Historia

Sección a cargo de

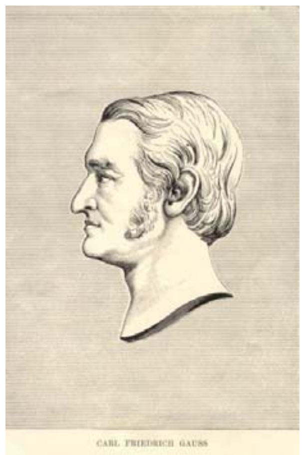
José Ferreirós Domínguez[1]

Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría[2]

por

Erhard Scholz

Una de las historias más famosas acerca de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nos lo presenta midiendo los ángulos del gran triángulo terrestre formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken, a fin de contrastar si la geometría del espacio real es no euclidea. Pero dicha historia ha resultado controvertida y ha sido puesta en cuestión. En este artículo pretendo revisar el problema de las mediciones de triángulos terrestres realizadas por Gauss, en el curso de sus trabajos geodésicos, y su relación con las reflexiones del matemático en torno a los fundamentos empíricos de la geometría. Nos centraremos de manera especial en la situación durante los años 1820, si bien habrá ocasión de indicar algunos desarrollos y repercusiones posteriores. Esto nos llevará a una discusión crítica de trabajos de diversos historiadores, y pondrá de relieve la multiplicidad de recursos a los cuales ha de acudir el historiador a fin de alcanzar la elusiva verdad.



[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

[2]Traducción de José Ferreirós. Artículo publicado originalmente como "C. F. Gauss' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren", en *Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschaftsgeschichte. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag*, R. Seising, M. Folkerts, U. Hashagen eds. (Stuttgart, Steiner, 2004), pp. 355–380.

1. Sobre la situación en la discusión historiográfica

Hasta comienzos de los años 1970, existía una comprensión bien aceptada de las implicaciones para los fundamentos (de la geometría) de dichas mediciones geodésicas. Esta visión queda bien reflejada en un artículo de H. Gericke contenido en el volumen colectivo que se editó con motivo del 200º centenario del nacimiento de Gauss (Schneider 1981).

Gericke exponía las reflexiones de Gauss sobre el papel de la "constante característica" $C > 0$ de la geometría no euclidea, la cual puede caracterizarse, en el lenguaje de la geometría diferencial, por medio de la curvatura: $\kappa = -1/C^2$. La suma de los ángulos de un triángulo se desvía del valor euclideo en una cantidad ε que depende del contenido de superficie F, de modo que para C dada:

$$\varepsilon = 180^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 1/C^2 \cdot F.$$

En este contexto, Gericke citaba una carta de Gauss a Taurinus del 8 de noviembre de 1824:

> Si la geometría no-euclidea fuera la verdadera, y si aquella constante estuviera ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra o en el cielo, sería posible determinarla a posteriori. (Gauss *Werke*, **VIII**, 186–188)

Gericke comentaba:

> Se podría, por ejemplo, medir la suma de los ángulos en un triángulo. Dado que el defecto [designado arriba por ε] es proporcional al contenido de superficie, se debe elegir un triángulo lo más grande posible. Es bien sabido que Gauss eligió el triángulo Brocken - Inselsberg - Hohenhagen, cuyo lado mayor tiene una longitud de aprox. 105 km, y el resultado fue que la diferencia de la suma angular respecto a 180º era en todo caso inferior al error de medición. Por tanto: o bien la geometría euclidea es verdadera, o el triángulo era aún demasiado pequeño. La naturaleza, preguntada a fin de que tomara una decisión, se había negado a responder. (Gericke 1981, 129)

Pero si esta era la situación a comienzos de los 1970, por la misma época algunos historiadores de la ciencia pusieron en duda la fiabilidad de las ideas recibidas. En los escritos de que disponemos, Gauss nunca se expresó de manera definitiva acerca de este asunto particular de la valoración de sus mediciones geodésicas para la estructura del espacio. La visión que hemos expuesto se basaba –aparte alguna extrapolación histórica simple a partir de otras fuentes, como la correspondencia citada– en los comentarios de un testigo directo, el amigo de Gauss, Sartorius von Waltershausen[3], que poco después

[3] [N. del T.] Profesor de geología y mineralogía en Göttingen, el Barón Wolfgang Sartorius von Waltershausen (1809-1876) se dio a conocer con sus trabajos sobre el Etna, sobre Islandia

de su muerte refirió lo siguiente en el volumen *Gauss zum Gedächtnis* [*En memoria de Gauss*]:

> Gauss sólo consideraba la geometría [euclidea] como un edificio consistente una vez que se concediera y pusiera en la cúspide la teoría de las paralelas como axioma: pero había llegado a la convicción de que esa proposición no puede ser demostrada, si bien conocemos por la experiencia, por ejemplo por los ángulos del triángulo Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, que es aproximadamente correcta. Si, en cambio, no se quiere conceder el axioma mencionado, de ahí se deduce otra geometría totalmente independiente, que Gauss desarrolló ocasionalmente y que designó por el nombre de geometría antieuclidea. (Sartorius 1856, 81)

En otro lugar, Sartorius precisaba la vaga expresión “aproximadamente correcta”, que tomada de forma aislada no es particularmente instructiva, comentando en relación al heliotropo, instrumento de precisión geodésico que Gauss inventó:

> El heliotropo encontró enseguida una aplicación plena en la triangulación de Hannover, y el gran triángulo que se midió, quizá el mayor que haya sido determinado, a saber, entre el monte Brocken, el Inselsberg y el Hohenhagen, fue medido con su ayuda con tal precisión, que la suma de los tres ángulos sólo se alejaba de dos rectos en aprox. dos décimas de segundo. (Sartorius 1856, 53)

Esta acotación de que eran aproximadamente “dos décimas de segundo” constituye una clara referencia a una estimación precisa comunicada por Gauss en discusiones orales. Sería muy extraño suponer que el informante hubiera inventado un dato así para añadirlo a su relato. Queda sin embargo clarificar de qué tipo de estimación de errores podía tratarse en el comentario citado por Sartorius. Volveremos a ello.

En 1972, el joven historiador de la física A. I. Miller puso en cuestión esa exposición, hasta entonces no polémica, en un artículo publicado en la reputada revista de historia de la ciencia *Isis* (Miller 1972). Este trabajo tuvo una repercusión contundente. En el mismo volumen donde H. Gericke había referido la “bien sabida” historia, otro trabajo de Karin Reich decía sobre la primera de las dos citas de Sartorius que hemos dado, en tono crítico:

> En la literatura secundaria se encuentran a menudo comentarios indicando que Gauss habría querido comprobar empíricamente cuál es la verdadera estructura del espacio, euclidea o no euclidea. Puesto

y sobre el período glaciar. Colaboró en los trabajos geomagnéticos que ocuparon a Gauss y Humboldt, y al año siguiente de morir Gauss publicó una interesante biografía del “primero entre los matemáticos” (*princeps mathematicorum*), que es el libro citado por Scholz.

> que Gauss mismo no estableció expresamente esta conexión, hace unos años esa interpretación fue puesta en entredicho, reafirmada, y de nuevo cuestionada. (Reich 1981, 104s.)

Con ello estaba contradiciendo abiertamente, aunque de manera reservada, la exposición de Gericke. Sin adoptar una posición propia ante el problema, remitía en nota a la literatura que entonces estaba disponible[4]. Como se ve, la discusión entre historiadores de la ciencia continuó, pero aparentemente con un resultado abierto. El análisis más detallado, basado en un conocimiento experto, se encuentra hoy en (Breitenberger 1984), si bien se limita a establecer qué es "lo que Gauss hizo realmente y lo que se le puede atribuir sin discusión"[5]. Con ello se establece una imagen histórica de conjunto que podemos calificar de escéptica, y que en mi opinión es exagerada[6].

La situación en este momento puede pues resumirse como sigue: entre los historiadores de la ciencia se tiende más bien a dudar que a aceptar la idea de que Gauss pudiera haber valorado sus mediciones de la manera que hemos indicado (Miller), o incluso a dudar la posibilidad misma de que lo hubiera hecho (Breitenberger y otros). Entre matemáticos y especialistas en ciencias naturales (sobre todo de geodesia y física) se tiende más bien a afirmarlo que a dudarlo, pero esa confianza se debe más bien a un desconocimiento de las razones aducidas para dudar.

Esto parece justificar que volvamos sobre la cuestión. Comenzaré indicando y "valorando críticamente" los argumentos originales de A. Miller, lo que en este caso significa ante todo mostrar cómo tienen poco que ver con la verdadera situación histórica (parte 2). Luego presentaré los problemas metodológicos planteados por E. Breitenberger, problemas que surgen al intentar comprobar empíricamente la euclidicidad del espacio físico mediante mediciones geodésicas, y que deben tenerse en cuenta (parte 3). Finalmente me gustaría explicar por qué en mi opinión todos los puntos problemáticos pueden considerarse como *suficientemente aclarados en el marco de los métodos que Gauss tenía a su disposición*, si bien ha de reconocerse que aquél *no disponía de todos los prerrequisitos teóricos en forma bien desarrollada* (parte 4). Mostraré que Gauss, dentro del marco de sus estimaciones de error, estaba perfectamente

[4]Reich daba las siguientes referencias: (Miller 1972) ("cuestionando"), (Goe 1974, van der Waerden 1974) ("reafirmando") y (Miller 1974) ("de nuevo cuestionando"). En otra ocasión ya he aclarado brevemente por qué no comparto las dudas contra la exposición de Sartorius, o sea, en la terminología de Karin Reich, por qué considero la historia mencionada como "reafirmada de nuevo" (Scholz 1992, 643s.).

[5]Comunicación personal de E. Breitenberger al autor, 18.02.2003.

[6]Agradezco a Jeremy Gray el haberme hecho advertir la "situación abierta" y que con ello me haya estimulado a publicar estas consideraciones. En una serie de discusiones me aclaró por qué tenemos mejores razones para dudar que las planteadas por A. Miller en el artículo original. En una de esas conversaciones (Tel Aviv, mayo de 2001) estaba presente Ivo Schneider y se mostró tan interesado en el asunto, que el tema me pareció adecuado para un volumen en su honor.

en posición de decidir empíricamente cuestiones sobre la estructura espacial (parte 5). Por tanto no alcanzo a ver ninguna razón convincente para dudar la fiabilidad del testimonio ofrecido por Sartorius von Waltershausen (parte 6)[7].

