Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

Al hacerme cargo de la sección de Historia de La Gaceta de la RSME *envío un saludo a los lectores ofreciéndoles mi compromiso con la tarea que asumo, como ya hice, con todo mi agradecimiento, ante los directores cuando me formularon el encargo. La sección de Historia se mantiene, desde el primer número, gracias al impulso societario que da aliento a la revista y al buen hacer personal de quienes se han responsabilizado de dicha sección: Antonio Durán, José Ferreirós y Jesús Hernández. Continuar su tarea me estimula y exige.*

Cavaillès y Lautman: Repensar las matemáticas en torno a 1935

por

Nicasio Ledesma y José Ferreirós

París, sábado 4 de febrero de 1939. En medio de la difícil situación nacional e internacional, rodeados de perspectivas ominosas que lamentablemente no tardarán en materializarse (en septiembre se produciría la invasión de Polonia por los nazis), matemáticos y filósofos franceses continúan su tarea cotidiana. Esa mañana invernal, algunos de los mejores entre ellos se dirigen hacia el edificio de la École Normale en la rue d'Ulm para asistir a una conferencia-debate sobre *El pensamiento matemático*, en torno a «dos tesis de la más alta importancia» que se habían defendido poco antes en la Universidad de París.[1] Los autores son Jean Cavaillès y Albert Lautman, pensadores de alto nivel y gran concentración, que dejarán una honda impronta en el ámbito intelectual francés; por desgracia, los dos morirán muy pronto —a comienzos de 1944— fusilados debido a sus actividades en la Resistencia contra los alemanes.

Hacia el célebre edificio de la rue d'Ulm se dirigen no sólo filósofos como el hegeliano Hyppolite o el neokantiano Brunschvicg (director de las tesis y organizador del debate), sino matemáticos de primer orden como Élie Cartan, Maurice Fréchet,

[1] Los textos se encuentran traducidos en Cavaillès-Lautman (1989). Para mayores detalles, véase la tesis doctoral en que se basa el presente trabajo: Ledesma (2008).

Charles Ehresmann, Henri Cartan, Claude Chevalley, André Weil y Jean Dieudonné. La mayoría de ellos miembros fundadores del famosísimo Grupo Bourbaki, que por estos años había comenzado sus seminarios y la preparación de sus volúmenes, naturalmente interrumpida y aplazada por la Guerra.[2]

No es casualidad: Cavaillès y Lautmann conocen bien a estos jóvenes matemáticos. Pertenecen a su misma generación y han estudiado en la misma institución: precisamente la École Normale, donde Cavaillès ingresaba el mismo año que H. Cartan, y Lautman a la vez que Chevalley, tres años después; han asistido a seminarios juntos, y han discutido a menudo sobre las características de la «nueva matemática». Y justamente de eso se trata en la sesión del 4 de febrero: poner al día la reflexión filosófica sobre las matemáticas, a la luz de los últimos acontecimientos y las tendencias más recientes: el álgebra moderna, la topología, los estudios de lógica y fundamentos…; en una palabra, todo aquello que los Bourbaki van a intentar codificar e implantar definitivamente a través de los *Éléments de Mathématique*.

En estos últimos años se ha cumplido un siglo del nacimiento de ambos filósofos-matemáticos (1903 y 1908 respectivamente), y en breve se publicará en castellano una edición muy completa de los escritos de Lautman,[3] menos conocidos que los de su colega. Sirvan estos motivos como excusa para la publicación del presente trabajo. Con Cavaillès y Lautmann comenzó una tradición, típicamente francesa, que exigía a la filosofía de las matemáticas desarrollar sus reflexiones «al interior de las matemáticas». Como veremos, esta alta exigencia dio como fruto trabajos y reflexiones muy notables, cuyas trazas se extendieron también a la matemática misma.

1. El contorno matemático e institucional

En la época de Cavaillès y Lautman, la École Normale Supérieure era un prestigioso centro de enseñanza e investigación. Para poder ingresar en ella había que pasar unos exámenes bastante rigurosos, lo que implicaba que existía una buena selección y hacía de ella un auténtico centro de elite. Sería interminable la lista de intelectuales (tanto de humanidades como de ciencias) que han estudiado en la ENS parisina no ya desde su fundación, sino considerándola solamente desde que comenzó el siglo XX y hasta el día de hoy, porque su importancia continúa vigente.

