MATEMÁTICA Y ECONOMÍA.
Ventajas de la cooperación

Vicente Liern Carrión ©

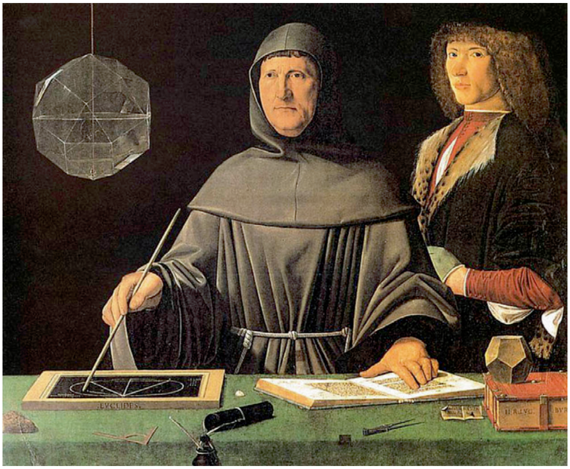
12 de mayo 2012 • XIII Día escolar de las matemáticas

Matemáticas y economía

Ventajas de la cooperación

"...la matemática es mucho más que sólo un lenguaje. La matemática es también un poderoso instrumento para la solución de algunos problemas centrales de economía."

Leonid Hurwicz (1917 – 2008), economista y matemático
Premio Nobel de Economía en 2007.



Retrato de Luca B. Pacioli (1445 – 1517), matemático fundador de la contabilidad moderna, con un discípulo. (Óleo de 1495 atribuido a J. de'Barbari).

La decimotercera edición del *Día Escolar de las Matemáticas* la vamos a dedicar a la relación entre la economía y las matemáticas. Precisamente cuando se celebra el Año Internacional de las Cooperativas y las noticias económicas, rebosantes de cifras y conceptos matemáticos, invaden todos los medios de comunicación, no podíamos dejar pasar la ocasión.

La cooperación entre economía y matemáticas es tan antigua como la necesidad de contar. Aunque durante muchos siglos esta relación se basó fundamentalmente en los instrumentos y las reglas que ambas se iban prestando, a principios del siglo diecinueve la interacción se hace conceptual, dando lugar a la economía matemática. A partir de ese momento, la economía proporciona una valiosa área de aplicación de los conocimientos matemáticos y además genera importantes problemas matemáticos, tales como la teoría de juegos.

Faltaríamos a la verdad si dijésemos que los economistas siempre han visto con buenos ojos el uso de las matemáticas en su profesión. De hecho, la resistencia de algunos es tan antigua como el nacimiento de la economía matemática. Por ejemplo, John E. Cairnes (1823 – 1875) afirmaba que "a menos que se demuestre que los sentimientos pueden expresarse en forma cuantitativa precisa, [...] el conocimiento económico no puede ampliarse mediante las matemáticas". En el lado opuesto aparecen opiniones como la del premio Nobel de Economía, Lawrence R. Klein (1920 –), quien ha afirmado que "las contribuciones no matemáticas a la economía son vagas, burdas y torpes". Afortunadamente, entre estas opiniones caben todas las gamas de grises y en las últimas décadas el avance conjunto ha sido innegable y cada día es más fructífero. Por esta razón optaremos por un punto medio que podríamos expresar con las palabras de otro premio Nobel, Tjalling C. Koopmans (1910 – 1985), quien afirmó que "la economía 'matemática' y la 'literaria' tienden a aproximarse cada vez más. Convergen a través de la exigencia común en favor de un pensamiento válido y profundo establecido a partir de postulados básicos explícitos".

Como imagináis, la intención de este cuadernillo no va más allá de mostrar ideas que puedan motivar el interés de nuestros alumnos. No obstante, por razones de espacio, no hemos seleccionado algunas actividades, que probablemente todas y todos tenemos en mente, en las que la relación entre economía y matemáticas resulta muy evidente, como la estadística descriptiva, la interpretación de gráficas o la optimización mediante el uso de las derivadas.

A vueltas con los porcentajes

Cuando introducimos en *Google* ¿cómo se calculan porcentajes? aparecen casi cuatro millones de entradas. Si concretamos más y la pregunta es ¿cómo calcular el IVA?, los resultados superan los ochocientos mil. Está claro que es un tema que preocupa y que, por más que nos esforcemos desde la educación primaria, muchos de nuestros alumnos acaban sin tener clara la idea de cómo hacer los cálculos o los hacen de forma errónea.