2. El establecimiento de un mito

Desde una visión retrospectiva, la crítica que A. I. Miller ofreció de la historia recibida, bajo el título *The myth of Gauss' experiment on the Euclidean nature of physical space*, resulta sorprendente por lo escaso de los argumentos empleados en comparación con la considerable repercusión del artículo. La tesis central de Miller era simple:

> The famous experiment is in fact a mere legend that stems from a misunderstanding of his important paper of 1827 "Disquisitiones generales circa superficies curvas". This work constituted the first systematic study of quadratic differential forms (of two variables) and was generalized by Riemann, in 1854, to n variables. (Miller 1972, 346)

Miller se estaba refiriendo al § 28 de (Gauss 1828), en el que Gauss emplea el teorema de Legendre de la geometría esférica, precisado y generalizado por él, para comprobar si la no esfericidad de la figura terrestre puede tener efectos cuantitativos ya en el orden de magnitudes de los triángulos medidos por él[8] efectos cuantitativos próximos a la precisión de las mediciones y que por tanto deberían ser tenidos en ya cuenta a la hora de *valorar los datos de un único triángulo geodésico.*

Para ello Gauss comparaba las correcciones de los ángulos que deben realizarse, para un triángulo Δ sobre la superficie de la Tierra, supuesta esférica o elipsoidal, a fin de transformarlo en un triángulo plano (euclideo) Δ^* de lados iguales. En el caso esférico, el exceso angular del triángulo Δ sobre 180º se debe distribuir uniformemente entre los tres ángulos, en el caso no esférico se debe distribuir de manera no uniforme, dependiendo de la curvatura de la superficie (la figura terrestre) en cada vértice. Gauss establecía que en el caso de prueba, el triángulo Brocken - Hohenhagen - Inselsberg (que en lo sucesivo llamaremos por abreviar el gran triángulo o $\Delta\ BHI$), el exceso que él mismo había determinado de $14'', 85348$ debía distribuirse en las porciones $4'', 95104$, $4'', 95113$, y $4'', 95131$ en los vértices B, H, I, de manera que se desvía de la

[7]En lo sucesivo, emplearemos las siglas GE para la geometría de Euclides y GNE para la no euclidea.

[8]El teorema de Legendre en geometría esférica dice que un triángulo esférico de lados pequeños y por tanto exceso esférico pequeño tiene aproximadamente el mismo contenido de superficie que el triángulo plano con lados de idéntica longitud. Gauss precisó el contenido de superficie dando una aproximación, y generalizó el teorema al caso de un triángulo "pequeño" sobre una superficie curva cualquiera. Véase (Dambrowski 1978) o bien (Scholz 1992, 639s.)

distribución uniforme sólo en el cuarto decimal tras la coma de un segundo angular. Por tanto, la diferencia estaba muy por debajo de la precisión en la medición, correspondiente al primer decimal tras la coma en las mejores mediciones[9].

Miller ofrecía una exposición adecuada de esta situación, que por lo demás nunca había sido objeto de polémicas:

> That Gauss concluded nothing about the non-Euclidean nature of physical space [en Gauss 1828, § 28] is not surprising, because the mathematical theory which he developed in this paper was not at all concerned with non-Euclidean geometry. What Gauss was seeking was a generalization of Legendre's result to a doubly curved surface in order to determine whether the earth's double curvature had any effect on his geodetic data. (Miller 1972, 348)

Y proseguía:

> Thus, Gauss did not have to use his geodetic data to determine whether the space of our experience is curved. He was studying a curved surface of known curvature – the earth. Additional proof that a misunderstanding of Gauss' 1827 paper led to the legend of his "experiment" is that of the many triangles that he surveyed and reported on, the previously mentioned triangle is the only one taken into account in the aforementioned paper. It therefore appears that what up to now has often been presented as Gauss' experiments on the nature of the space in which we live is simply a myth. (ibid.)

Sorprendentemente, Miller refutaba aquí un malentendido ("misunderstanding of Gauss' 1827 paper") que no había desempeñado ningún papel en la literatura informada sobre historia de la matemática antes de él. Ni Sartorius von Waltershausen, ni ninguno de los autores informados que hacían referencia a él, había establecido una conexión entre el § 28 de las *Disquisitiones generales* de Gauss y sus pruebas de no euclidicidad. Considerada con detenimiento, la medida de precisión mencionada por Sartorius ("se alejaba de dos rectos en aprox. dos décimas de segundo") contradice dicha interpretación del § 28 en casi todos los puntos: la desviación cuantitativa relevante estaba en el orden de 10^{-4} de segundo de arco en lugar de 10^{-1}, y no se hablaba aquí de una desviación respecto a dos rectos, sino más bien de "recalcular" un triángulo plano Δ^* de suma dos rectos[10].

El argumento principal de Miller se dirigía pues únicamente contra *un malentendido introducido por él mismo en la historiografía de la matemática*. La referencia al "gran" triángulo de la que habla Miller en su "additional

[9] El error medio –en el sentido de la desviación estándar empírica– era $\frac{3{,}5''}{\sqrt{n}}$, para n mediciones de la misma dirección (Breitenberger 1984, 273, 279s., 281).

[10] Este argumento fue planteado ya por van der Waerden (1974) en su crítica.

proof" no tiene en cuenta en absoluto la consideración obvia de que Gauss probablemente empleara dicho triángulo para consideraciones de control de *diversos tipos*; por algo había puesto especial cuidado en obtener una medición del gran triángulo lo más precisa posible, y lo más independiente posible del resto de su retículo (Gerardy 1955).

Aparentemente, cuando redactó su artículo del "mito", Miller no conocía en absoluto el informe del testigo Sartorius von Waltershausen. De otro modo sería difícil entender cómo es que Sartorius no aparece mencionado ni una sola vez en todo el trabajo (Miller 1972), y deberíamos pensar que se está confundiendo al lector intencionadamente, ya que aquél resulta ser una referencia central y "enemigo secreto" de la refutación de Miller[11]. En lugar de tener un punto de referencia, Miller sólo disponía de un hueco interpretativo que intentó rellenar con una atrevida hipótesis sobre el origen de la historia que había elevado a "mito":

> In conclusion, a reasonable conjecture as to the origin of this myth is as follows. The question of whether the physical space is curved or not took on new meaning after Einstein's general theory of relativity (1916), which utilized Riemannian geometry. Consequently, the myth may have arisen as a result of extrapolating back from Einstein's work to Riemann's 1854 work to Gauss' 1827 paper (without reading it, of course), keeping in mind that Gauss's theorems were applied to the largest triangle in his geodetic survey. (Miller 1972, 348)

Era un intento peculiar y más que voluntarioso de reconstruir la historia de la tradición, ya que ignoraba todo el debate pre-relativista sobre la "naturaleza" del espacio a finales del siglo 19 y principios del 20. Estaría fuera de lugar tratar de "refutar" aquí esta hipótesis carente de sentido; su autor la iría abandonando en el debate subsiguiente, una vez que (¿o debería decir "en caso de que"?) hubiera sabido de la discusión pre-relativista sobre los referentes empíricos de la geometría no euclidea (GNE). Pero el pasaje puede ser interesante en otro sentido bien distinto, como indicador de cuál era el trasfondo sobre el que se escribió el artículo y pudo alcanzar su repercusión. Lo primero que resulta misterioso es cómo pudo suceder que un artículo tan mal informado y pobremente investigado sirviera de referencia estándar, incluso para la discusión posterior y mucho mejor fundada del asunto de Gauss y el "gran triángulo".

Resumiendo: la historia de la comprobación gaussiana de la euclidicidad del espacio físico, que tenía una base concreta en el relato de Sartorius von Waltershausen ya que este era testigo directo (y por más que no incluyera referencias a fuentes), fue transformada en un "mito" por el artículo de A. Miller

[11]En respuesta a sus críticos, Miller se defendía intentando devaluar a Sartorius como informante con el empleo de argumentos secundarios, y en mi opinión gastados, del tipo de que tampoco Ernst Mach se había tomado en serio a Sartorius, etc. (Miller 1974).

en 1972, sin discutir el informe del testigo más importante y con argumentos dudosos, añadiéndole una hipótesis obviamente falsa acerca de la génesis del "mito". Sería interesante considerar qué conjunción de factores fue la causa de que este ataque obtuviera una resonancia tan grande en la historia de la ciencia, pero este no es nuestro objetivo. Antes bien, quisiera dedicar el siguiente apartado a presentar brevemente las cuestiones metodológicas e históricas interesantes que surgieron una vez iniciado el debate y que ponían en duda la fiabilidad del informe de Sartorius. No pretendo seguir el desarrollo del debate en toda su extensión, sino que me centraré en discutir el artículo publicado por E. Breitenberger en el *Archive for History of Exact Sciences* (Breitenberger 1984). Para abreviar, en lo sucesivo me referiré a la tesis de que Gauss nunca realizó una comprobación de la euclidicidad del espacio sobre la base de sus mediciones geodésicas de precisión, como el *mito de Miller*.

3. Dudas históricas-metodológicas avanzadas

En una contribución de 1984, muy detallada y profunda, E. Breitenberger expuso en un marco más amplio la nueva crítica al "mito" de las pruebas de euclidicidad por Gauss. Hacía también referencia a los intentos anteriores en ese sentido del astrónomo Hugo von Seeliger y el alumno de Listing[12], Edmund Hoppe (Hoppe 1925) (Kienle 1925, 614). Lo que no mencionó es que Seeliger tenía sin duda razones propias para querer liberar a Gauss de la "mácula" de haberse ocupado concretamente (buscando las mejores determinaciones cuantitativas de error posibles) de las condiciones de validez empírica de la hipótesis euclidea. Y es que, en el debate de finales del siglo 19 sobre la GNE, Seeliger adoptó la posición de que ésta no era siquiera utilizable como teoría geométrica de base para la astronomía. Así que Seeliger tenía en cuenta sus propias convicciones al interpretar a Gauss[13]. En cuanto a Hoppe, era de la opinión de que Gauss intentó determinar los límites de validez empírica de la geometría euclidea (GE), no a partir de mediciones geodésicas, sino astronómicas –y citaba información ofrecida por Listing en los años 1870–. Volveré a esto en el último apartado.

