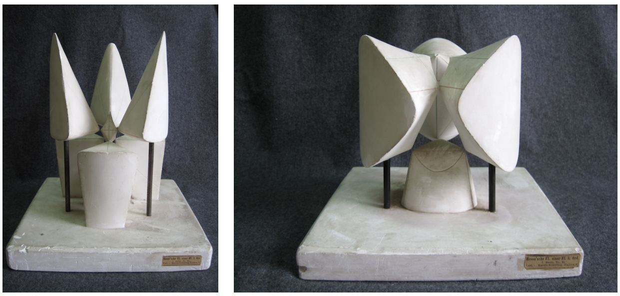


Figura 10: Modelos VII24a y VII25 de la colección de Zaragoza.

recta menos el punto del infinito, y en el 23 toda la recta es de puntos dobles menos un punto finito. (El modelo 23 está incompleto a falta de una esquina superior.)

Los modelos 24a–25 (figura 10) son superficies de orden 4, que son superficies hessianas de las superficies 2 y 7 respectivamente. Ambos modelos están incompletos, porque han perdido una pieza en la parte superior central.

La superficie hessiana de una superficie S en el espacio proyectivo, definida por un polinomio homogéneo

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

es la superficie definida por el determinante de la matriz hessiana de p.

A modo de ejemplo mostramos el camino para obtener la ecuación del modelo 24a, hessiana del modelo 2. Una ecuación del modelo 2, cúbica de Cayley, es

$$-6x^2 + 5\sqrt{6}x^3 - 6y^2 - 15\sqrt{6}xy^2 + 4z^2 - 20\sqrt{3}z^3 = 0,$$

que en coordenadas homogéneas $\{x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4\}$ es

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = -6x_1^2x_4 + 5\sqrt{6}x_1^3 - 6x_2^2x_4 - 15\sqrt{6}x_1x_2^2 + 4x_3^2x_4 - 20\sqrt{3}x_3^3 = 0.$$

La matriz hessiana del polinomio p es la matriz 4×4 de las segundas derivadas parciales

$$H = \left(\frac{(\partial^2 p)}{(\partial x_i \partial x_j)}_{(i,j)} \right).$$

En nuestro caso su determinante, tras los correspondientes cálculos y tras deshacer el cambio $\{x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = 1\}$, es el polinomio de grado 4

$$\begin{aligned} 12x^2 + 20\sqrt{6}x^3 + 12y^2 - 60\sqrt{6}xy^2 - 60\sqrt{3}x^2z - 250\sqrt{2}x^3z - 60\sqrt{3}y^2z \\ + 750\sqrt{2}xy^2z - 24z^2 + 525x^2z^2 + 525y^2z^2 + 40\sqrt{3}z^3 - 50z^4, \end{aligned}$$

que define la superficie algebraica del modelo 24a. En la figura 11, los dibujos de la cúbica de Cayley (VII 2) y su hessiana (VII 24a) han sido realizados con Mathematica. Se puede observar la forma de las pequeñas piezas que se han perdido en nuestros modelos.

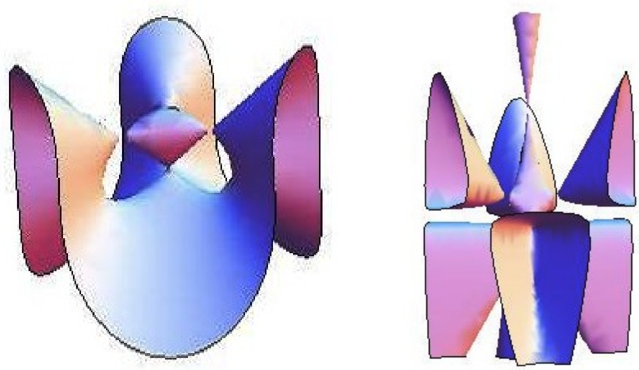


Figura 11: Modelos VII2 y VII24a.