Os 'animo' a hacer una prueba. Supongamos que tenemos una propiedad cuyo valor ha disminuido un 50 % en 2010 y que durante el año 2011 su valor aumenta un 60%. Si preguntáis si al final hemos salido beneficiados o no, es sorprendente la cantidad personas que creen que ha habido una ganancia neta del 10%, cuando en realidad lo que ha habido es una pérdida del 20%. Por ejemplo, si el valor inicial es 100 €, el valor al cabo de los dos años es $100 \times (1 - 0{,}5) \times (1 + 0{,}6) = 80$ €.

Como veremos a continuación, éstos y otros errores conceptuales son unos perfectos aliados de la publicidad y de las noticias económicas.

La aritmética de la publicidad

A los responsables de la publicidad de las empresas les preocupa mucho más cómo se perciben los números que el uso correcto de la aritmética de sus potenciales clientes. Una muestra de esto es lo que Claudi Alsina, en *Asesinatos matemáticos*, califica como el "homenaje a los nueves" de los precios. Aunque es cuestionable que se

venda mucho más un televisor a 499€ que a 500€, lo cierto es que la estrategia permite anunciar, sin faltar a la verdad, que están vendiendo televisores a menos de 500 euros y esto parece funcionarles bien. Otro ejemplo del uso comercial de la percepción es cómo se escriben los decimales. Son sensiblemente más pequeños y, ¡cómo no! llenos de nueves. Si el producto cuesta 17,99€ y nuestra impresión es que su precio es 17€, en realidad estamos ignorando más de un 5% del precio del producto.

La cuestión se complica más cuando el comprador debe calcular, aunque sea de forma aproximada, el porcentaje en el que se ha rebajado un producto o cuánto valía antes de la rebaja. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: Supongamos un producto cuyo precio, sin IVA, es 100 €. Si se rebaja un 20%, ¿cuánto debe pagar el cliente si el IVA a aplicar es del 18%?

Está claro que se trata de encadenar dos porcentajes y que la cantidad a pagar es 100 (1 – 0,2)(1+0,18) = 94,4€. Además, por mucho que algunos vendedores se resistan a creerlo, si hubiésemos hecho las operaciones al revés, es decir primero incrementando el IVA y después haciendo el descuento, 100 (1+0,18)(1– 0,2) = 94,4 €, la cantidad que pagaríamos sería la misma.

Descuentos e IVA

Precio sin IVA		Descontamos 20%		Añadimos del IVA (18%)
100 €	→	$100 \times \frac{80}{100} = 80$ €	→	$80 \times \frac{118}{100} = 94{,}4$ €

Precio sin IVA		Añadimos el IVA (18%)		Descontamos 20%
100 €	→	$100 \times \frac{118}{100} = 118$ €	→	$118 \times \frac{80}{100} = 94{,}4$ €

Dudar de la conmutatividad del producto, en la práctica no tiene consecuencias económicas, pero hay otros errores que sí pueden tenerlas. Por ejemplo, hay compradores que piensan que si se descuenta un 20% y se aumenta un 18%, toda la operación podría hacerse aplicando directamente un descuento del 2%. Desde luego, esto no es así, porque el descuento debe ser de un 5,6% (0,8 × 1,18 = 0,944) y no de un 2%. Esta equivocación, que está mucho más extendida de lo que podría parecernos en principio, da lugar a una estrategia comercial que se aplica en algunos comercios y pocas veces es cuestionada por los clientes. A partir de 100 euros iniciales calculan por un lado el descuento y por otro el aumento, con lo cual el cliente debe pagar los 98€ que resultan de 100 – 100 × 0,2 + 100 × 0,18 = 98 €.

Afortunadamente, cuando el precio de un producto se rebaja, las tiendas ponen el precio antes y después del descuento ... porque el paso del uno al otro, no todos lo hacen bien.

Ejemplo: Por un pantalón, cuyo precio se ha rebajado un 33%, hemos pagado 54 €. ¿Cuánto valía el pantalón antes de estar rebajado?

Si valor en euros del pantalón era C, sabemos que $C\times 0{,}67 = 54$. Es decir, que el precio original era $C = 54/0{,}67 \approx 80{,}60$ €.