[12][N. del T.] Johann B. Listing (1808-1882) fue un discípulo de Gauss –y también amigo íntimo de Sartorius– que tras su tesis sobre superficies de segundo orden se convirtió en profesor de física. Es conocido por sus contribuciones geométricas, y fue él quien acuño el término "topología" en 1847 (la terminología científica se le daba bien: según Breitenberger, a él se deben otros términos como "fenómeno entrópico", "punto nodal", "luz homocéntrica", "geoide" o "micra").

[13]Breitenberger cita el rechazo de la "mácula" por Seeliger en (1984, 274), pero no lo pone en contexto. Una de las tesis que tuvo que defender K. Schwarzschild en su habilitación (Munich 1899, bajo la dirección de Seeliger) es precisamente la idea de que la GNE carece de significado para la astronomía. En su artículo (Schwarzschild 1900) esto le dio pie a una discusión sumamente matizada del problema; cf. (Schlemmel 2002).

En su artículo, Breitenberger sigue los meandros del discurrir de la literatura previa sobre el tema, con todas sus contradicciones. Su contribución apoya a los críticos, desde Seeliger hasta Miller, con argumentos que él considera como *evidencia interna* de que, por razones metodológicas, Gauss no hubiera podido desarrollar una contrastación empírica de la estructura euclidea del espacio basada en sus mediciones geodésicas. Pero Breitenberger conoce demasiado bien los testimonios originales como para ignorarlos, al estilo de la variante más simple del mito de Miller, o para devaluar el testimonio de Sartorius como indigno de crédito al carecer de conocimientos matemáticos. Así alcanza la siguiente conclusión, apoyada por buena evidencia:

> ... it is safe to conclude that Gauss was sufficiently irked by the axiom of parallels, to bring it up in conversations repeatedly, and in different forms, sometimes quoting BHI [el gran triángulo] sometimes not.
>
> Thus the myth of the BHI triangle as a deliberate test of Euclidean geometry appears as a fanciful embroidery upon indubitable facts, encouraged possibly by reports of remarks made by Gauss in his inner circle. (Breitenberger 1984, 289)

Breitenberger llega pues a la sorprendente conclusión de que Gauss habló en su círculo de allegados acerca de contrastaciones empíricas de la validez de la geometría euclidea que él mismo no podría haber llevado a cabo. Pero combina este análisis con una *defensa* del informe de Sartorius, incluyendo los datos cuantitativos que allí se ofrecen:

> It also stands to reason that Sartorius could hardly have misunderstood the sense of Gauss' remarks, for although he was no mathematician, he was thoroughly familiar with surveying and had produced detailed maps of the Etna volcano, among others. What he recalls [un margen de precisión de "dos décimas de segundo" para la suma angular en el gran triángulo] is indeed quite consistent with the evidence above. (Breitenberger 1984, 289)

La "evidence above" consistía en los datos de Gauss, sobre la base de los cuales –como ya había sugerido (van der Waerden 1974)– Breitenberger calculó una desviación de la suma angular del $\Delta\, BHI$, traducida a un triángulo plano, de $0,642''$ (o.c., 284s). Las mediciones gaussianas conducían a una suma angular "medida" para el gran triángulo de $180^{\text{o}}\ 0'14,211''$ sobre la esfera. El valor indicado antes se obtiene recalculando esa cantidad para un triángulo plano de lados idénticos, por "eliminación del exceso esférico". Breitenberger lo comentaba así:

> The spherical excess of BHI is stated by Gauss himself to have been $14.85348''$; hence the closure error was $-0.642''$. He might have called this fine result vortrefflich [excelente] and it astonishes

> us a little that he did not make more of it. (Breitenberger 1984, 285)

El valor calculado de $0,6''$ coincide en orden de magnitud con el valor dado por Sartorius; ninguno de los autores que hemos mencionado ve en la ligera discrepancia de "dos" en vez de seis décimas un motivo para desautorizar a esa fuente, y el propio Breitenberger habla de que ambos valores son "quite consistent". Gauss mismo mencionó el valor de $0,6''$ en su correspondencia con Olbers, carta del 28.12.1823 (Gauss Olbers, II, 266)[14].

Sin embargo, Breitenberger no ve en esto *ningún* apoyo para Sartorius en tanto exposición del *contenido conceptual* de los comentarios de Gauss. Pues él interpreta los datos de precisión de Gauss sólo en el sentido *meramente pragmático* de establecer un error de cierre en la medición de un triángulo geodésico, calculado dentro del marco de la GE. En apoyo de esta interpretación remite a la práctica usual de los especialistas en geodesia (antes, después, y en tiempos de Gauss), en la que era habitual asegurarse de la calidad de las mediciones por medio de sumas angulares que se comparaban con la suma esperada (de $180^{\circ} = \pi$ en el caso plano, $\pi + F/R^2$ en el caso esférico para superficie del triángulo F y radio terrestre R). Más aún, su artículo *niega* de raíz *la misma posibilidad de que Gauss hubiera podido considerar* los datos *también* como una medida de precisión para la validez empírica de la GE. Así es como Breitenberger nos ofrece una variante del mito de Miller refinada mediante consideraciones matemático-metodológicas, y se conforma con sorprenderse de que Gauss "no hubiera hecho más" de sus datos de precisión. Y es que la precisión de dichas mediciones no se superó de manera considerable hasta los años 1960 con la introducción de los métodos de medición láser[15].

Breitenberger apoya su argumentación en la "evidencia interna" de que Gauss siempre presuponía la geometría euclidea del espacio marco en todos sus trabajos de geodesia, e incluso en sus investigaciones publicadas sobre geometría diferencial (donde estudió la geometría diferencial de superficies como "fundamento del fundamento" de la geodesia). Como es natural, esto planteaba problemas fundamentales para cualquier intento de contrastación empírica de la validez de la GE, o incluso para una estimación de los márgenes

[14] Sería natural suponer que, al recordar el asunto, Sartorius confundió la desviación de la suma angular para el triángulo completo $(0,6'')$ con la desviación para un solo ángulo $(0,2'')$. Desde el punto de vista de Gauss, calcular el error para un único ángulo tenía sentido: véase la nota n° 32. Agradezco a Breitenberger la referencia a la carta del 28.12.1823 a Olbers.

[15] Para una comparativa de los datos de Gauss con la precisión obtenida posteriormente empleando teodolitos, hasta 1960, véanse las indicaciones de Breitenberger (1984, notas 35, 36, 42, 50, 52). Resulta interesante el comentario citado en esa última nota, de un manual de geodesia a principios de los 1970: "... angles measured by ... theodolites between 1800 and 1950 are not necessarily inferior to those measured by modern instruments ... the long time required to complete observations ... probably resulted in better elimination of refraction errors than modern observers have time for" (G. Bomford, Geodesy, Oxford, 3ª edición 1971, 18; citado en (Breitenberger 1984, 280)).

de error. De hecho, sólo Riemann creó, en su lección de 1854, el marco conceptual para una geometría generalizada que permitiera clarificar sistemáticamente tales cuestiones (Breitenberger 1984, 285). Ahora bien, sabemos que esto no le impidió a Gauss investigar relaciones fundamentales de la GNE, *sin* haber clarificado previamente todo el marco teórico necesario[16].

El elemento metódico central para Gauss era la relación entre la constante característica C, la curvatura κ de una superficie gaussiana (definida extrínsicamente, determinable intrínsecamente), y la suma angular del triángulo en el caso de curvatura constante:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \kappa \cdot F, \tag{1}$$

así como que $\kappa = -1/C^2$ en el caso de la geometría no euclidea. La ecuación (1) era –y es– una especialización del *Teorema elegantissimum* de Gauss, es decir, de la parte originaria suya del teorema que luego se llamaría de Gauss-Bonnet, para el caso de curvatura constante y triángulos geodésicos. Tiene poco sentido suponer que Gauss habría dudado en considerar válidas *heurísticamente* estas relaciones también para la GNE tridimensional, por más que no haya elaborado una fundamentación sistemática, la cual debía ofrecer las dificultades ya sabidas en ausencia de la generalización riemanniana. Sus reflexiones sobre los fundamentos de la geometría le habían conducido ya a la misma relación para la suma angular (si bien, claro, con la famosa "constante" C). En este sentido, el comentario en la carta a Taurinus citada al principio, sobre la posibilidad de contrastar la geometría mediante "mediciones sobre la Tierra o en el cielo" (y otros comentarios similares), hablan un lenguaje bien claro.

En mi opinión, Breitenberger no tiene en cuenta suficientemente esta constelación heurística cuando, de la consideración correcta (y bien conocida) de que sólo Riemann introdujo en forma desarrollada la noción de un espacio curvo tridimensional (p. 285), deduce la afirmación apodíctica:

> Gauss was not alluding to a test of (three-dimensional) geometry; as stressed above, he did not and he indeed could not, envisage one. He wrote in ignorance of any tangible application of hyperbolic trigonometry to some surface or object. Not only did he not possess a model in the modern sense from which he might have deduced self-consistency; he did not even possess any realization which would have made the subject accessible to geometric intuition. (Breitenberger 1984, 287)

Por supuesto que Gauss no conocía ninguna "geometría hiperbólica" en los años 20, etc. Y sin embargo afirmo que, con sus conceptos de línea geodésica,

[16]Sobre las contribuciones de Gauss en relación con la GNE, consúltese especialmente (Reichardt 1976) o (Stäckel 1918); en castellano puede verse (Gray 1992) y la introducción a (Riemann 2000, xcii-ci).

de superficie determinada intrínsecamente mediante métrica y curvatura, y de la suma angular en el caso de curvatura constante, Gauss estaba en posesión de elementos conceptuales y metodológicos decisivos. Estos elementos hacían posible que considerara *bien fundadas heurísticamente* las mediciones de precisión "sobre la Tierra o en el cielo" para valorar la naturaleza del espacio físico. Esto incluía la posibilidad de establecer márgenes de error precisos para la GE. *No es pues ninguna exageración interpretar un tal margen de error como la versión informal de la evaluación de un límite superior para el valor de la curvatura del espacio, compatible con los resultados medidos.* En este sentido, considero falso el decir que "ni siquiera poseía un modelo concreto [realization] que hubiera podido hacer el asunto accesible a la intuición"[17].