3.2. Los modelos de la serie XIV

La serie XIV del catálogo de Schilling está dedicada a 10 funciones complejas. Los originales se hicieron en el Departamento de Matemáticas de la Universidad

Politécnica de Múnich bajo la dirección del Profesor Dr. Walther von Dyck (1856–1934), discípulo y asistente de Klein conocido principalmente por su contribución a la teoría de grupos, aunque también trabajó en teoría de funciones, topología y teoría de potencial. Los modelos de esta serie se pensaron para superar la dificultad que supone imaginar el comportamiento de las funciones complejas en el entorno de los puntos singulares, al menos de los más importantes. En nuestra colección (figura 12) tenemos modelos de escayola de seis de estas funciones:

N.º 1: $w^2 = z^2 - 1$	N.º 2: $w^2 = z^4 - 1$	N.º 3: $w^4 = z^2 - 1$
N.º 4: $w = \frac{1}{z}$	N.º 5: $w = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon}$	N.º 6: $6w = e^{1/(6z)}$

A fin de obtener una representación espacial, se calcula la parte real y la parte imaginaria de los valores de una función tomando como coordenadas las de la variable compleja. Esto crea dos superficies para cada función, que ofrecen una visualización simultánea de sus valores. Las dos piezas de esta serie correspondientes a la misma función tienen grabadas en el lateral las letras R o I, parte real o parte imaginaria respectivamente. En todas las superficies se dibuja un sistema de líneas de nivel y sus trayectorias ortogonales.

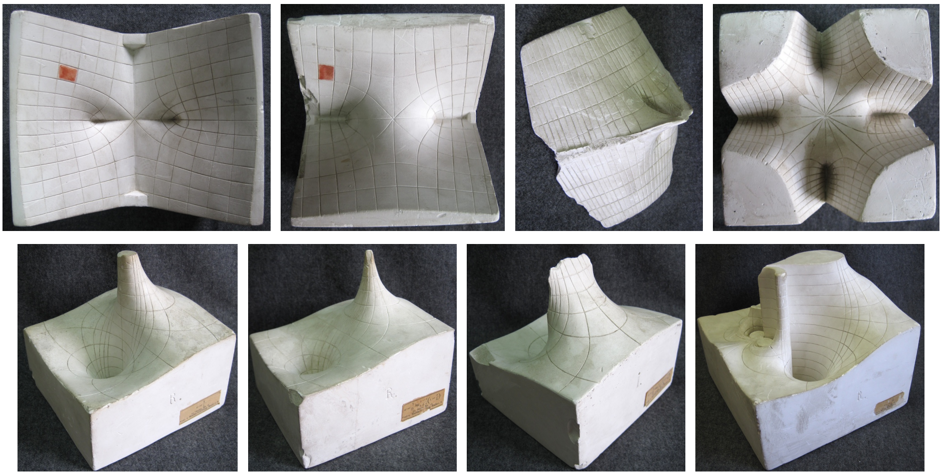


Figura 12: Modelos 1a y 1b, 2a y 2b, 4, 5a y 5b, y 6 de la serie XIV en la colección de Zaragoza.

Los modelos 1, 2 y 3 ilustran el comportamiento en el entorno de puntos de ramificación. El modelo 4 es la función de Moebius más sencilla: la función inversa. Los cuatro casos fueron realizados por el estudiante de doctorado A. Wildbrett. Estos casos tienen en común que las superficies resultantes son superficies algebraicas de orden 4, 8, 16 y 3 respectivamente. En los dos primeros casos existen dos esculturas para cada función, puesto que las superficies algebraicas correspondientes a la parte real y a la parte imaginaria son esencialmente diferentes. No sucede lo mismo para los modelos 3 y 4, en los que las ecuaciones de la parte real y la parte imaginaria son análogas.

La figura 13 muestra la ilustración en el catálogo del modelo 3, una fotografía del mismo modelo de la colección de Zaragoza y el dibujo de esta superficie de grado 16 en Mathematica. Parece que el modelo está roto, aunque, dada la simetría de la superficie, no se ha perdido información. Por otra parte, la desaparición de la mitad de la parte intermedia facilita la visión del resto.