¿Cuál es la inquietud intelectual que tienen estos jóvenes? ¿Qué les preocupa? Pues, entre otras cosas, la situación de la matemática en Francia: que la edad de oro que las matemáticas francesas vivieron alrededor de 1900 (cuando, además del genio Poincaré, trabajaban matemáticos brillantes como Picard, Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue) no ha tenido continuación. Estos matemáticos que acabamos de nombrar están centrados exclusivamente en el análisis, o sea, que sus investigaciones giraban en torno a la teoría de funciones. Aunque hay que reconocer que existe una notable excepción: se trata de Élie Cartan (el padre del futuro bourbakista Henri

[2]La fundación de «Nicolas Bourbaki» se produjo en 1935 en Besse-en-Chandesse (Puy-de-Dôme), cerca de Clermont-Ferrand, y su primera publicación (en fascículos) apareció en 1939.

[3]Esta edición está a cargo del profesor Fernando Zalamea, que ya había publicado trabajos como Zalamea (1994) y (2006).

Cartan) que trabaja en teoría de grupos, en sistemas de ecuaciones diferenciales y en geometría. Pero su obra, avanzada para su tiempo, tardará en ser reconocida.

Quizá se pudiera precisar el final de la edad de oro de las matemáticas en Francia con el final de la Primera Guerra Mundial en 1918 (aunque puede que el problema tuviera su origen antes, hacia 1860), pues en ella desapareció toda una generación de jóvenes matemáticos. Aunque no solamente el factor demográfico influyó en el declive de la matemática francesa; también tuvo que ver la rigidez de sus instituciones científicas que estaban muy centralizadas. En definitiva, que los jóvenes talentos que llegan a la École Normale en los años 1920 descubren una enseñanza anticuada, donde no se prepara a los investigadores en los grandes problemas, ni en las ideas vivas de la ciencia de su época. Respecto a los manuales que existen, por ejemplo en análisis, para la enseñanza de la licenciatura en matemáticas, el que se lleva la palma en las críticas, por sus defectos e insuficiencias, es el *Cours d'analyse* de Édouard Goursat (cuya primera edición es de 1902 y que se utilizaba en Francia masivamente). Es tanta la oposición de los futuros bourbakistas a los textos de análisis existentes que, precisamente, uno de los objetivos de dicho grupo fue el redactar un tratado de análisis para paliar los defectos e insuficiencias de dichos manuales. Aunque estas quejas de los Bourbaki no siempre estaban justificadas,[4] sí reflejaban problemas más profundos que afectaban a las matemáticas francesas. Podríamos decir que la fuerza de las matemáticas en Francia, a lo largo de los años veinte, estaba en su tradición, ejemplificada por la extraordinaria figura de Jacques Hadamard, cuyo seminario fue durante muchos años el punto de referencia de la investigación matemática en dicho país.

Todo lo contrario es la situación en la vecina Alemania, sobre todo en Gotinga, donde la Sociedad Matemática de esa Universidad, que comenzó de manera algo informal, la ha situado en el primer lugar de la investigación a nivel mundial. Era como un Seminario que se reunía una vez a la semana y donde hacía una exposición, casi siempre, algún invitado de reconocido prestigio (a menudo extranjero, como Poincaré que estuvo varias veces). En la Universidad impartían Hilbert, Klein y Minkowski, entre otros (hacia 1900), sus cursos sobre las matemáticas avanzadas basados en sus propias investigaciones, incluyendo temas de física; ya hacia 1930, con Hilbert retirado, los nombres clave eran Hermann Weyl, Emmy Noether, Edmund Landau, Richard Courant y B. L. van der Waerden, entre otros. Bajo la batuta de Hilbert y con el impulso organizativo de Klein, Gotinga se convirtió en centro del álgebra moderna, de los estudios sobre fundamentos de Hilbert y su escuela, e incluso de la nueva física (cuántica y relativista).[5] Respecto al álgebra moderna bastaría con

---

[4]Pensamos que quizá esta oposición de los futuros Bourbaki a los textos existentes de análisis es más bien un pretexto que esconde un rechazo a una «realidad matemática» que no les gustaba en su país. Pues, que sepamos, nunca dijeron nada parecido de las *Leçons sur la théorie des fonctions* de 1898 de Borel, por ejemplo, o de las *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de 1903 de Lebesgue. Al contrario, en sus famosos *Elementos de Historia de la Matemática* citan bastantes veces a ambos matemáticos.