Lo que me gustaría hacer a continuación es dividir la duda expresada de manera tan apodíctica por Breitenberger en una serie de problemas, que se deben aclarar para decidir si las mediciones de precisión del $\Delta\ BHI$ pueden ser consideradas heurísticamente (en el marco de la metodología gaussiana; *exactamente* en el marco de la ampliación riemanniana) como márgenes de precisión para la validez empírica de la GE. Jeremy Gray, con sus tenaces preguntas, ha llamado mi atención hacia la mayoría de las cuestiones que se deben aclarar. Este trabajo debe mucho a mis discusiones con él, o mejor dicho, sin dichas discusiones no habría sido escrito[18].

Para facilitar la comprensión, en la parte 4 discutiré los problemas fundamentales que deben tenerse en cuenta a la hora de determinar la curvatura del espacio mediante mediciones "sobre la Tierra", sin someterme a la restricción de las teorías matemáticas que estaban a disposición de Gauss. En la sección siguiente (parte 5) pasaremos a discutir el asunto desde el punto de vista de Gauss en los años 1820. Pido a los lectores que, en lo relativo a la validez empírica de la GE, sólo tengan en cuenta lo que era conocimiento seguro a comienzos del siglo 19. En aquel tiempo, las mediciones de paralaje se difuminaban todavía en la "suciedad" de los efectos de medición. Los triángulos geodésicos más grandes que se habían medido tenían lados del orden de varias decenas de km, las desviaciones estándar para las mediciones de dirección en la triangulación de los Países Bajos del Baron von Krayenhoff, que le servía de referencia a Gauss, eran de unos $2,7''$[19]. El contenido de superficie en uno

[17] Por supuesto, esto depende de lo que se entienda por "intuición geométrica", etc., y se podrían establecer precisiones al respecto que cabe demostrar van más allá de lo que estaba a disposición de Gauss; históricamente, sin embargo, esto no resulta clarificador, por lo que considero inútil una discusión en este plano.

[18] También debo dar gracias a P. Strantzalos y M. Lambrou, a quienes J. Gray y yo debemos la posibilidad de haber discutido con detalle nuestras visiones, entonces divergentes, en una atmósfera estimulante y amistosa, durante un *Workshop* sobre historia y didáctica de las matemáticas celebrado en la Universidad de Creta (Heraklion) en abril de 2002.

[19] Según cálculos de Gauss basados en los datos que conocía; cf. (Breitenberger 1984, 281), donde se habla por error de la determinación de un grado en Dinamarca, la cual estaba en todo caso bajo la dirección de H. C. Schumacher.

de los triángulos mayores de este retículo era de unos $300km^2$, con lo que el exceso angular esférico era de $1,5''$, y por tanto *inferior* al "error medio" (desviación estándar) para una medición de dirección. Incluso el exceso esférico de un único triángulo (medido directamente) se hundía profundamente en el dominio de los errores de medición.

Desde el punto de vista de nuestra historia se puede describir adecuadamente la precisión que se había alcanzado diciendo lo siguiente. Si alguien antes de Gauss hubiera tenido la idea de evaluar una supuesta curvatura del espacio, esto habría requerido (al menos implícitamente) suponer que la curvatura espacial *supera notablemente* a la curvatura de la superficie terrestre (!); pues de otro modo, dada la precisión en las mediciones alcanzada hasta entonces, no se había podido observar ningún efecto en las mediciones de sumas angulares. Esto debe bastar para hacer bien claro de qué se trataba cuando –como fue el caso de Gauss– se pretendía llevar adelante un empirismo consecuente respecto a la estructura métrica del espacio, a principios del siglo 19. Al hacerlo *no se podía excluir*[20] que la constante supuesta estuviera "ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra". Pero ¿de qué otra manera sino empíricamente se podía –sin presuponer la validez a priori de la GE– asegurar que al elevar la precisión de las mediciones no aparecerían, junto con los efectos de la curvatura terrestre, otras alteraciones que podrían tener su origen en la curvatura del espacio?

A la izquierda: La cima del monte Brocken, que es la más famosa de las montañas del Harz, tal como se veía a finales del siglo 19. Y a la derecha: Vista de la Torre Gauss (Gaussturm) que se erigió en la cima del monte Hohenhagen, donde Gauss en persona realizó tareas de medición geodésica para el "gran triángulo". La torre de 35 m fue erigida en 1908, pero tuvo que ser demolida en 1963.

[20]Obviamente decir esto es bien distinto de suponer (en tono positivo) que se da el estado de cosas correspondiente.

4. Determinación del rango de la curvatura espacial basada en mediciones terrestres

En el proyecto de evaluar la curvatura del espacio mediante mediciones terrestres había que tener en cuenta, como es natural, algunos hechos bien conocidos.

Consideración 1: *Para todo valor s, con $\pi < s < 3\pi$, hay un triángulo esférico con la correspondiente suma angular $\alpha + \beta + \gamma = s$.*

Este conocido hecho basta ya para descartar la posibilidad de aplicar directamente el método para la determinación de curvatura mediante mediciones de la suma angular en un triángulo plano (quiero decir sin tener en cuenta otros datos métricos sobre la superficie terrestre) transfiriéndolo a triángulos geodésicos. Estos últimos pueden ser considerados, con suficiente precisión (Gauss 1828, §28), como triángulos esféricos.

Pero tampoco la consideración de datos métricos intrínsecos sobre la superficie permite acceder de golpe a una evaluación de la curvatura. Esto se debe a la

Consideración 2: *Las mediciones locales (de la métrica) en una subvariedad* 2*-dimensional de una variedad riemanniana no permiten inferir la curvatura del espacio ambiente.*

Basta pensar en la horosfera del espacio no euclideo, que localmente arroja una geometría euclidea, o en una superficie gaussiana en el espacio euclideo, cuya geometría intrínseca no es distinta de la de otra superficie isométrica en el espacio no euclideo, o bien inmersa en alguna variedad riemanniana más general. A esto se refiere Breitenberger en diversos lugares al enfatizar que los cálculos de Gauss siempre presuponían la GE, en lugar de someterla a contrastación. Y es que una contrastación solo tiene sentido si su resultado puede ser negativo.

Esta circunstancia, planteada con diversas formulaciones, es considerada por varios autores como una *refutación decisiva de la posibilidad* misma de realizar una contrastación de la estructura espacial euclidea mediante mediciones terrestres. En seguida mostraremos que esto es *falso*. Si fuera correcto, sin duda las declaraciones de Gauss a comienzos de los años 1820 (acerca de la posibilidad teórica de establecer con mediciones "sobre la Tierra" una eventual desviación del espacio físico respecto a la GE) descansarían en un error, remitiéndonos a la "mácula" de Seeliger sobre la imagen de Gauss como "héroe" científico. Pero no se deben sacar conclusiones demasiado rápido, y hay que recordar la

Consideración 3: *Si con base en la Tierra es posible medir la suma angular de un gran triángulo plano extrínseco (o sea, que no yace en la superficie terrestre), o bien calcularla a partir de las mediciones directas, entonces se obtiene a partir de la relación para la suma angular de Gauss (1) información directa o indirecta sobre la curvatura espacial.*

El triángulo que designamos aquí como "extrínseco" puede consistir en la conexión mediante rayos de luz de cimas montañosas (aquí $\hat{B}$, $\hat{H}$, $\hat{I}$) que sobresalgan de la superficie F (esfera, elipsoide o geoide) que representa matemáticamente la superficie terrestre, en cuyo caso es posible una conexión visual directa entre ellos. En general, el triángulo puede estar y estará inclinado, es decir, no será paralelo a los tres planos tangenciales a F en los puntos $B, H, I \in F$ situados ortogonalmente bajo las cimas. La ortogonalidad puede considerarse definida mediante los efectos de la gravedad (suponiendo que la geometría de rayos de luz y la ortogonalidad respecto a la gravedad sean compatibles)[21]. Se consideran también los rayos de luz como la mejor realización empírica de las geodésicas, lo cual obliga a realizar correcciones sobre los datos de medición considerando como fuentes de error las alteraciones en la propagación de la luz debidas a influjos atmosféricos e intentando compensarlas. Esto representa una interpretación fiel de la práctica de Gauss (y de otros actores posteriores)[22]. Por tanto, se trata en sentido estricto de una *geometría de rayos de luz depurada de influjos atmosféricos tanto como sea posible.* Las alturas de $\hat{B}$, $\hat{H}$, $\hat{I}$ sobre el elipsoide de referencia empleado por Gauss correspondían a 1156 m (Brocken), 508 m (Hohenhagen) y 916 m (Inselsberg)[23].

Una posible desviación de la geometría lumínica extrínseca respecto al caso euclideo tendría efectos sobre la suma angular en $\Delta\ \hat{B}\hat{H}\hat{I}$ y, por tanto, sobre los ángulos proyectados sobre los correspondientes planos tangenciales a F en B, H, I. En la práctica geodésica no se miden los ángulos $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\iota}$ en el plano que pasa por $\hat{B}, \hat{H}, \hat{I}$, sino los ángulos proyectados ortogonalmente β, γ, ι. Esto es resultado del propio procedimiento de medición, sin que requiera cálculos adicionales: tras "horizontalizar" el teodolito, esto es, situar el instrumento sobre el plano horizontal, se mide la diferencia angular ("azimut") entre la visual (dicho de manera más precisa, el plano vertical que pasa por la línea visual) y la dirección sur. Los ángulos del triángulo geodésico BHI resultan de la diferencia entre los azimuts de las correspondientes direcciones BH, BI, etc.[24].

