PAPIROFLEXIA Y MATEMÁTICAS

Concurso del verano de 2010 de divulgamat.net

Ángel Fernando Ruiz González

angelfrg@hotmail.com

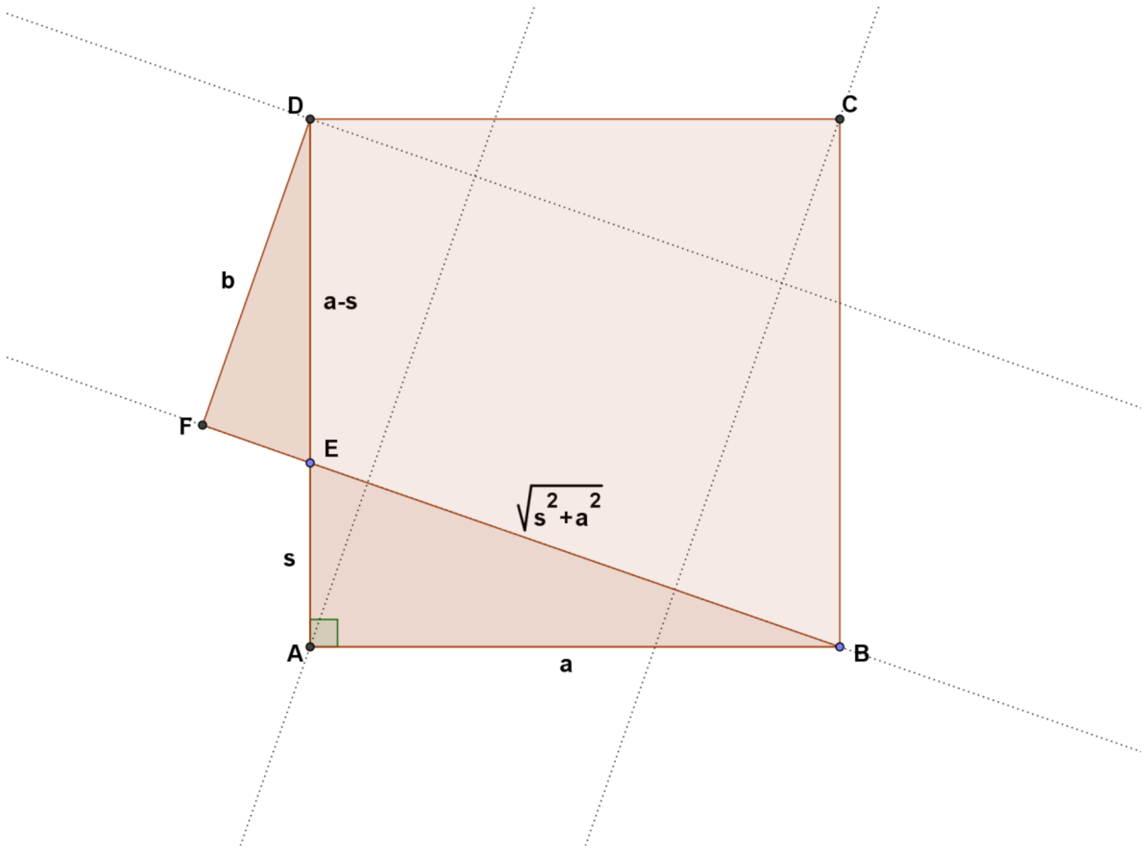
03/08/2010

Doblando cuadrados

Consideraremos dos cuadrados en las condiciones que nos indica el enunciado del problema, de lados **a** y **b** (**a>b**), cuyas áreas son $\mathbf{a^2}$ y $\mathbf{b^2}$ respectivamente. Suponemos también que la relación que existe entre estas áreas es **n** que puede tomar los valores de 2, 3 y 4 para obtener los valores x', x'' y x''' respectivamente.

$$\frac{a^2}{b^2} = n$$

Nos proponemos encontrar qué relación existe entre el segmento **AE** (que denotamos **s**) y la relación entre las áreas **n**. Para ello consideremos los triángulos semejantes **ABE** y **DEF.**



Por el teorema de Thales:

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BE}{ED} \implies \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a - s}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{s^2 + a^2}{(a - s)^2} \implies n = \frac{s^2 + a^2}{(a - s)^2}$$

Operando obtenemos la siguiente ecuación de 2º grado:

$$s^2 - \frac{2n}{n-1}\,as + a^2 = 0$$

Cuya solución será:

$$s = \mathrm{a}\,\frac{\mathrm{n} \pm \sqrt{n^2 - (\mathrm{n}-1)^2}}{\mathrm{n}-1}$$

