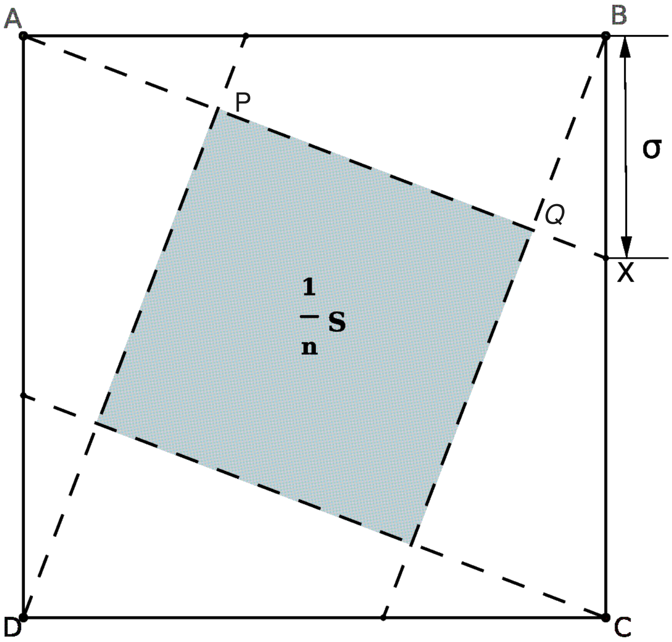
SOLUCIÓN DEL CONCURSO DE VERANO 2010
DOBLANDO CUADRADOS

Mª Paz Carbajo Gibaja

Vamos a buscar un método para encontrar los puntos *X* de la construcción propuesta, tales que dejen en el centro un cuadrado de superficie $s=\frac{1}{n}\cdot S$, donde $n\in\mathbb{N}$ y *S* es la superficie del cuadrado inicial (que consideraremos la unidad).



Si $\overline{AB}=1$; $\overline{BX}=\sigma<1$ se puede demostrar fácilmente que la superficie del cuadrado central es $\boxed{s=\frac{(1-\sigma)^2}{1+\sigma^2}}$:

$\overline{AX}=\sqrt{1+\sigma^2}$ Los triángulos *ABX* y *BQX* son semejantes con razón de semejanza $r=\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$

$$\overline{BQ}+\overline{QX}=(1+\sigma)\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{1+\sigma^2}-\frac{(1+\sigma)\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}=\frac{1-\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}$$

Si queremos que $s=\frac{1}{n}S$ se deberá cumplir que:

$\frac{(1-\sigma)^2}{1+\sigma^2}=\frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow$ $(n-1)\sigma^2-2n\sigma+(n-1)=0$. Teniendo en cuenta que $0<\sigma<1$, entonces esta ecuación sólo tiene una solución $\boxed{\sigma_n=\frac{n-\sqrt{2n-1}}{n-1}}$ que localiza de forma unívoca los puntos *X* para los distintos valores de n:

$n=2 \Rightarrow \sigma_2=2-\sqrt{3}$

$n=3 \Rightarrow \sigma_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$n=4 \Rightarrow \sigma_4=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

$n=5 \Rightarrow \sigma_5=\frac{1}{2}$

$n=6 \Rightarrow \sigma_6=\frac{6-\sqrt{11}}{5}$

$n=7 \Rightarrow \sigma_7=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$, *etc...*

La gran mayoría de los valores de σ_n son irracionales (el siguiente σ racional ocurre para $n=13$)

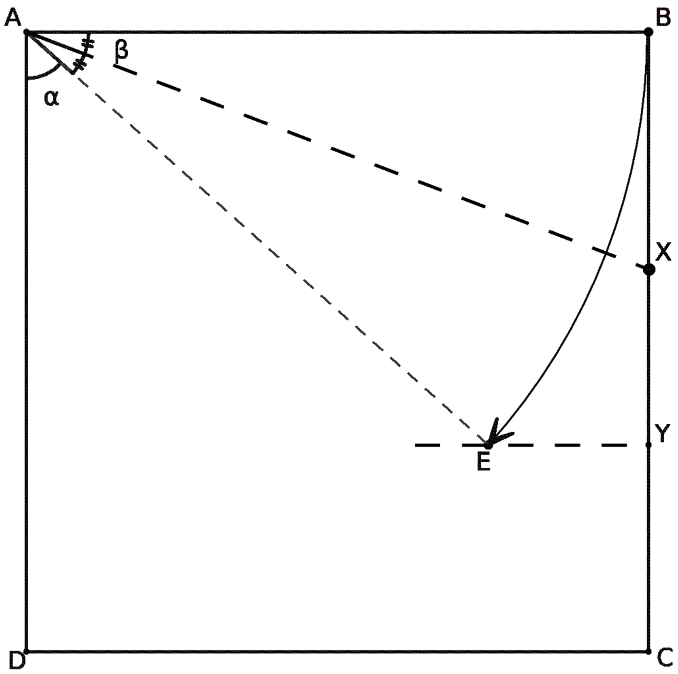
La pregunta es la siguiente:

¿Será posible encontrar un método papiroflécctico general, que valga para cualquier valor de σ_n ?

Veamos que esto sí es posible y de manera sencillísima.