[21] La relación de ortogonalidad viene pues considerada en relación al geoide, pero a los efectos de las consideraciones que siguen éste puede verse representado con suficiente aproximación por el elipsoide de referencia.

[22] Compárese también (Breitenberger 1984, 282).

[23] Datos tomados de (Breitenberger 1984, 279, 283).

[24] Breitenberger describe el cálculo de los ángulos a partir de los datos azimutales de Gauss en (1984, 284). Desgraciadamente, en otro lugar ofrece una descripción errónea del

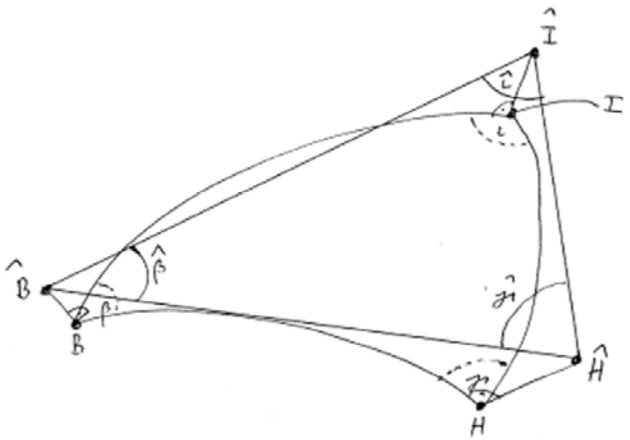


Figura 1: Triángulo geodésico y triángulo de rayos de luz.

Ahora hay que evaluar qué efecto tendría sobre los ángulos geodésicos una pequeña desviación de la geometría espacial extrínseca respecto a la métrica euclidea, digamos una curvatura (seccional) constante $\hat{\kappa}$ con $|\hat{\kappa}| << 1$, para Gauss $\hat{\kappa} < 0$. Para simplificar partiremos del supuesto de que los datos métricos de la superficie terrestre F (curvatura media, curvaturas principales del elipsoide) son conocidos por medio de mediciones intrínsecas independientes, como también lo son las coordenadas de los puntos B, H, I del triángulo y por tanto el contenido de superficie $F(\Delta)$ del triángulo geodésico ΔBHI obtenido por proyección de las visuales lumínicas[25]. El ángulo $\hat{\beta}$ sólo se desviará del valor euclideo $\hat{\beta}_0$ en una cantidad pequeña $\Delta\hat{\beta}$, y así para los demás, de modo que

modus operandi empleado por Gauss a la hora de evaluar los datos (*op. cit.*, 280): de los cuatro pasos que describe, los dos primeros están formulados de una manera que mezcla la descripción teórica y la evaluación de lo medido en una manera confundente. Esto tiene consecuencias para nosotros, ya que en nuestra discusión es decisivo diferenciar los datos medidos directamente de aquellos que se obtienen por cálculo teórico. La proyección de los ángulos sobre los planos tangenciales está en cierto modo "incorporada en el procedimiento de medición", tal como se ha descrito arriba, y –contra lo que escribe Breitenberger– no es necesaria una reducción a estaciones de igual altura para determinar los azimuts, ni una proyección de las visuales sobre la esfera. Agradezco al Prof. Gerhard Heindl, matemático numérico y especialista en geodesia, sus explicaciones acerca de la medición con teodolitos, fáciles para él pero sumamente útiles en el contexto de este trabajo.

[25]Más abajo discutiremos hasta qué punto esta simplificación se corresponde con la práctica de medición empleada por Gauss.

la desviación ε de la suma angular será:

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 + \Delta\beta, \qquad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 + \Delta\gamma, \qquad \hat{\iota} = \hat{\iota}_0 + \Delta\iota$$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_0 + \hat{\iota}_0 = \pi, \qquad \Delta\hat{\beta} + \Delta\hat{\gamma} + \Delta^{o}\hat{iota} =: \varepsilon$$

Por medio de una consideración de geometría elemental y un desarrollo en serie, se demuestra que las deformaciones angulares no euclideas $\Delta\hat{\beta}$, etc. que hemos supuesto se traducen en la proyección ortogonal, en una primera aproximación, en una variación de los ángulos medidos del triángulo geodésico afectada por un factor que es aprox. 1 (véase el apéndice, ecuación (5)). Por tanto obtenemos la

Consideración 4a: Una pequeña desviación de la suma angular en el triángulo $\hat{\Delta} = \Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$ respecto al valor euclideo π en la cantidad $\varepsilon = \hat{\kappa} \cdot F(\hat{\Delta})$ se traduce, en una buena primera aproximación, como una desviación de igual valor de la suma de los ángulos medidos sobre la esfera β, γ, ι respecto al valor esférico esperado:

$$\beta + \gamma + \iota - \pi \approx 1/R^2 \cdot F(\Delta) + \varepsilon \tag{2}$$

(donde R es el radio terrestre medio, $F(\Delta)$ el contenido de superficie del triángulo Δ.

Y en la dirección inversa se deduce:

Consideración 4b: Una curvatura espacial extrínseca supuesta $\hat{\kappa}$ se corresponde, al medir "grandes" triángulos geodésicos Δ, con una porción sistemática ε' del "error de cierre" obtenido para la suma angular recalculada para el caso euclideo. En una primera aproximación, y para un contenido de superficie $F(\Delta)$, aquélla puede estimarse en:

$$\varepsilon = \hat{\kappa} \cdot F(\hat{\Delta}) \tag{3}$$

Como ya se mencionó al final del último apartado, el error de cierre en mediciones de triángulos geodésicos quedaba *por encima* del exceso esférico hasta digamos 1820. Ya solo por ello hubiera resultado imposible plantearse siquiera una evaluación empírica de la curvatura del espacio al modo de (3). A eso hay que añadir que la suposición realizada arriba (obtención de los datos métricos terrestres por mediciones intrínsecas, determinación de las coordenadas de los vértices mediante mediciones independientes) no podía considerarse satisfecha por las mediciones anteriores a Gauss, ya que el triángulo empleado para la prueba habría pertenecido a la red geodésica y sería de una magnitud similar a los triángulos de la red.

La situación era otra con las mediciones de Gauss. Los lados del "gran" triángulo BHI tenían longitudes entre 69 km (BH), 85 km (HI) y 107 km (BI), superando a los triángulos usuales en mediciones geodésicas por un factor de aprox. 5 en dichas longitudes, y por todo un orden de magnitudes en lo relativo a superficie; superaba así también a los triángulos que se habían empleado para determinar la forma de la Tierra (o los que sirvieron a Gauss para la corrección de datos). Si se considera que en el caso de los *retículos de triángulos más pequeños* no se comprobaba un influjo de una eventual curvatura del espacio, ni siquiera con los métodos de medición mejorados de Gauss, entonces hay buenas razones para considerar los valores métricos obtenidos por esa vía como pertenecientes a la *geometría intrínseca* de la superficie terrestre en el sentido de la teoría de superficies de Gauss. Las líneas visuales del retículo, que discurrían por el espacio ambiente, pertenecen obviamente a porciones tan pequeñas del espacio que éstas son representables en forma euclidea. En el lenguaje de las variedades riemannianas, esto significa que cada uno de los triángulos lumínicos era representable con suficiente precisión (dentro de los rangos de precisión de las mediciones) en el espacio tangencial a la variedad, como para considerar al triángulo geodésico que cae bajo aquél como parte de una esfera euclidea.

Además, Gauss había puesto especial cuidado en medir el gran triángulo de manera individual y con la mayor precisión, y sin que la determinación de sus datos básicos se incluyera en la compensación de los retículos geodésicos de la red propia que discurría hacia Hamburgo al norte, al sur en el Electorado de Hessen y se ligaba con ella, dirigida por su colega Gerling, ni de la situada al oeste en los Países Bajos, bajo la dirección del barón von Krayenhoff (Gerardy 1955). Así pues, Gauss había tenido cuidado en sus métodos para que el gran triángulo cayera fuera de las redes de referencia y fuera así "metodológicamente extrínseco" a ellas. En la misma medida, tiene fundamento aplicar lo expuesto en las *consideraciones 4a* y *4b* al triángulo gaussiano ΔBHI (o resp. al $\Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$).

Con un contenido de superficie $F(\Delta) \approx 2920 km^2$ [26], y un error de cierre $\varepsilon' \approx 0,6''$, un simple cálculo aproximado[27] ofrece para la curvatura espacial $|\hat{k}| = 1/r^2$ la acotación

$$r > 5R \approx 3 \cdot 10^4 km \qquad \text{o resp.} \qquad |\hat{k}| < 10^{-9} km^{-2}. \tag{4}$$

Resultaba pues perfectamente posible dar una cota superior para la curvatura espacial en función de las mediciones geodésicas de Gauss. Esto se debía no sólo al aumento de la precisión en aprox. un orden de magnitud, sino también a que Gauss había organizado cuidadosamente sus mediciones, de modo que las consideraciones de control como la anterior tuvieran una justificación

[26]Dato obtenido por cálculo a partir del valor ofrecido por Gauss de $14,86''$ para el exceso angular esférico y de su valor de $R \approx 6370km$ para el radio terrestre.

[27]Ya que $F/R^2 \approx 14''$, y $F/r^2 < 0,6''$, tenemos $r/R > \sqrt{14}/0,6 \approx 5$.

metodológica. Si el espacio físico tenía una curvatura, se sabía ahora que la cota inferior para el radio de curvatura estaba sin duda considerablemente más allá del radio terrestre: $r > 5R$. Desde el punto de vista astronómico este valor resulta risible por lo pequeño, pero debe tenerse en cuenta que hasta 1838 no hubo valores fiables para mediciones de paralaje, y por tanto cualquier intento de emplear las mediciones astronómicas para una acotación cuantitativa de la curvatura espacial quedaba –literalmente– suspendido en el aire (o mejor, "en el éter").

Para las consideraciones anteriores hemos empleado métodos teóricos y conceptos que no estaban a disposición de Gauss. Queda pues discutir qué aspectos del análisis "modernizado" (aunque ya fuera planteable desde 1854) que hemos expuesto podían haber resultado accesible para el propio Gauss con sus métodos.