Sin embargo, una respuesta mucho más habitual de lo que desearíamos los docentes es que el valor original era $54 \times (1+0{,}33) = 71{,}82$ €.

... y más rebajas

Pero las técnicas que aplican los comercios no siempre son tan directas como dar un porcentaje. Muchas ofertas usan eslóganes como "rebajas de *hasta* un 50%", o "teléfonos móviles desde 0 euros", etc. Sin entrar a analizar el uso que muchas veces hacen del signo " – ", cuando quieren decir *menor o igual*, o que el contenido de la expresión "desde 0 euros" es bastante cuestionable, lo cierto es que estas campañas deberían hacer reflexionar a nuestros alumnos desde un punto de vista matemático.

Por ejemplo, está claro que rebajar la segunda unidad un 70% equivale a hacer una rebaja de un 35% en cada una de las dos unidades, pero también está claro que los beneficios para la empresa no van a ser los mismos, porque están incrementando las ventas, ya que si comprasen sólo un producto no se les aplicaría ningún descuento.

¿Qué ocurre cuando los descuentos son variables? Por ejemplo "llévese dos unidades y pague sólo la más cara". ¿Cuál ha sido el descuento real? Como máximo, el descuento es de un 50% de la unidad más cara, pero con esto se consigue, además de vender más, que las ventas de productos caros se incrementen... Vamos, que no está de más llevarse una calculadora (o usar la del teléfono móvil) cuando se va de compras.

Actividades

1. Analizar diferentes campañas de ofertas y ver con cuál ahorraríamos más. Por ejemplo, una que ofrece "llévese 3 y pague 2" y otra que dice "la segunda unidad a mitad de precio".
1. Comprobar qué tipo de comercios dan los precios con IVA y cuáles no. En este caso, las campañas publicitarias de las compañías de teléfonos móviles resulta muy interesante.
1. Estudiar algunas facturas de supermercados, tiendas, etc. para ver cómo se aplican los descuentos, el IVA, etc.
1. Calcular cuáles son los precios de los productos antes de aplicarles el IVA y los descuentos.
1. Observar facturas, como la de la electricidad, en las que el IVA no sólo se aplica a la energía consumida, sino que también se aplica al impuesto sobre electricidad.

Repartos justos

La Asamblea General de las Naciones Unidas proclamó 2012 como el Año Internacional de las Cooperativas. Conscientes de esto, no hemos querido dejar pasar la ocasión de dedicar algún ejemplo que sirva para que nuestros alumnos busquen información acerca de estas asociaciones.

2012
Año
Internacional de las
Cooperativas

Ejemplo: Una pequeña cooperativa aceitera está formada por cuatro socios A, B, C, D que producen cantidades diferentes. Con la venta del aceite del año 2011 han obtenido unos beneficios de 53000 €. Además, la cooperativa ha recibido un premio de 2880 € por el buen tratamiento ecológico de los residuos plásticos. Para repartir el premio deciden tener en cuenta el uso de material plástico que cada uno ha hecho. Así, el que más plástico utilice por tonelada de producción, recibirá menos parte del premio. Teniendo en cuenta los datos de la tabla, ¿qué cantidad debe percibir cada socio?

	A	B	C	D
Porcentaje de producción (%)	26	19	33	22
kg. de plástico / Tm. de oliva	15	12	8	10

Para repartir los beneficios basta con calcular el producto de los 53000 euros por el porcentaje que corresponde a cada uno:

A: $53000 \times 0{,}26 = 13780$ €
B: $53000 \times 0{,}19 = 10070$ €
C: $53000 \times 0{,}33 = 17490$ €
D: $53000 \times 0{,}22 = 11660$ €

Sin embargo, el reparto del premio es una proporción inversa. Para calcularlo hacemos un reparto directo respecto de 1/15, 1/12, 1/8 y 1/10. En este caso, la cantidad total es

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{3}{8}.$$

Entonces, por ejemplo, al socio A le corresponde

$$\frac{x}{1/15}=\frac{2880}{3/8}, \text{ por lo tanto } x = 8\times 2880/45 = 512 \text{ €}.$$

De manera similar se hace con el resto de productores y expresamos los resultados en una tabla.