Como **s** tiene que ser menor que **a** nos quedaremos con la solución:

$$s = a\,\frac{\mathrm{n} - \sqrt{n^2 - (\mathrm{n}-1)^2}}{\mathrm{n}-1}$$

Para que esta solución no dependa del lado del cuadrado dividimos por **a**, y obtenemos la siguiente relación.

$$\sigma(n) = \frac{\mathrm{n} - \sqrt{n^2 - (\mathrm{n}-1)^2}}{\mathrm{n}-1}$$

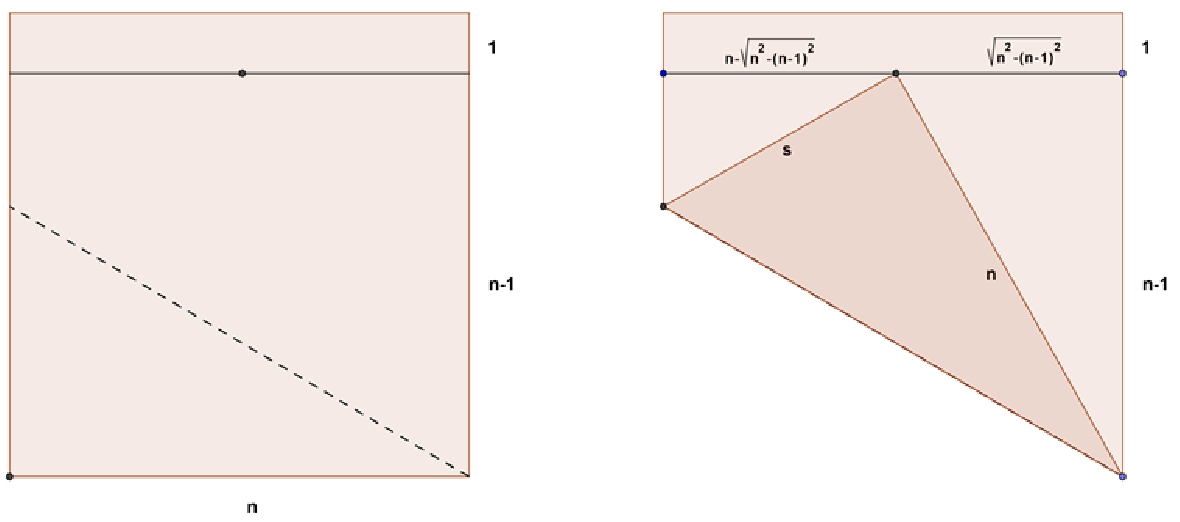
Ya tenemos una expresión general.

El problema está ahora en encontrar estas cantidades mediante origami.

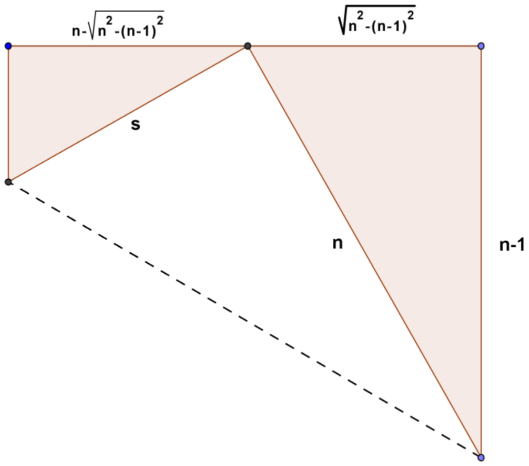
Vamos a seguir trabajando de forma general y al final particularizaremos. El primer problema que encontramos es cómo representamos $\sqrt{n^2 - (\mathrm{n}-1)^2}$.

Observamos que la expresión de la raíz la podemos obtener del cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea **n** y el otro cateto **n-1**.

Para ello consideremos un cuadrado de lado **n** y doblamos como la figura:



Nos fijamos en que volvemos a tener dos triángulos semejantes, por lo que volveremos a aplicar el teorema de Thales.



$$\frac{s}{n} = \frac{\mathrm{n} - \sqrt{n^2 - (\mathrm{n}-1)^2}}{\mathrm{n}-1}$$

Y obtenemos que la relación entre **s** y el lado del cuadrado sea σ(n).