5. ¿Qué es lo que Gauss podía estimar?

Resulta claro que Gauss no conocía en los años 1820 ninguna variedad tridimensional riemanniana *en forma precisa y desarrollada* (ni siquiera de curvatura constante), pero es igualmente claro por su correspondencia que desde al menos 1816 estaba convencido de la posibilidad lógica y conceptual de desarrollar en forma consistente una geometría no euclidea[28]. Esto no ha sido nunca cuestionado por los historiadores de la ciencia. Es bien sabido también que, a ese respecto, le interesaba especialmente cómo las relaciones métricas conocidas de la GE, por ejemplo el teorema de la suma angular, experimentan modificaciones. Una afirmación como la antes citada que realizó a Taurinus ("Si la geometría no-euclidea fuera la verdadera, y si aquella constante estuviera ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra o en el cielo, sería posible determinarla a posteriori") puede pues ser interpretada en el sentido de la *consideración 3*, sin traicionar un ápice la perspectiva gaussiana. Dicho brevemente:

La consideración 3 estaba clara para Gauss.

De igual manera, Gauss no necesitaba poner sus ideas en el marco de una teoría desarrollada de las variedades riemannianas para ver que la GNE puede aproximarse a escala pequeña por medio de la GE, en particular -y con tanta mayor precisión- cuanto más pequeña sea la "constante" $C = |k| << 1$, ya se trate del caso plano o del espacio.

Por ello resultaba natural, desde su perspectiva, considerar los datos terrestres que había medido como buenas aproximaciones a los hechos de la geometría intrínseca de la superficie terrestre: se trataba de emplearlos para consideraciones de control sobre los fundamentos empíricos, y estaba considerando la geometría del espacio físico como no euclidea, pero con C grande.

[28](Stäckel 1918), o también (Reichardt 1976, 25ss).

Esto no es ninguna contradicción metodológica, sino un procedimiento legítimo y bien fundado para la ciencia empírica y matemática.

Como en lo "muy" pequeño la geometría euclidea es válida para el espacio físico con gran precisión, incluso suponiendo que $C > 0$, era y es obvio que la proyección de los ángulos del triángulo lumínico $\Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$ puede ser aproximada de manera euclidea[29]. Gauss podía sentirse justificado –cuando menos en un *sentido heurístico*– al asumir que, en ese proceso, una pequeña desviación en la suma angular del triángulo lumínico se reflejaría proporcionalmente (y con un factor de proporcionalidad en torno a 1) sobre las mediciones realizadas con teodolito del triángulo geodésico ΔBHI. Si es que se planteo la cuestión con más precisión, conseguir una estimación como la que exponemos en el apéndice le resultaría un problema de los que se resuelven "tomando el café". Considerando juntos el comentario a Taurinus, el citado por Sartorius y otros similares, y leyéndolos en el contexto de sus trabajos de geodesia en los primeros años 1820, no puede uno dudar que Gauss se planteó cuestiones de este tipo. Queda para las lectoras y lectores valorar si Gauss se ocupó precisamente del problema que *discutimos aquí*, en tanto no aparezcan documentos manuscritos que puedan servir para aclararlo definitivamente. En cuanto a mí, creo que las fuentes disponibles y la reconstrucción ofrecida de la perspectiva teórica que Gauss podía tener suministran una *buena* demostración histórica por *indicios*.

Podemos pues afirmar:

El contenido de las consideraciones 4a y 4b resultaba accesible para Gauss cuando menos a nivel heurístico. A la vista de sus comentarios sobre la significación empírica de las cuestiones de fundamentos de la geometría, y tomándolos en serio, hay que concluir que Gauss debe haberse planteado la cuestión que nos ha ocupado, o alguna similar.

Llegamos así a la conclusión de que para Gauss era bastante natural comprobar si, para los triángulos más grandes que cabe medir sobre la Tierra, se aprecia una porción sistemática del error de cierre que sugeriría una desviación de la curvatura espacial respecto a 0, perceptible ya a nivel terrestre. *Tras las mediciones de 1823, la respuesta a esta cuestión resultó ser claramente negativa.* Los errores de cierre de algunos triángulos pequeños de la red de Hannover eran en ocasiones mayores de $1'$, superando pues considerablemente el del "gran triángulo"; e incluso el "error medio" de las correcciones de dirección para toda la red, obtenidas por cálculos de compensación (sin considerar

[29]Los cálculos de aproximación pueden realizarse, naturalmente, también sin espacios tangentes a variedades. Basta con formularlo de otra manera (desde nuestro punto de vista, de un modo más prolijo). Al realizar la proyección en los vértices del triángulo, se trata de la representación de regiones espaciales del orden de 1 m (en cada una de las tres dimensiones). Basta con realizar la proyección sobre un plano paralelo al plano tangente al geoide a través del punto en que se mide, donde se encuentra el teodolito.

el gran triángulo), era de unos $0,48''$, según le comunicó Gauss a Bessel en noviembre de 1823[30], por lo que resultaba ser poco menor que el de ΔBHI.

Pero queda todavía sopesar una pregunta crítica: ¿por qué no existe ninguna indicación de que Gauss intentara medir directamente los ángulos del triángulo lumínico $\Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$, si es que realmente estaba interesado en comprobar en su caso la magnitud de la curvatura espacial?[31] ¿No habría sido esto más simple que tomar en cuenta todas esas complicadas reflexiones, acerca de la relación entre geometría euclidea y no euclidea, que hemos debido discutir aquí y que han irritado tanto la discusión entre historiadores? Esa ausencia de toda prueba de una medición directa de los ángulos del "gran triángulo" plano, ¿no es un indicio de que todo fue de otro modo, y que Gauss no pretendía obtener nada más que un mejor error de cierre, yendo más allá de sus predecesores pero precisamente sólo en el marco de la geodesia tradicional?

Esta pregunta se acerca mucho al núcleo de nuestras reflexiones, pero sigue sin constituir una nueva objeción (¿la última?) a la credibilidad de lo que Sartorius nos cuenta sobre las reflexiones y estimaciones de Gauss en relación a la medición de 1823. Debemos hacernos una idea de qué es lo que Gauss debería haber puesto en práctica, a fin de medir directamente los ángulos del triángulo plano $\hat{B}\hat{H}\hat{I}$. La menor de las dificultades habría sido lograr que resultase del agrado del rey Georg IV financiar un tercer retén de medición (cosa probablemente nada fácil, ya que no tendría ninguna utilidad geodésica). Las mediciones con heliotropo no sólo hacen necesario un retén de medición en el punto principal (el Hohenhagen al tratarse de la medición del ángulo $< \hat{B}\hat{H}\hat{I}$) sino que requieren otros dos en los restantes vértices (el Brocken y el Inselsberg en este caso), a fin de establecer los heliotropos necesarios para marcar la dirección de la líneas visuales. Sin embargo, el principal problema hubiera sido otro: se habría requerido un instrumento de medición totalmente nuevo, que permitiera establecer dos ejes ópticos y medirlos de manera simultánea o en rápida sucesión, para luego medir con la mayor precisión el ángulo entre ellos sobre un plano inclinado. Resulta imposible realizar una medición de este tipo con un teodolito, incluso con la versión mejorada del propio Gauss[32].

[30](Gauss *Werke*, **IX**, 366), citado también en (Breitenberger 1984, 282).

[31]De nuevo es una pregunta de Jeremy Gray que va directamente al núcleo de esta historia.

[32]En este punto tiene una especial importancia la exposición confundente de Breitenberger (1984, 280) acerca de los pasos supuestamente seguidos por Gauss en sus mediciones y cálculos (véase la nota 22). Esa exposición sugiere que al medir los ángulos del triángulo lumínico serían lo primero metodológicamente, y que los ángulos proyectados del triángulo geodésico se obtendrían por cálculo en un "segundo paso". Pero en realidad la proyección sobre el plano tangente está, como si dijéramos, incorporada en el proceso de medir a través de la disposición horizontal del teodolito. Con el teodolito resulta imposible medir directamente los ángulos del triángulo lumínico, ya que están inclinados respecto a él. Además, no es necesario calcular estos ángulos para el empleo de las mediciones en geodesia, ni tampoco para su empleo en relación a la validez de la GE, siempre que se emplee el criterio de cierre tal como quedó explicado arriba.

Por tanto, podemos afirmar: el *método* indicado en el informe de Sartorius, de *emplear el propio error de cierre como criterio para el rango de la curvatura espacial*, sigue siendo notablemente más simple en el marco de los instrumentos de medición disponibles y aplicable mediante una ligera mejora de los métodos usuales de medición geodésica (elección de un "gran" triángulo y separación del resto de la red, medición de triángulos independientes con la mayor precisión alcanzable). Vale la pena enfatizar una vez más que en ese proceso no era necesario recalcular los ángulos del triángulo lumínico $\Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$[33], sino sólo debía tenerse en cuenta la desviación de la suma angular. En cambio resultaba ser una cuestión de gusto, o respondía en todo caso a consideraciones de intuitividad o de comparabilidad directa, la decisión de indicar el error de cierre relativamente al valor esperado de la suma angular esférica ($180^o 0' 14,85...''$) o a la suma angular plana eliminando el exceso esférico ("dos rectos").

El resultado de estas consideraciones retrospectivas arroja pues una nueva confirmación de que el criterio indicado por Sartorius constituye un método de comprobación sumamente significativo.

Todo esto, por supuesto, sólo es válido si uno está dispuesto a considerar la pregunta de Gauss por el posible orden de magnitud de la curvatura espacial en relación "a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la Tierra", como un problema con sentido.