	A	B	C	D	Suma
Beneficios €	13780	10070	17490	11660	53000
Premio €	512	640	960	768	2880
TOTAL €	14292	10710	18450	12428	55880

Como no podía ser de otra manera, en el ámbito de la economía, es importante que los resultados se expresen de forma clara y que el alumno no se dé por satisfecho cuando ha acabado las operaciones aritméticas.

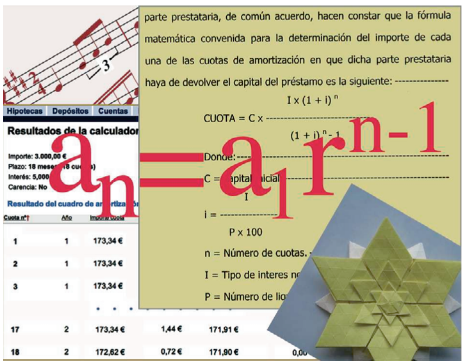
Actividades

1. Platear situaciones reales de nuestro entorno en las que se vean las ventajas de agruparse en "una cooperativa casera". Por ejemplo, hacer fotocopias, compras aprovechando ofertas 3x2, viajes escolares, pintura de un barrio, etc.
1. Buscar en internet información acerca de las cooperativas.
1. Encontrar justificaciones a la frase "Hay que resaltar la contribución de las cooperativas al desarrollo económico y social, especialmente su impacto en la reducción de la pobreza, la creación de empleos y la integración social".
1. Buscar alguna cooperativa del entorno del alumno y, a ser posible, realizar una visita para conocer las ventajas de esta asociación.
1. Hacer un concurso de ideas acerca de para qué podría servir una cooperativa en el centro escolar.

Progresiones con interés

Una idea básica de las llamadas matemáticas financieras es cómo "trasladar" el dinero a diferentes periodos de tiempo. Para esto, un concepto fundamental es el de *interés,* que nos proporciona el precio del dinero. Las operaciones más sencillas son las que aparecen al disponer ahora de una cantidad que no tenemos (*préstamo*) o al recibir unos ingresos (*inversión*) a cambio de renunciar durante un período de tiempo a una cantidad determinada de nuestro dinero. Pensemos, por ejemplo, en una inversión. Cuando los intereses que se obtienen al final de cada período se retiran, estamos ante un interés simple, y cuando no es así, sino que se reinvierten o añaden al capital inicial estamos ante un interés compuesto. En el caso simple, la operación financiera se corresponde con una progresión aritmética y en el caso compuesto con una progresión geométrica.

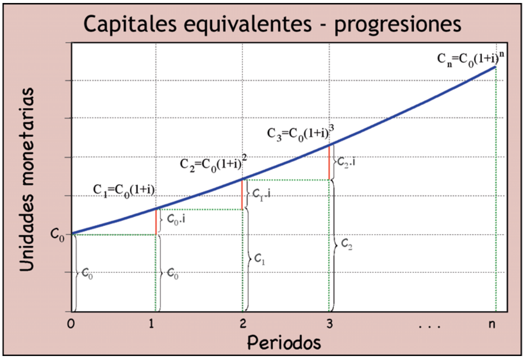
Aquí veremos algunas actividades con progresiones geométricas, pero con progresiones aritméticas podrían desarrollarse de manera similar.



Por fijar ideas, supongamos que se invierte n años un capital C_0 en un banco y que éste, a cambio nos proporciona unos intereses anuales i expresados en tantos por uno. Si no retiramos los intereses hasta el final de la operación, sino que éstos pasan a incrementar nuestro capital, al principio disponemos de C_0. Pasado el primer año, nuestro capital es $C_1 = C_0 + C_0 i = C_0\,(1+i)$. Una vez transcurrido el segundo año, tendremos $C_2 = C_1 + C_1\,i = C_0\,(1+i)^2$, y así sucesivamente hasta que en el último periodo tenemos

$$C_n = C_0\,(1+i)^n.$$

Está claro que se trata de una progresión geométrica de razón r = 1+i.



Si los periodos no fuesen años, sino n meses, por ejemplo, en el lugar del interés anual pondríamos el interés mensual que, lógicamente es $i/12$. Si n fuese el número de trimestres haríamos $i/4$, y así con cualquier tipo de periodo.

Veamos algunos ejemplos que podemos resolver en las aulas.