Tenemos, por tanto, resuelto nuestro problema.

n	σ(n)
2	$\frac{2-\sqrt{3}}{1}$
3	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
4	$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$
5	$\frac{5-\sqrt{9}}{4}$

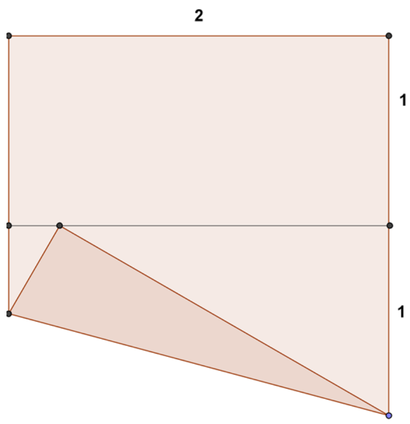
Comprobamos que para n=5 el resultado es ½, como se nos decía en el encunciado del problema.

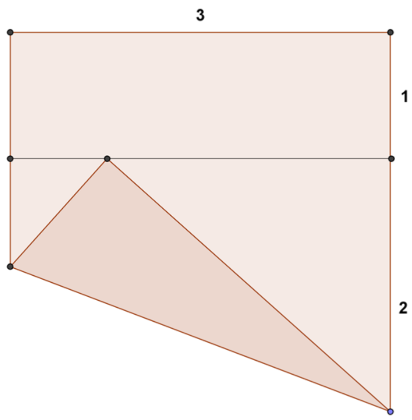
Podemos observar la construción en los anexos:

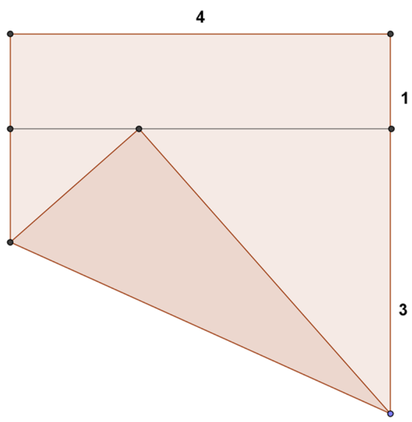
Anexo I: Area del cuadrado interior mitad del exterior.

Anexo II: Area del cuadrado interior un tercio del exterior.

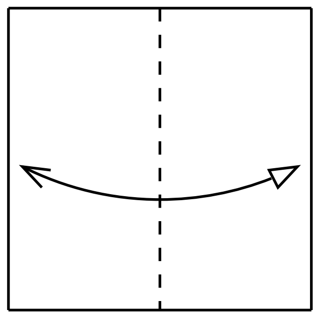
Anexo III: Area del cuadrado interior un cuarto del exterior.



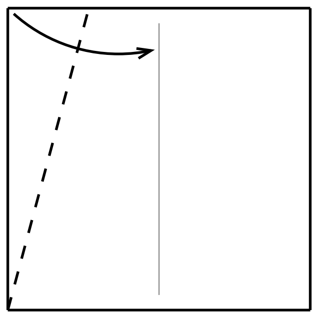




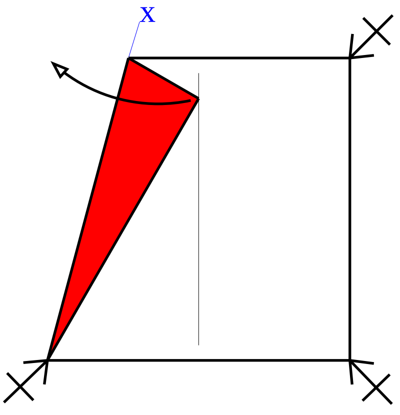
Anexo I



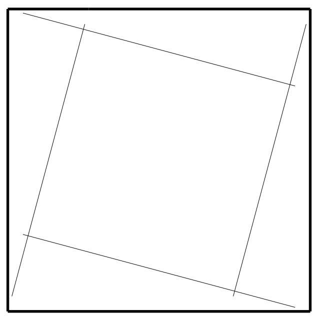
1- Doblar el cuadrado por la mitad



2- Colocamos uno de los vertices sobre la cicatriz obtenida de forma que el doblez pase sobre otro de los vertices

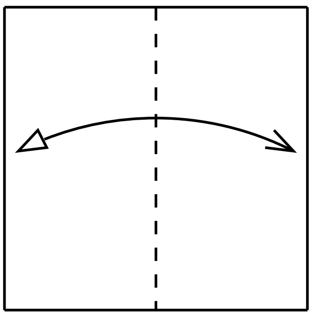


3- Ya tenemos x.
Repetir en los otros tres vertices...