Tendremos en cuenta lo siguiente:

Llamaremos $\alpha = arctan\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{n-1}\right) \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{n-1}{n}$ y $sen\,\alpha = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$



$\overline{BC} = 1$

$\overline{BY} = \frac{n-1}{n}$

$\overline{YC} = \frac{1}{n}$

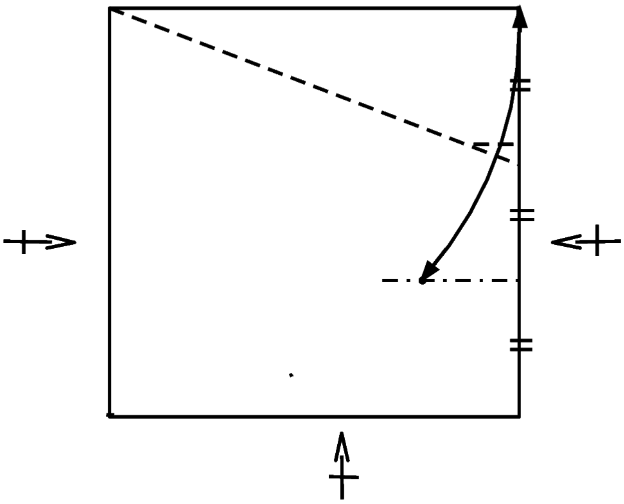
El ángulo 2β es complementario de α, por lo que $cos\,2\beta = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$ y

$$tan\,\beta = \sqrt{\frac{1-cos\,2\beta}{1+cos\,2\beta}} = \sqrt{\frac{n-\sqrt{2n-1}}{n+\sqrt{2n-1}}} = \frac{n-\sqrt{2n-1}}{n-1} \Rightarrow \boxed{\overline{BX} = \frac{n-\sqrt{2n-1}}{n-1} = \sigma_n}$$

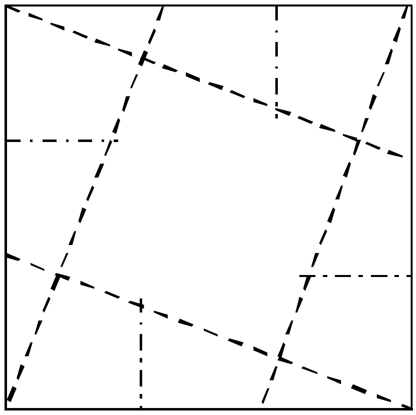
Luego, simplemente, debemos encontrar el punto *Y* que esté a distancia 1/n de *C.* Hacer una marca (no completa) perpendicular al lado $\overline{BC}$ pasando por Y. Llevar a coincidir, desde A, el punto B con esta señal, marcando el pliegue $\overline{AX}$ y repetirlo para los otros tres vértices del cuadrado inicial.

Esta solución tiene como única "dificultad" la búsqueda del punto *Y* de un lado que esté a distancia 1/n del vértice. Para ello recomiendo revisar el estupendo artículo de Juan Pedro Rubio, publicado en Divulgamat el 1 de abril de 2005: "Generalización del primer teorema de Haga"

DIAGRAMAS PARA DOBLAR EL CUADRADO DE s = 1/3

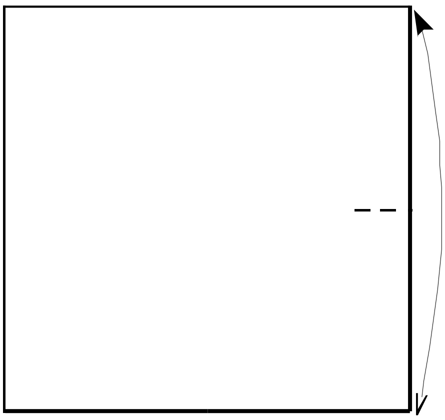


1

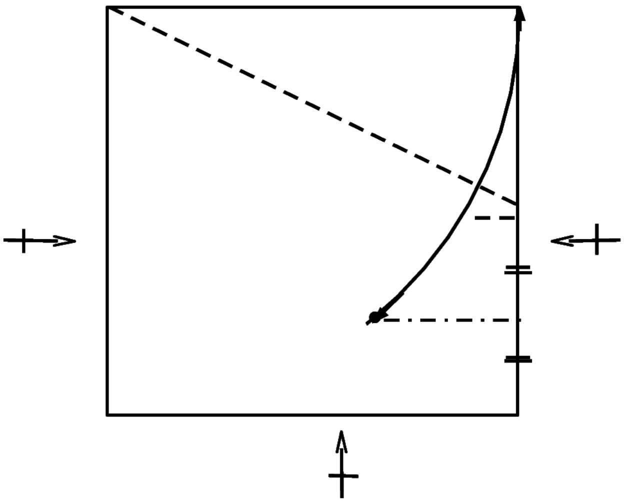


2

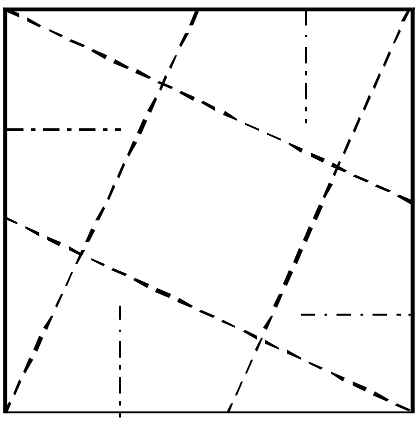
DIAGRAMAS PARA DOBLAR EL CUADRADO DE s = 1/4



1



2



3

etc. para otros cuadrados de s = 1/n