Ejemplo: Invertimos 1000€, con un tipo de interés compuesto anual del 4%, cuál será nuestro capital al cabo de 3 años.

Nuestros datos son C_0=1000, y el tipo de interés 4%, es decir i = 0,04. Entonces, una vez conocido el término general de la progresión geométrica, $C_n = C_0\,(1+i)^n$, se trata de calcular C_3, es decir $C_3 = 1000\,(1+0{,}04)^3 = 1124{,}86$ €.

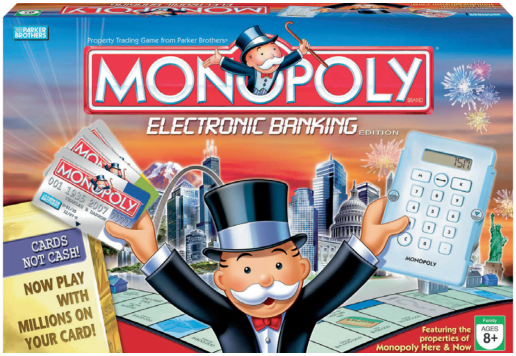
Ejemplo: Si una entidad financiera nos dice que nuestro capital, 1000€, se duplicará en 15 años ¿habría sido más ventajoso para nosotros invertir el dinero en esta entidad o en la del ejemplo anterior?

En realidad lo que está preguntando el problema es si la nueva entidad nos ofrece un interés mayor del 4% anual, o lo que es igual si i es mayor de 0,04. Sabemos que $C_{15} = 1000\,(1+i)^{15}$ =2000, por lo tanto $(1+i)^{15}$=2, y entonces $i = \sqrt[15]{2} - 1 \approx 0{,}04729$. Por lo tanto, el interés que nos está ofreciendo la nueva entidad es del 4,729 % anual y nos convendría hacer la inversión en este banco.

Fijaos que en este ejemplo, para saber cuándo se duplica nuestro dinero no sería necesario conocer el capital que invertimos.

Sumando progresiones ... sabemos cuánto pagar

Muchas veces creemos que a nuestros alumnos y alumnas les va a costar entender cómo funcionan, a grandes rasgos, los préstamos. Sin embargo, mucho antes de lo que pensamos han incorporado a su lenguaje la palabra *hipoteca*. Si no la han oído en sus propias casas, la han manejado en juegos como el Monopoly®, que desde los ocho años (según las indicaciones del fabricante) les permite hipotecar propiedades, y con ello conseguir liquidez, a cambio de que para recuperarlas paguen más de lo que *la banca* les ha dado por ellas. En concreto, dice: “cuando desees levantar una hipoteca, deberás pagar a la banca el precio de la hipoteca más el 10% de intereses, ...”



Si la edad y la formación de nuestros alumnos nos permite ir más allá, podemos plantear el problema de una manera menos lúdica: Nos conceden un préstamo y lo tenemos que pagar en un número n de meses, ¿cuánto tendremos que pagar cada mes? En un argot más específico esto se diría “si nuestro préstamo se va a amortizar en n meses y el interés compuesto anual es del I% ¿cuál es la cuota mensual fija A?. Aunque hay varios sistemas de amortización de préstamos, el que usaremos aquí es el sistema francés, porque es el más utilizado.

Para empezar, a partir del interés anual, calculamos el interés mensual que será i=I/(100 ×12). El primer mes, pagaremos A y el valor de este dinero al final del préstamo será $A\ (1+i)^{n-1}$, el segundo mes pagamos de nuevo A, y su valor al final del préstamo es $A(1+i)^{n-2}$, y así sucesivamente hasta el último mes en el que también pagamos A. Si sumamos todas estas cantidades tenemos $A + A\ (1+i) + A(1+i)^2 + ... + A(1+i)^{n-1}$. Se trata de la suma de n térmicos de una progresión geométrica de razón r =1+i y con primer término A, entonces el resultado es

$$S_n = A\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = A\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Pues bien, S_n tiene que ser igual al valor del capital que nos han prestado (dentro de n meses), es decir $C_n = C_0\ (1+i)^n$. Por lo tanto, si igualamos S_n a C_n podemos despejar A:

$$A = C_0\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}.$$

Ejemplo: Si nos conceden un préstamo de 1800€ con un interés del 5% anual y nos comprometemos a devolverlo en 18 meses, ¿cuál será la mensualidad fija de nuestro préstamo?