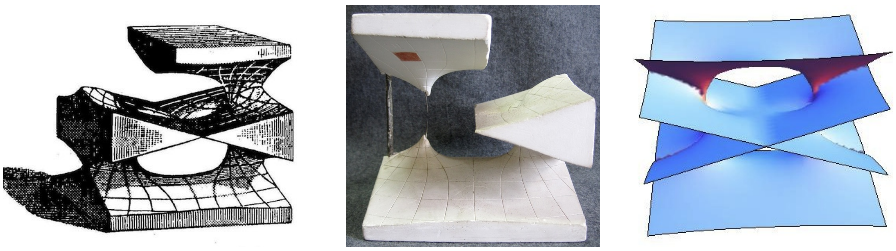


Figura 13: Modelo 3 de la serie XIV: $w^4 = z^2 - 1$.

A modo de ejemplo escribimos aquí los cálculos en el caso más sencillo, la función inversa $w = 1/z$.

Si suponemos $w = u + vi$, $z = x + yi$, donde u, v, x, y son números reales, entonces

$$u + vi = 1/(x + yi) \Leftrightarrow (u + vi)(x + yi) = 1 \Leftrightarrow ux - vy + uyi + vxi - 1 = 0.$$

Si en esta ecuación separamos parte real y parte imaginaria se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} ux - vy - 1 = 0, \\ uy + vx = 0. \end{cases}$$

Despejando en la segunda $v = (-uy)/x$ y sustituyendo en la primera, se obtiene

$$ux - (-uy)/xy - 1 = 0 \Leftrightarrow ux^2 + uy^2 - x = 0,$$

que es una ecuación que liga la parte real u de la función w con x e y, por tanto una superficie algebraica (de grado 3).

De manera análoga se obtiene la superficie correspondiente a la parte imaginaria

$$vx^2 + vy^2 + y = 0.$$

Se observa que, salvo el cambio $x \leftrightarrow -y$, es la misma superficie. Por esa razón para esta función solo existe un modelo de escayola que corresponde a la parte real (o a la parte imaginaria, según como situemos los ejes x e y).

El modelo 5 presenta el comportamiento de una función logarítmica, y fue realizado por el asistente H. Burkhardt y el estudiante de matemáticas J. Kleiber. La parte real es la función

$$u = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x^2 + y^2 + 2x + 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1} \right),$$

y la parte imaginaria es

$$v = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right).$$

El modelo 6, realizado por el estudiante de matemáticas J. Kleiber, presenta el comportamiento de una función exponencial en el entorno de un punto singular. En este caso existe una sola escultura que sirve para la parte real y la parte imaginaria, que se diferencian en un signo y el cambio de un seno por un coseno de la misma expresión:

$$u = \frac{1}{6} \exp \left(\frac{x}{6x^2 + 6y^2} \right) \cos \left(\frac{y}{6x^2 + 6y^2} \right), \quad v = -\frac{1}{6} \exp \left(\frac{x}{6x^2 + 6y^2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y}{6x^2 + 6y^2} \right).$$

Hemos dibujado todos los modelos de la colección utilizando la tecnología actual, concretamente, en el programa Mathematica, y es de destacar la precisión, en todos los casos, alcanzada en las figuras construidas en el siglo XIX, a pesar del grado de algunas superficies algebraicas (16 en el modelo 4) o de la existencia de funciones trascendentes.

3.3. LOS MODELOS DE CURVATURA CONSTANTE

En la colección tenemos modelos de superficies de curvatura constante (tres de ellas de curvatura constante negativa y una de curvatura constante positiva) que, aunque pertenecen a diversas series en el catálogo, forman un conjunto coherente y digno de estudio.

Las de curvatura constante negativa fueron realizadas entre 1877 y 1880 bajo la dirección de Alexander Brill (1842–1935), en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Técnica de Munich. En esa época la geometría hiperbólica era un tema todavía novedoso tras las publicaciones de Lobachevsky (1830) y Bolyai (1832). A diferencia de los modelos del plano hiperbólico más usados en la actualidad (Poincaré y Klein) en que se utiliza una superficie que a nuestra vista es plana (disco o un semiplano) dotada de una estructura riemanniana concreta, estos modelos son superficies en el espacio con la geometría heredada de este. Podríamos decir que es una realización material más fiel. Con ella el alumno puede entender más fácilmente la diferencia con la geometría euclídea. No hay que olvidar que los modelos se hicieron principalmente con una orientación didáctica.

