quent généralement aux courbes unicursales de degré quelconque, courbes de degré m, ayant un point multiple d'ordre $(m-1)$. Par exemple les quartiques unicursales peuvent, en général, et sauf des exceptions faciles á formuler, se déduire de deux coniques, á la maniére des conchoïdales.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

En estas consideraciones fundó Brianchon la teoría de los polos, que desarrolló (según indica en una nota de la memoria que estamos diseñando) en el cuaderno 13 del *Journal de l'École Polyctenique*, 1806. Suponiendo dos triángulos abc y ABC tales, que uniendo los vértices a y A, b y B, c y C sus intersecciones concurran en un punto S; para demostrar que las intersecciones de ab y AB, bc y BC, ac y AC concurren en los puntos P, R, Q, situados en línea recta (lám. I, fig. 2), le basta la consideración del exágono $MbBNcCM$ (M y N son las intersecciones de AC y ab, de AB y ac prolongadas) (') pues encontrándose Mb y Nc, bB y cC, BN y CM en los puntos a, S, A, que por hipótesis están en línea recta, también el exágono $MbcNBCM$ ('') tendrá la misma propiedad, es decir, que las intersecciones P, R y Q de los lados Mb y NB, bc y BC; cN y CM también estarán en línea recta, y la correlación de los dos exágonos establece la propiedad recíproca, de manera que: *cuando dos triángulos se hallan colocados de modo que combinando cada lado del primero con los del segundo para obtener sus puntos de intersección, éstos se encuentran en una alineación, si se unen con rectas, dos á dos, los vértices opuestos á los lados así combinados, y en el mismo orden, dichas rectas, en número de tres, concurrirán en un punto.*

También, como observa Brianchón, las rectas trazadas desde un punto á los vértices de un triángulo situado en el mismo plano permiten representar un cuadrilátero con sus diagonales, determinando este sistema sobre una transversal arbitraria seis puntos ligados por las siete relaciones fundamentales, y al deformarse el triángulo de modo que cinco de estos puntos queden fijos, el sexto no cambiará de situación.

(') Para sencillez, siguiendo el orden de las letras, podemos llamar á los lados Mb, bB, etcétera, 1, 2, etc., y los lados Mb y Nc serán 1 y 4, etc.

('') En este caso Mb y NB que se encuentran en P son los lados 1 y 4, bc y BC son 2 y 5, cN y CM son 3 y 6.

Cuando los puntos X é Y, así como los U y Z del cuadrilátero arriba considerado se reunen en uno solo, (lám. I, figs. 1 y 5) las siete relaciones se reducen á cuatro, coincidiendo los puntos C y D de la figura primitiva, en la que el cuadrilátero $UZYX$ ha desaparecido, obteniéndose un triángulo circunscrito THE tangente en U y X, y resulta que: *si se deforma una cónica sujeta á pasar por dos puntos conocidos* (A. B) (lám. I, fig. 5) *y á tocar á las dos rectas* (TU, TX) *dadas en posición, la cuerda de contacto* (UX) *girará sobre un punto fijo* C.

Además, (lám. I, fig. 5) este punto fijo se halla determinado por dichas ecuaciones, que son de segundo grado y dan dos puntos C, K, ligados por la proporción $\frac{EC}{EK}=\frac{FC}{FK}$ ó $\frac{AC}{AK}=\frac{BC}{BK}$ (cuando el punto K se halla en el interior de la cuerda AB, se obtiene por la intersección de ésta con la cuerda UV que une el punto de contacto U al V del triángulo circunscrito THE). Pero si se hace ahora variar las dos tangentes que pasan por los puntos E y F, girando alrededor de éstos, las ecuaciones no variarán, ni por consiguiente los puntos C y K, y entonces todas las cónicas obtenidas sobre la cuerda AB forman dos sistemas distintos, de modo que en el primero, las cuerdas de los contactos oscilan alrededor del punto C y en el segundo, alrededor del punto K (figs. 5 y 6). Teniendo, pues, en una recta los cuatro puntos A, B. E, F, (figs. 6 y 7) y los dos puntos de construcción C, K determinados por las fórmulas fundamentales, si se trazan desde los puntos E, F pares de tangentes que tocan á la curva en pares de puntos X y V, U y W, las cuerdas de contacto UX y VW se cruzarán en uno de los puntos C, K y las otras dos UV y XW en el otro. Estos dos pares de tangentes forman un cuadrilátero completo cuyas tres diagonales se cortan en C, K, c, puntos de los cuales solo el c varía con la curva, y se encuentra en la intersección de las cuerdas de contacto UW y XV. Si ahora suponemos fijos los dos pares de tangentes, (figuras 6 y 7) y deformamos la curva de manera que permanezca tangente á aquéllas, los dos pntos A, B, variarán conservando la relación