En este caso i = 0,05/12, n =18 y C_0= 3000, por lo tanto, basta con sustituir en la fórmula anterior para obtener A= 173, 34€.

La ventaja de este tipo de actividades es que puede verse en el aula cómo se realizan los préstamos reales y se puede comprobar si los cálculos de la clase son correctos, haciendo uso de las *calculadoras de préstamos* que las entidades financieras tienen en internet.

Actividades

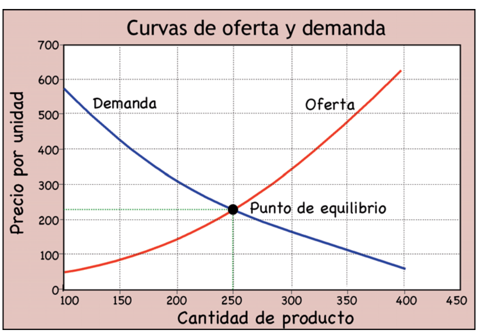
1. Leer las reglas de Monopoly para hipotecar una propiedad y levantar la hipoteca y hacer ejercicios con diferentes ejemplos.
2. Repetir los ejemplos de esta sección suponiendo el interés simple y, por lo tanto, cuando en lugar de trabajar con una progresión geométrica, se trabaja con una progresión aritmética con término general $C_n = C_0(1+n\ i)$.
3. Calcular la diferencia entre invertir con interés simple y compuesto. Por ejemplo, con un capital de 1000€, un interés del 5% anual y un plazo de 3 años para la inversión.
4. Buscar otros ejemplos de la vida cotidiana en los que aparezcan progresiones aritméticas o geométricas.
5. Calcular algunas cuotas fijas de préstamos y comprobar que nuestros cálculos son correctos en internet, por ejemplo en http://www.bankimia.com/calculo-prestamo.

Haciendo equilibrios

El concepto de equilibrio es fundamental en economía. Una situación de equilibrio es una situación estable u óptima, porque en ella la empresa opera con el menor coste posible, obtiene el máximo beneficio, la asignación de los recursos económicos es la mejor para la utilidad de un individuo, etc. Todas estas posibilidades tienen en común que se cuenta con varios fenómenos económicos que suceden simultáneamente y se debe determinar el punto o puntos en los que la situación es beneficiosa. A continuación veremos algunos ejemplos de equilibrio estático, es decir que no dependen del tiempo.

Precios de equilibrio

El primer equilibrio que veremos es el general, que consiste en analizar los fenómenos de la economía cuando todos los sectores que la componen se consideran de modo simultáneo. El primero que formuló matemáticamente esta situación fue Léon Walras (1834 – 1910).



Suponemos un mercado en el que los precios vienen dados sólo por la interacción entre la oferta y la demanda (libre competencia), es decir que las empresas carecen de poder para manipular el precio. En este caso, para calcular el equilibrio no hay más que igualar las curvas de oferta y de demanda. Si estas curvas están en función del precio, su intersección nos proporciona el precio de equilibrio.

Ejemplo: Consideramos *x, y, z* los precios de un mercado en el que se venden tres productos *A*, *B* y *C*. Calcula los precios de equilibrio si se estima que la oferta (S) y la demanda (D) de cada uno de ellos viene dada por

$$
\begin{array}{ll}
SA = 15x + y + 3z - 13 & DA = 70 - 8x - y - z \\
SB = x + 20y + 10z - 10 & DB = 93 - 2x - 4y - z \\
SC = 10x + 15y + 30z - 50 & DC = 107 - x - 3y - 5z
\end{array}
$$

Se trata de calcular los precios para los que la oferta coincide con la demanda. Esto nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al hacer $SA=DA$, $SB=DB$ y $SC=DC$. Si pasamos todas las incógnitas a una parte de la igualdad y los términos independientes a la otra, el sistema queda de la forma siguiente:

$$
\left.\begin{array}{r}
23x + 2y + 4z = 83 \\
3x + 24y + 11z = 103 \\
11x + 18y + 35z = 157
\end{array}\right\}
$$

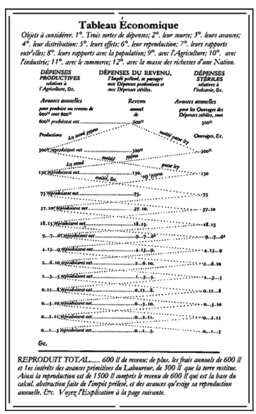
Al resolver el sistema, vemos que los precios de equilibrio son

$$x = 3 \text{ u.m.}, \quad y = 3 \text{ u.m.}, \quad z = 2 \text{ u. m.}$$

Este tipo de problemas podría no tener solución bien porque no existen los precios de equilibrio o bien porque alguno de ellos es negativo, y en este caso no tendría sentido económico.