Serie I n.º 1: *Superficie de rotación de la tractriz.* Modelada por el estudiante de matemáticas J. Bacharach bajo la dirección del profesor Dr. Brill en 1877.

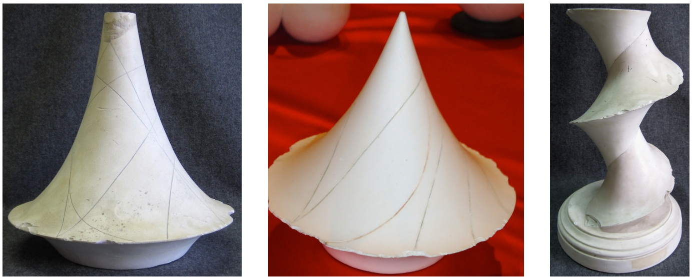


Figura 14: Modelos de curvatura constante negativa en la colección de Zaragoza: I1, II4 y V4.

Es la superficie de revolución en torno al eje OZ de una tractriz situada en el plano XZ. La tractriz es la curva cuya tangente en cada punto corta al eje OZ (su asíntota) a una distancia constante. Es la trayectoria que describe un objeto P arrastrado por otro Q que se desplaza a lo largo del eje OZ manteniendo con él una distancia constante.

En el modelo están dibujadas en azul algunas líneas geodésicas y en rojo una asíntota. En el catálogo se recuerda que, como la torsión en cada punto de esta asíntota es la raíz cuadrada de la curvatura, esta torsión es la misma en todos los puntos de esta curva espacial.

Serie II n.º 4: *Superficie de curvatura constante negativa (tipo elíptico)*. Modelada también por el estudiante de matemáticas J. Bacharach bajo la dirección del profesor Dr. Brill en 1877.

Es la superficie de rotación de la función seno hiperbólico. Tiene dibujadas en azul líneas geodésicas y una línea asintótica.

Serie V n.º 4: *Superficie de tornillo definida por la tractriz.* Modelada por Dr. P. Vogel bajo la dirección del profesor Dr. Brill en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Técnica de Munich en 1880.

Este helicoide generalizado está generado por una curva plana que gira en torno a un eje a la vez que avanza en la dirección del eje con velocidad constante. En este caso la curva generatriz es la tractriz y el eje de revolución su asíntota. La superficie tiene curvatura constante negativa.

Serie XVII n.º 3: *Superficie de curvatura constante positiva con un sistema de líneas de curvatura planas.* Hoy en día esta superficie se conoce como superficie de Sievert-Enneper y normalmente solo se dibuja una cuarta parte de lo que exhibe nuestro modelo de escayola (figura 15). Fue calculada por Heinrich Sievert en su tesis doctoral [14] realizada bajo la dirección de A. Enneper en Nurenberg. Su construcción sigue un procedimiento ideado por Alfred Enneper para describir una superficie mediante dos funciones paramétricas, procedimiento utilizado también para construir superficies minimales.

Figura 15: Modelo de curvatura constante positiva en la colección de Zaragoza: XVII3.

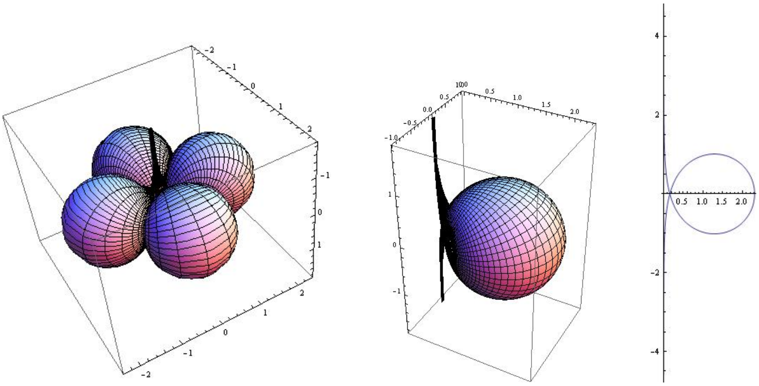


Figura 16: Dibujos de la superficie de Sievert-Enneper: completa, un cuarto y curva $u =$ constante.