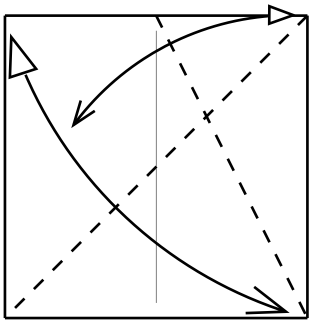


4- ...para obtener el cuadrado

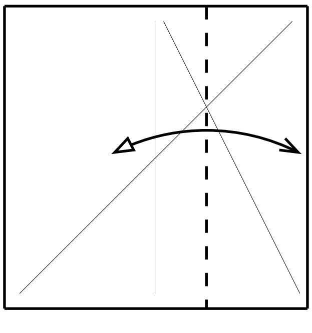
Anexo II



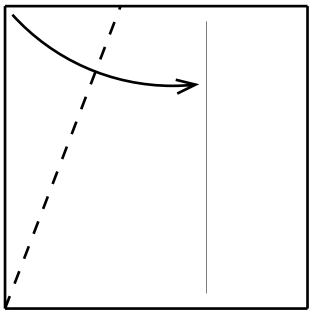
1- Doblar el cuadrado por la mitad



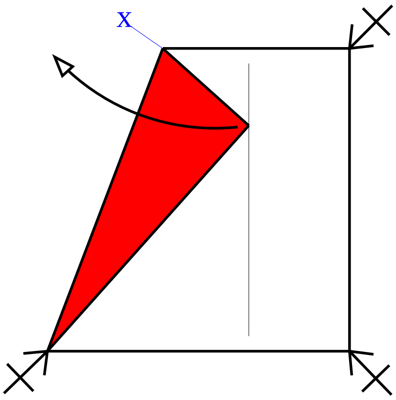
2- Doblar por una diagonal y desde el centro del lado al vertice



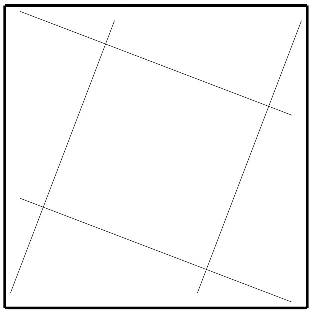
3- Y obtenemos un punto que divide el cuadrado en tres partes



4- Colocamos uno de los vertices sobre la cicatriz obtenida de forma que el doblez pase sobre otro de los vertices

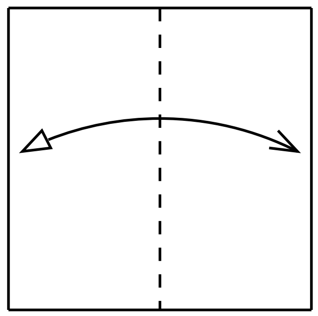


5- Ya tenemos x.
Repetir en los otros tres vertices...

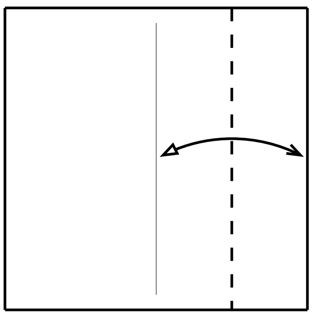


6- ...para obtener el cuadrado

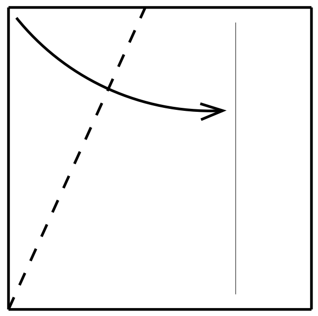
Anexo III



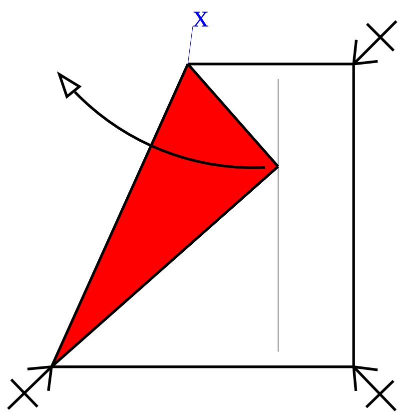
1- Doblar el cuadrado por la mitad...



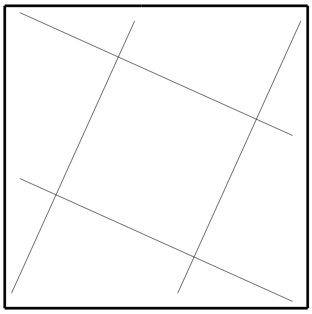
2- ... y la mitad por la mitad



3- Colocamos uno de los vertices
sobre la cicatriz obtenida de
forma que el doblez pase sobre
otro de los vertices



4- Ya tenemos x.
Repetir en los otros tres vertices...



5- ...para obtener el cuadrado