Modelo input-output

El *modelo input-output* de Leontief es una aproximación a las interrelaciones que se dan entre los distintos sectores en los que puede dividirse una economía, vistas como partes de un equilibrio general. Aquí, los fundamental será conocer las cantidades que intercambian los sectores, más que las condiciones de equilibrio de mercado. Este modelo, por el que Wassily Leontief (1905-1999) recibió el Premio Nobel en el año 1973, se basó en el procedimiento descrito en el *Tableau économique* por Francois Quesnay (1694 – 1774) y en los trabajos sobre el equilibrio general de Léon Walras. En la actualidad es uno de los modelos económicos más empleados en economía.



Para mostrar cómo podríamos aplicarlo en las aulas, vamos a particularizar el modelo de Leontief a la interdependencia entre dos industrias: una productora de agua, A, y otra productora de electricidad, E. Nos preguntamos cuál es la producción que permite satisfacer los consumos internos de las industrias y las demandas exteriores de agua y electricidad. Podéis encontrar una versión más completa de este problema en la página http://www.austincc.edu/powens/+BusEco/HTML/4-7/4-7.html#two%20ind.

Ejemplo: Supongamos una economía formada por las industrias A y E que producen agua y electricidad, respectivamente. Se sabe que para producir 1€ de electricidad, la industria E consume 0,3 € de electricidad y 0,1 € de agua. Para producir 1 € de agua, la industria A necesita 0,2 € de electricidad y 0,4 € de agua. ¿Cuáles son las producciones de agua y electricidad (medidas en euros) que permiten satisfacer las demandas internas de A y E y una demanda exterior de 1.2 millones de euros de electricidad y 800.000 euros de agua?

En primer lugar, recogemos los datos en una tabla de la forma siguiente:

	E	A	Demanda exterior
E	Euros de electricidad que usa E para producir 1 euro de electricidad	Euros de electricidad que usa A para producir 1 euro de agua	Euros de demanda exterior de electricidad
A	Euros de agua que usa E para producir 1 euro de electricidad	Euros de agua que usa A para producir 1 euro de agua	Euros de demanda exterior de agua

Ordenados así, los datos son los siguientes:

	E	A	Demanda exterior
E	0,3	0,2	1.200.000
A	0,1	0,4	800.000

Ahora, plantear el sistema de ecuaciones es sencillo: la producción debe igualarse al consumo interno más la demanda externa. Si llamamos x a los euros de agua producida, e y a los euros de electricidad producida, se trata de resolver el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0,3x + 0,2y + 1.200.000 \\ y &= 0,1x + 0,4y + \quad 800.000 \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{aligned} 0,7x - 0,2y &= 1.200.000 \\ -0,1x + 0,6y &= \quad 800.000 \end{aligned}\right\}$$

La solución es x = 2.200.000 € de electricidad, y = 1.700.000 € de agua.

Si la tabla de consumos internos anterior se escribe en forma de matriz, se obtiene la llamada *matriz tecnológica*. A la matriz del segundo sistema se le llama matriz input-output o *matriz de Leontief* y los términos independientes se conocen como matriz de *demanda exterior*. Además, cuando en un modelo hay demandas externas se dice que es *abierto* y si no las hay decimos que es *cerrado*.

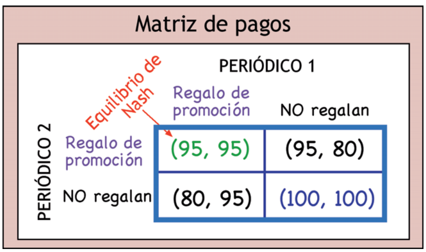
Otros equilibrios son posibles

John F. Nash (nacido en 1928) es un matemático estadounidense que perfeccionó y formalizó los trabajos de A. A. Cournot (1801 – 1877) para establecer otro concepto de equilibrio. Sus aportaciones a la teoría de juegos y a los procesos de negociación, lo hicieron merecedor del Premio Nobel de Economía en 1994.