$\dfrac{AC}{AK} = \dfrac{BC}{BK}$ anteriormente establecida, y las seis cuerdas de contacto UX, VW, etc., girarán dos á dos alrededor de los tres puntos fijos C, K, c determinados por las tres diagonales del cuadrilátero circunscrito. Pero en virtud de la teoría de los *polos*, en un cuadrilátero inscrito $UXVW$ cada uno de los puntos C, K, c, es el polo de la recta que une los otros dos; luego *en todo cuadrilátero completo circunscrito á una cónica, cada una de las tres diagonales, es la polar del punto de intersección de las otras.*

Esto conduce inmediatamente á la determinación de las cónicas por medio de la regla ó alineaciones, según el propósito de Brianchón, en su célebre Memoria, que es un hermoso ejemplar de la geometría de la regla, pues si las tres diagonales del cuadrilátero circunscrito se encuentran en C, K y c (fig. 8), y se traza una cuerda ux que tienda hacia uno de éstos C, y por los extremos u, x se trazan á uno de los polos x, por ejemplo, rectas, que encontraran á la curva en los puntos u, w respectivamente, los tres puntos C, V, W se hallarán alineados, y las rectas uw, xu concurrirán en el tercer polo c.

Ahora, determinando los cuatro puntos u, x, v, w seis cuerdas que tienden, dos á dos, hacia uno de los tres puntos fijos C, K, c, en virtud de la propiedad de los polos, cada una, ux, de estas cuerdas se hallará dividida armónicamente por su punto C y por la polar Kc, de manera que las dos rectas trazadas desde los puntos u, x á los extremos de una de las diagonales que concurren en C, se cortarán en Kc, y conociendo uno solo de los cuatro puntos u, x, v, w, se determinarán los otros tres por simples intersecciones de líneas rectas.

Por otra parte, si por ejemplo u coincide con uno de los puntos B en que la curva está cortada por una de los tres diagonales del cuadrilátero completo, el punto w concurrirá también con B, y x, v se confundirán con el segundo punto A en que ésta diagonal corta á la sección cónica, cruzándose las tangentes en B y A en el punto c de intersección de las otras diagonales. En fin, si se deforma una cónica sujeta á tocar cuatro rectas cualesquiera, las seis cuerdas de contacto, varían girando dos á dos sobre los tres puntos fijos determinados por las intersecciones de las diagonales del cuadrilátero completo que forman los cuatro tangentes dadas; luego, si por una condición cualquiera, una sola de estas seis cuerdas se hubiese fijado, las demás también lo estarían, obteniéndose los cuatro puntos de contacto por simples in-

tersecciones de líneas rectas, como sucedería en el problema: *inscribir en un cuadrilátero dado una cónica tal, que la cuerda de contacto de dos lados determinados, pase por un punto conocido*, problema que se construye con la regla solamente.

No vamos á enunciar la serie de problemas que se resuelven en la Memoria de Brianchón, como por ejemplo, *describir una cónica de la que se conocen cinco puntos*, cuya solución se halla basada en las ecuaciones fundamentales; *circunscribir á un pentágono dado una cónica*, cuya solución se funda en determinar un sexto punto por medio del exágono inscrito. Lo indicado basta para formarse idea de la importancia que tiene esta breve síntesis hecha con elegancia y unidad de método de la doctrina desenvuelta hoy en los tratados llamados de Geometría moderna, proyectiva ó superior, y tendrá mayor importancia para nosotros por cuanto esta Memoria va á presentársenos como el gérmen sobre el que se han desenvuelto los trabajos más importantes de los geómetras á quienes se debe la evolución realizada en esta rama de la Matemática, durante la primera mitad de este siglo. Y con frecuencia será necesario el recordar algunas de estas páginas, al dar idea de vastísimos desarrollos fundados en los solos principios que guiaron á Brianchón, no sin manifestar que además de esta célebre Memoria, debe citarse como otro timbre de gloria para este esclarecido geómetra, á saber, su importante trabajo insertado en el cuaderno XII del *Journal de l'École Polytecnique*, donde estableció, basándose en el principio de Pascal, toda la teoría de los polos y de las polares de las secciones cónicas.

(Se continuará).

ALGEBRA AN ELEMENTARY TEXT-BOOK

by G. Chrystal, profesor in the University of Edinburgh

(CONTINUACIÓN)

Después de exponer las transformaciones fundamentales de las funciones enteras, para llevar más adelante los procedimientos com-