Una parametrización de esta superficie, basada en [16], es

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ z = \frac{\ln\tan(\frac{v}{2})+4a\cos v}{\sqrt{3}}, \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad \begin{cases} \varphi = -\frac{u}{2} + \arctan(2\tan u), \\ a = \frac{2}{4-3\,\mathrm{sen}^2 v\cos^2 u}, \\ r = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3\,\mathrm{sen}^2 u}\,\mathrm{sen}\,v. \end{cases}$$

Si se consideran los valores de los parámetros $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 2$ se obtiene solo un cuarto de nuestro modelo. Se consigue todo cuando $-2\pi < u < 2\pi$, $0 < v < 2$. Aunque en el modelo no está la parte de la superficie que rodea al eje OZ y tiende a ∞.

En la figura 16, en un cuadrante del modelo están dibujadas algunas de las dos familias de líneas de curvatura principales (máxima y mínima) que coinciden con las líneas paramétricas ($u =$ constante o $v =$ constante). Cada una de las correspondientes a $u =$ constante está situada en un plano que pasa por el eje OZ; son curvas planas, del tipo de una hoja de Descartes (folium de Descartes) que tiene al eje OZ como asíntota. Sin embargo la familia $v =$ constante no consta de curvas planas. Esta superficie tiene curvatura constante positiva, es por tanto localmente como una esfera, pero no es compacta. Cada cuarto se puede desarrollar sobre la esfera de manera que las ramas infinitas se enrollan centradas en el ecuador, pero este proceso no cubre toda la esfera.

Referencias

[1] E. Ausejo, Matemáticos Españoles: García de Galdeano y Yanguas, Zoel. *Divulgamat*, `http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/GarciaGaldeano.asp.htm`

[2] L. Español, *Historia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, RSME, 2011.

[3] Z. García de Galdeano, Crónica. Congreso de Dusseldorf, *El Progreso Matemático*, serie 2, **1** (1899), 25–26.

[4] Z. García de Galdeano, Apuntes para un plan de educación científica, *El Progreso Matemático*, serie 2, **1** (1899), 6–17.

[5] Z. García de Galdeano, *Discurso leído en la Universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso académico de 1895–1896*, Zaragoza, 1895.

[6] J. W. Heddens, Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives, Kent State University, `http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html`

[7] M. Hormigón, Una aproximación a la biografía científica de García de Galdeano, *El Basilisco* **16** (1984), 38–47. Reproducido en *La Gaceta de la RSME* **7** (2004), 281–294.

[8] F. Klein, *The Evanston Colloquium Lectures on Mathematics*, New York, Macmillan and Co., 1894.

[9] C. Maclaurin, Geometria Organica, *Sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis*, Londini, 1720.

[10] I. Polo-Blanco, *Theory and History of Geometric Models*, Academic Press Europe, 1977.

[11] C. Rodenberg, Zur Classification der Flachen 3. Ord., *Math. Annalen* **14** (1878), 46–110.

[12] M. Schilling, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung*, Halle a. d. Saale, 1903, `http://www.archive.org/details/catalogmathemati00schiuoft`

[13] M. Schilling, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung*, Leipzig, 1911, `http://libsysdigi.library.uiuc.edu/ilharvest/MathModels/0006CATA/`

[14] H. Sievert, *Über die Zentraflächen der Ennepers'chen Flächen konstanten Krümmunsmasses*, Tübingen, Laupp, 1886.

[15] V. Snyder, Review: Martin Schilling, Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht, *Bull. Amer. Math. Soc.* **10**, Number 4 (1904), 209–211.

[16] E. W. WEISSTEIN, *Sievert's Surface*, MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/SievertsSurface.html

J. BERNUÉS PARDO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, IUMA-UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Correo electrónico: bernues@unizar.es

M. T. LOZANO IMÍZCOZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, IUMA-UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Correo electrónico: tlozano@unizar.es

I. POLO BLANCO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
Correo electrónico: irene.polo@unican.es