6. Resumen y conclusión

Gauss sólo habría tenido motivos para seguir investigando la cuestión de una eventual prueba terrestre de la curvatura del espacio físico, después de 1823, si para el gran triángulo hubiera aparecido un error de cierre negativo suficientemente grande. De hecho, la corrección para cada uno de los ángulos calculada a partir del error de cierre (negativo) era de $0,2''$ y, por tanto, caía por debajo del "error medio (cuadrático)" de la corrección por compensación de las direcciones (desviación estándar empírica $\sigma = 0,48''$) que Gauss había tenido que aplicar al compensar su red geodésica[34]. Desde el punto de vista del

[33] De haber querido hacerlo sobre la base de mediciones con teodolito, se habría necesitado una precisión mucho mayor de la que cabía obtener para determinar el ángulo de inclinación tan pequeño del triángulo relativo al plano tangente al campo gravitatorio terrestre. Los ángulos de elevación son medibles "hoy" (2003) con buenos instrumentos hasta $0,1''$; pero serían inútiles para la determinación del ángulo de inclinación de $\Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$, porque la refracción atmosférica es muy difícil de controlar en recorridos tan largos. Por eso el error sistemático haría que el resultado para ángulos de elevación pequeños fuera simplemente inutilizable (debo estas informaciones al Prof. Heindl).

[34] ¿Podría ser que Gauss hubiera establecido esta comparación en sus discusiones orales con Sartorius von Waltershausen? Quizá sería temerario afirmarlo, pero desde luego no se puede descartar. Ya en su correspondencia con Olbers, carta del 2.11.1823, Gauss indicaba el valor de $0,48''$ como "*error medio* de todas las direcciones, entendido al modo de mi *Theoria*

Dibujo de Gauss realizado por su alumno Listing, al parecer en 1832.

siglo 20, esto es, de la teoría de la relatividad general, este resultado negativo no es ninguna sorpresa. Estimando los efectos del campo gravitatorio de la Tierra para la geometría lumínica de un triángulo del orden de magnitud del ΔBHI, para una métrica de Schwarzschild, nos vemos llevados a una suma angular de $\pi+3{\cdot}10^{-13}$ (Richter 2000)[35]. Resulta pues una corrección relativista (positiva) de los ángulos del orden de $10^{-8\prime\prime}$, o sea, todavía cuatro órdenes de magnitud por debajo del efecto de no esfericidad calculado por Gauss en las *Disquisitiones circa superficies curvas*, aplicando el teorema de Legendre generalizado.

Nada de esto era previsible *a priori* en los comienzos del siglo 19. Si hubiera resultado de otra manera, si Gauss hubiera encontrado una desviación significativa de la suma angular, naturalmente habría hecho falta mucho más que *una* sola estimación para *un único gran* triángulo. La aparición de un efecto tal, que Gauss no pudo excluir *a priori* hasta 1823/24, habría sido solo el preludio de un nuevo proyecto más amplio de medición de la curvatura espacial. Restaría discutir las mejoras en la medición de datos terrestres, en la elección de puestos de observación adecuados para "grandes" triángulos y en la determinación de sus coordenadas, en la exclusión de efectos atmosféricos, en los métodos de medición aplicados a los ángulos, etc., que se hubieran necesi-

combinationis", con respecto a la compensación de todos los triángulos principales de las mediciones de 1821 a 1823 (Gauss Olbers, II, 260).

[35]Agradezco a Breitenberger el haberme indicado esta referencia.

tado en el marco de ese proyecto ficticio de “medición terrestre de la curvatura espacial”[36]. Pero es un falso argumento decir que todo esto hubiera resultado metodológicamente imposible; y tampoco ayuda mucho que individuos de generaciones posteriores, más sabios, agiten la cabeza diciendo que alguien de la estatura de Gauss no podía bajo ningún concepto buscar a escala terrestre –y no a escala astronómica– posibles efectos de la curvatura; esto pasa por alto la situación histórica de los años 1820, cuando no existían datos de paralaje dignos de crédito, y no podía saberse cuándo estarían disponibles.

Las mediciones (terrestres) del propio Gauss fueron, entre 1823 y 1838, los datos más fiables para la determinación empírica de una cota superior al valor de la curvatura espacial o una cota inferior

$$C > 5R \approx 10^4 km.$$

Como hemos mostrado, basta un simple cálculo de tres líneas, fácil desde el punto de vista de los métodos de Gauss, para poner la estimación gaussiana de dicha cota trasmitida por Sartorius en la forma de la ecuación (4).

También resulta fácil comprender por qué las afirmaciones de Gauss acerca del orden de magnitud de la constante de la GNE (y, por tanto, de la curvatura espacial) variaron durante la valoración de los datos de la campaña de medición de Hannover, y cambiaron definitivamente a partir de mediados de los años 1820. En un principio Gauss tenia la expectativa de que la no-euclideanidad debería percibirse, al menos, al nivel astronómico. Así se expresó en una carta a Gertling del 16 de marzo de 1819, discutiendo criticamente unos pasajes del abogado Schweikart[37]. Schweikart hipotéticamente asumió que el radio de la curvatura C (expresándonos en terminología moderna) de la GNE era idéntico al semi-radio de la tierra, $C = R/2$. Gauss protestó y comentó a Gerling:

> “ ... pues aunque soy muy capaz de pensar en la incorrección de la geometría de Euclides, de acuerdo con nuestras observaciones astronómicas la constante citada debería ser muchísimo mayor [unermesslich viel grösser] que el radio terrestre”. (Gauss *Werke*, VIII, 182)

La campaña de mediciones del grado en el reino Hannover ofrecia a Gauss la ocasión de comprobar empíricamente esta expectativa. Así no parece una casualidad que, exactamente durante el trabajo de evaluacion de datos de esta campaña, Gauss admitiese la posibilidad hipotética de una comprobación empírica de la geometría mediante mediciones terrestres en la carta a Taurinus que tantas veces hemos citado. Esta carta es de noviembre de 1824, un año

---

[36] A esto hay que añadir, claro, que bajo el supuesto ficticio de que el efecto de la curvatura espacial fuera observable, la desviación de las sumas angulares hubiera sido *positiva*.

[37] Agredezco a R. Torretti y J. Ferreiros por llamarme la atención sobre esta carta y sobre la necesidad de precisar en este punto de mi discusión con respecto a la versión original de este articulo en la *Schneider Festschrift*.

después de la medición del triángulo BHI, pero todavía durante los trabajos de cálculo[38].

Una vez concluidas las estimaciones, Gauss sabía más. Ahora su estimación general, ya expresada en la carta citada a Gerling de 1819, estaba fundada empíricamente y con una cota inferior a dicha constante. En el verano de 1831 escribía en una exposición –muy detallada para lo habitual en él– de sus opiniones sobre la GNE a H. C. Schumacher, en relación a aquella "constante" (ahora llamada κ):

> κ [es] una constante ... de la que sabemos por la experiencia que debe ser inmensamente grande frente a todo lo que podemos medir. En la geometría de Euclides se hace infinita. (Gauss *Werke*, VIII, 215; citado según Reichardt 1976, 35)

A la luz de la evidencia que hemos reunido aquí, se trata, bajo las diferentes formulaciones en que Gauss considera la posibilidad de comprobar empíricamente la "constante", no de una indecisión suya, como a veces se ha afirmado, sino de diferencias bien formuladas que revelan un desarrollo en el tiempo de aquello que Gauss podía considerar conocido con seguridad.

Es obvio que esto vale también para el giro hacia mediciones astronómicas para determinar la curvatura. A fines de los años 1820 estaba claro para él que la constante $|k|$ se hallaba por debajo de lo estimable por medio de mediciones "sobre la Tierra" (léase mediciones geodésicas). Era natural que dirigiera su mirada con más intensidad hacia las posibilidades de comprobación astronómica. Lo problemático era que, al observar directamente la aberración de la luz, se produce (por influencia del movimiento terrestre sobre el vector dirección del rayo incidente) un cambio de posición aparente más fuerte (en el orden de magnitud de $1''$) que el propio efecto de paralaje trigonométrico (cuyo orden de magnitud es $\leq 0,1''$). A pesar de este problema, resaltado ya por J. Bradley en 1729, a comienzos del siglo 19 hubo varios anuncios de "mediciones de paralaje" en el orden de $1''$, que fueron considerados discutibles, con razón, por los astrónomos. Para Gauss eran todos indiscutiblemente incorrectos. La situación se modificó sólo en el año 1838, con el éxito de F. W. Bessel al determinar la paralaje de 61 Cygni por relación a otras dos estrellas cercanas $(0,314'' \pm 0,02)$. Pronto siguieron otras mediciones de paralaje (estables) según el mismo método, de W. Struve y T. Henderson, entre otras estrellas para α Centauri (unos $0,6''$)[39].

Lobachevskii había estimado ya la curvatura espacial en 1830, con un argumento idealizado pero bien fundado teóricamente. Sin embargo, al hacerlo

[38] Las mediciones de la red todavía estaban en curso durante todo el año 1824, las estimaciones fundamentales se obtuvieron ya en enero de 1825 (Gauss a Schumacher, 7 de enero de 1825), los cálculos de compensación fueron culminados en mayo de 1825 (carta a Olbers, 14 de mayo de 1826); véase (Gerardy 1955, 100–103).

[39] Ver (North 1997, 254, 279).

se basó en una de esas “observaciones de paralaje” problemáticas (de $1,24''$ para Sirio)[40].

Sabemos que Gauss comenzó a estudiar los trabajos de Lobachevskii hacia 1841, tras haber empezado a estudiar ruso en 1838. Es pues muy posible, e incluso habría que asumirlo dado su interés en el asunto, que haya conocido las correspondientes reflexiones de Lobachevskii en los años 1840. Dadas las nuevas condiciones empíricas en la medición de paralajes, desde 1838 se daban todas las circunstancias para tratar el problema de la curvatura del espacio de una manera nueva y precisa mediante mediciones astronómicas. De nuevo existe un testigo, esta vez B. Listing, que nos ha dado informes de cómo Gauss habló de esta cuestión durante los años 1840 en su seminario[41]. En estos años, mencionar una posible determinación de la curvatura por medio de mediciones terrestres ya no tenía ningún sentido.