Para explicarlo mejor, imaginemos varias empresas que compiten por un mismo bien. En este caso es muy importante determinar la cantidad que deben producir cada una para maximizar sus ganancias individuales. Un equilibrio de Nash es una situación en la que todos los competidores han puesto en práctica -y saben que lo han hecho- una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. A diferencia de otro tipo de equilibrios, el de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los participantes, sino sólo el mejor resultado para cada uno de ellos individualmente. Dicho de otra manera, sería perfectamente posible que el resultado fuera mejor para todos si los jugadores coordinaran su acción.

Ejemplo: En una ciudad hay dos periódicos, A y B, que venden aproximadamente el mismo número de ejemplares los domingos. Los encargados de ventas estiman que hacer un regalo de promoción les supone una reducción de beneficios de alrededor del 5%. Sin embargo, saben que si uno no hace el obsequio pero el otro sí, los beneficios de quien no regla descienden en un 20%. ¿Cuál es la política de ventas que logra un equilibrio?

Si expresamos todas las situaciones posibles para los beneficios, obtenemos la siguiente tabla (*matriz de pagos*):



Esta claro que la situación óptima, en sentido estricto, habría sido que ninguno de los dos periódicos hiciesen regalo, pues esto les aportaría el 100% de los beneficios, pero como ocurre en *el dilema del prisionero*, cada periódico no puede confiar en que el otro no vaya a hacer el obsequio, por tanto, el equilibrio de Nash en este caso es que ambos hagan la promoción y se conformen con el 95% de los beneficios.

Actividades

1. Buscar las biografías y las aportaciones que han hecho los matemáticos y economistas que aparecen en la sección.
2. Analizar ejemplos en los que al intentar calcular precios de equilibrio aparezcan precios negativos o en los que el sistema no tenga solución. Razonar si estos resultados tienen interpretación económica.
3. Profundizar en la utilidad matemática de presentar los resultados en tablas / matrices y describir ejemplos en los que resulte útil el modelo input-output de Leontief.

4. Buscar información acerca del dilema del prisionero y proponer situaciones en las que podríamos aplicarlo.
5. Ver la película *Una mente maravillosa* y comentar escenas en las que se habla de equilibrios, de matemáticas y de economía.

Quien nos iba a decir hace unos años que desde que nos despertásemos estaríamos oyendo cifras económicas que implican el uso de la estadística, las progresiones o las derivadas. ¿Cuántos sabíamos entonces lo que significa la *prima de riesgo* o los peligros de la recesión económica? Pero, la realidad, especialmente en los periodos más complicados, nos obliga a hacer cada día más ciertas las palabras de Hurwicz observando cómo las matemáticas "sirven para resolver problemas centrales de la economía", y en definitiva ayudándonos a explicar mejor el mundo que nos rodea.

Bibliografía:

- Alsina, C. (2010): *Asesinatos matemáticos. Una colección de errores que serían divertidos si no fuesen tan frecuentes*. Barcelona: Planeta, S. A.
- Artal, L., Sales, J. (2010): *Hipotecas y ecuaciones. Las matemáticas de la economía.* Barcelona: RBA Libros, S. A.
- Cabrera, A. (1990): *Economía de la empresa II*. Pinto (Madrid): Ediciones S.M.
- Canós, M. J., Ivorra, C., Liern, V. (2001): *Matemáticas para la economía y la empresa*. Valencia: Tirant lo Blanch.
- Haeussler, E. F., Paul, R. S., Wood, R. J. (2008): *Matemáticas para administración y economía*. México D. F.: Prentice Hall.
- http://www.uv.es/ivorra/docencia/Practicas.pdf
- Jaén García, M., Molina Morales, A. (1994): La economía matemática y la controversia sobre la utilización de las matemáticas en la economía. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 26, pp. 25 – 46.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

SERVICIO DE PUBLICACIONES
de la FESPM

Apdo. de Correos 590
06080 BADAJOZ
www.fespm.es
publicaciones@fespm.es

Impresión: tecnigraf