Probablemente Bernhard Riemann supo de este nuevo planteamiento del problema de estimar la curvatura mediante mediciones de paralaje, bien directamente de su esquivo maestro, bien indirectamente a través de personas de su círculo. Lo cierto es que en su lección de habilitación (1854) ofreció un argumento breve pero muy pregnante respecto a la estimación de la curvatura según mediciones astronómicas. Esto es lo que escribió:

> Supuesto que los cuerpos existen independientemente de la posición, la medida de curvatura es en todas partes constante, y entonces se sigue de las mediciones astronómicas que no puede ser diferente de cero; en todo caso, su valor recíproco debería ser un área frente a la cual la región accesible a nuestros telescopios tendría que resultar despreciable. (Riemann 2000, 15–16)

Haciendo una reconstrucción natural[42], Riemann aplicó a observaciones astronómicas la misma idea que Gauss había empleado en la estimación a partir de mediciones terrestres, sólo que con mejores fundamentos teóricos gracias a su geometría de las variedades (riemannianas). Obtuvo así una cota que indicó sólo de forma verbal, pero bien precisa. K. Schwarzschild volvió a obtener esta estimación de manera independiente y con un argumento algo diferente, pero con idéntico resultado para el caso hiperbólico: $r > 4\Delta 10^6$ radios de la *órbita* terrestre (siendo r el “radio” de la curvatura espacial) (Schwarzschild 1900, 345). Los cálculos a partir de las paralajes astronómicas arrojaban pues estimaciones del radio de curvatura que superaban la acotación de Gauss en el orden de 10 magnitudes (¡disminuyendo la “constante” gaussiana $C = |\kappa|$ en 20 órdenes de magnitud!). Vistos desde esta perspectiva, es natural que los

[40](Lobatchevskii 1829-1830/1898, 22s.); véase (Daniels 1975).

[41]Listing sólo informó del asunto oralmente a sus estudiantes, contándoles sus recuerdos en los años 1870 (Hoppe 1925). Hay que agradecer a Breitenberger que haya vuelto a recordar esta información (Breitenberger 1984, 289).

[42]Una publicación mía sobre este tema está en preparación.

resultados de las mediciones de Gauss en los años 1820 parecieran totalmente obsoletos. Pero es obvio que esto no podía saberse de antemano.

Se abría ahora un nuevo capítulo en la historia de la determinación empírica de la estructura métrica del espacio, en una situación aun totalmente prerelativista. Sin embargo, según la opinión de M. Schemmel, las consideraciones de Schwarzschild sobre la GNE en la astronomía (Schwarzschild 1900) fueron un preparativo para su rápida admisión de la teoría de la relatividad –excepcional entre los astrónomos– y su colaboración en el asunto dieciséis años más tarde (Schwarzschild 1916a, 1916b). Así pues, parece haber conexiones históricas indirectas entre las reflexiones sobre la determinación empírica de la estructura espacial en el siglo 19 y las de la teoría de la relatividad general, si bien por vías muy distintas de las que A. Miller creyó en su día que debía suponer.

Apéndice: Sobre la fundamentación de la consideración 4

Si designamos con ν el ángulo de inclinación del plano del triángulo Δ $\hat{B}\hat{H}\hat{I}$ en el punto $\hat{B}$ respecto a la normal al geoide, el ángulo $\hat{\beta}$ en el triángulo inclinado y el ángulo β proyectado sobre el plano tangente están en la relación

$$\tan(\beta/2) = \frac{\tan(\hat{\beta}/2)}{\text{sen}\nu}.$$

Empleando las abreviaturas

$$C := 1/sen\nu, \quad z_0 := \hat{\beta}_0, \quad h := \Delta\beta, \quad z = z_0 + h = \hat{\beta}$$

obtenemos

$$\beta(z) = 2\text{arctan}(c\text{tan}z/2).$$

Un desarrollo en serie en torno a z_0 nos da, para $\beta_0 = 2\text{arctan}(c\text{tan}z_0/2)$:

(5)

En el “gran” triángulo de Gauss, ν difiere en menos de $0,5^{\text{o}}$ de un ángulo recto; c es distinto de 1 sólo en el orden de magnitud de 10^{-5}. El coeficiente del término lineal en el desarrollo en serie es, por tanto, con muy buena aproximación $c \approx 1$.

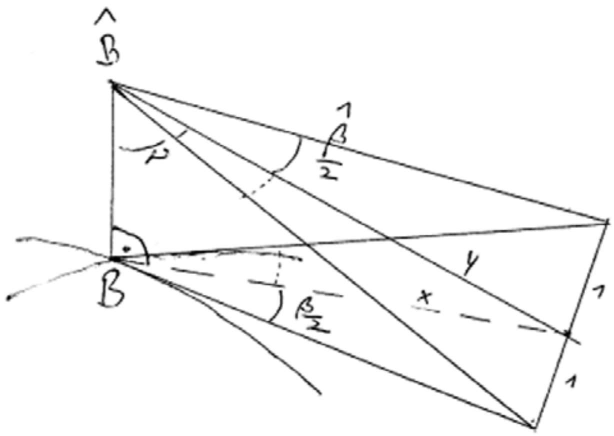


Figura 2: Ángulos en el triángulo geodésico y el triángulo lumínico.

REFERENCIAS

[1] ERNST BREITENBERGER, Gauss's geodesy and the axiom of parallels, *Archive for History of Exact Sciences* **31** (1984) 273–289.

[2] N. DANIELS, Lobachevsky, some anticipations of later views on the relation between geometry and physics, *Isis* **66** (1975) 75–85.

[3] P. DOMBROWSKI, Differentialgeometrie - 150 Jahre nach den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" von Carl Friedrich Gauß. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* **27** (1978) 63–102.

[4] CARL FRIEDRICH GAUSS, "Disquisitiones generales circa superficies curvas", *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis* **6** (1828) 99–146. En *Werke* **IV**, 217–258. Versión alemana de A. Wangerin, Allgemeine Flächentheorie Leipzig, Engelmann, 1889.

[5] CARL FRIEDRICH GAUSS, WILHELM OLBERS, *Werke Ergänzungsreihe IV Briefwechsel C.F. Gauss - H.W.M. Olbers*. Göttingen, Akademie der Wissenschaften, 1909. Reimpreso en Hildesheim, Olms, 1976.

[6] CARL FRIEDRICH GAUSS, *Werke. 12 Bände*, Göttingen, Akademie der Wissenschaften, 1863-1927. Reimpreso en Hildesheim, Olms, 1973.

[7] THEO GERARDY, "Die Triangulation des Königreichs Hannover durch C.F. Gauß (1821-1844)." En *C.F. Gauß und die Landesvermessung in Niedersachsen*, Hrsg. Niedersächsische Vermessungs und Katasterverwaltung, Hannover, 1955, pp. 83–114.

[8] HELMUTH GERICKE, "Gauß und die Grundlagen der Geometrie." En Schneider 1981, 113–142.

[9] George Goe, Comment on Miller's "The myth of Gauß' experiment on the Euclidean nature of physical space", *Isis* **65** (1974) 83.

[10] J. Gray, *Ideas de espacio*. Madrid, Mondadori, 1992.

[11] Edmund Hoppe, C.F. Gauss und der euklidische Raum, *Die Naturwissenschaften* **13** (1925) 743–744.

[12] Hans Kienle, Hugo von Seeliger, *Die Naturwissenschaften* **13** (1925) 613–619.

[13] Nikolai I. Lobatchewskii, "O natschalach geometrij", *Kasanskij Vestnik* **25-28** (1829-30). Traducción alemana, F. Engel: "Ueber die Anfangsgründe der Geometrie" en *Zwei geometrische Abhandlungen*. Teubner, Leipzig, 1898, pp. 1–66.

[14] Arthur Miller, "The myth of Gauß' experiment on the Euclidean nature of physical space", *Isis* **63** (1972) 345–348.

[15] Arthur Miller, "Reply" [a (Goe 1974, van der Waerden 1974)], *Isis* **65** (1974) 86ss.

[16] John D. North, *Historia Fontana de la astronomía y la cosmología*. Traducción española de *The Fontana History of Astronomy and Cosmology* (1997). FCE, México, 2001.

[17] Karin Reich, "Geodäsie und Differentialgeometrie." En (Schneider 1981, 85-112).

[18] Hans Reichardt, *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1976.

[19] Peter Richter, "Positive und negative Krümmungen im Gaußschen Dreieck", *Mitteilungen Gauss-Gesellschaft Göttingen* **37** (2000) 17–26.

[20] Bernhard Riemann, *Riemanniana Selecta*, J. Ferreirós ed. CSIC (colección Clásicos del Pensamiento), Madrid, 2000.

[21] Wolfgang Sartorius von Waltershausen, *Gauß zum Gedächtnis*, Hirzel, leipzig, 1856. Reimpresión Sändig, Weisbaden, 1956.

[22] Matthias Schemmel, "An astronomical road to general relativity: The continuity between classical and relativistic cosmology in the work of Karl Schwarzschild", En J. Renn, M. Schemmel, *The Genesis of General Relativity*, vol. 3. Kluwer, Dordrecht, 200. También *preprint* del Max-Planck-Institut für Wisschenschafts-geschichte Berlin, 2002.

[23] Ivo Schneider (ed.), *Carl Friedrich Gauß (1777-1855): Sammelband von Beiträgen zum 200. Geburtstag von C.F. Gauß*, Minerva, München, 1981.

[24] Erhard Scholz, "Gauß und die Begründung der "höheren" Geodäsie", En *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, D. Rowe, C.J. Scriba, S. Demidov, M. Folkerts eds., Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 631–647.

[25] Karl Schwarzschild, Ueber das zulässige Krümmungsmaass des Raumes. *Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft Leipzig* **35** (1900) 337–347.

[26] KARL SCHWARZSCHILD, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften* (1916) 189–196.

[27] KARL SCHWARZSCHILD, Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften* (1916) 424–434.

[28] PAUL STÄCKEL, C. F. Gauß als Geometer. In *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von C.F. Gauß*, eds. M. Brendel, F. Klein, L. Schlesinger. Number Heft 5 Leipzig, 1918.

[29] BAARTEL L. VAN DER WAERDEN, Comment II [sobre (Miller 1972)]. *Isis* 65 (1974) 85.

Erhard Scholz
Mathematik
Universität Wuppertal
D-42097 Wuppertal
Alemania
Correo electrónico: `scholz@math.uni-wuppertal.de`