[5]Recordemos el papel de Weyl en estos campos, y el nombre de otro profesor, el físico Max Born, que sería premio Nobel y fundó el Instituto de Física Teórica en 1922: allí se gestó la mecánica matricial que ligamos al nombre de Heisenberg. Son conocidos los comentarios de Born acerca de Hilbert en su libro *My Life: Recollections of a Nobel Laureate* (Scribner & Sons, 1978).

recordar el impacto del libro *Moderne Algebra* de van der Waerden, en la escuela de Emmy Noether y, bajo la influencia del método axiomático, la teoría de conjuntos y la idea de las *estructuras*. Los problemas de fundamentos de la matemática se concretan en la visibilidad de Hilbert con sus discursos polémicos frente a Brouwer, y en el grupo de jóvenes promesas (Bernays, Ackermann, von Neumann) que se reunieron en torno a él.

Probablemente, los jóvenes franceses se sintieron muy decepcionados al comparar esa situación, en la pequeña ciudad alemana de Gotinga, con el panorama en el glorioso París. La matemática de París seguía anclada en la tradición clásica del análisis, y permanecía un tanto al margen de las nuevas tendencias: la nueva orientación del álgebra no debía casi nada a Francia, los estudios sobre fundamentos casi no tenían reflejo (siendo mucho más pujantes en lugares como Varsovia o Viena), y también en la física cuántica los franceses se sentían marginales. Por otro lado, no hay que olvidar un hecho de otra naturaleza: quienes visitaron Gotinga en los años 1930 fueron testigos de excepción de la «gran purga» nazi, fruto de la cual serían expulsados o abandonarían el país Max Born y otros físicos (Franck, Wigner, Szilárd, Teller), Emmy Noether, Richard Courant y Hermann Weyl. En sus últimos años, sin duda amargos, Hilbert diría que este proceso había acabado con la gloriosa tradición matemática de Gotinga.

Conviene decir algo más sobre los orígenes de este fenómeno del «espíritu de Gotinga». Siempre que se habla del espíritu de Gotinga, los matemáticos pensamos en una forma distinta de entender las matemáticas que se gestó en esa pequeña ciudad alemana a partir de Gauss y Riemann, pero sobre todo en la nueva etapa que comenzó cuando Felix Klein (1849–1925) llegó allí como catedrático de su universidad en 1886. La tradición matemática de Gotinga conservaría durante algunas décadas la impronta característica de Klein, aunque, a partir de 1895, se fuera dejando sentir cada vez más la influencia del otro gran artífice del espíritu de Gotinga: David Hilbert (1862–1943).

Klein, que al principio de su carrera científica se había interesado por la física, había sido colaborador de los matemáticos Julius Plücker (1801–1868) y Alfred Clebsch (1833–1872) en Bonn y Gotinga respectivamente, quienes representaban la oposición a la escuela matemática de Berlín y a su impronta demasiado purista. Al morir Plücker y Clebsch, Klein fue su heredero natural; hizo una rápida carrera y se convirtió en pocos años en el punto de referencia de muchos matemáticos alemanes. De esta forma, cuando llegó a la Universidad de Gotinga, tenía en mente un proyecto para hacer cristalizar sus ideas en dicha Universidad. Klein quería rehabilitar la tradición de dicho centro (los tiempos de Gauss y Riemann), caracterizada por el altísimo nivel de la investigación, la importancia concedida a la relación entre matemáticas y física, y una pluralidad de enfoques entre los que se contaba el enfoque geométrico en el estudio de variados problemas.

De hecho, Klein, más que defender una determinada tendencia en oposición a Berlín, estaba interesado en la interacción entre diferentes enfoques y, sobre todo, en apoyar a los estudiosos de talento independientemente de cualquier prejuicio sobre el tema o el método de investigación. Podríamos decir que con Klein aparece una nueva forma de entender, crear y enseñar las matemáticas, que quizá en algunos aspectos puede verse como una imagen contraria a la escuela de Berlín. Su estilo se caracterizaría por la riqueza de su intuición geométrica, penetración conceptual pero con escasa atención al rigor en los detalles, entusiasmo por las aplicaciones y la física, y una honda preocupación pedagógica.

Uno de los primeros y principales fichajes de Klein fue Hilbert, quien defendería con él la necesidad de una concepción amplia de las matemáticas y la *potencia de las ideas unificadoras* frente a la especialización y el purismo, así como el espíritu de apertura internacional en la investigación. Bajo la guía de Klein y Hilbert, la escuela matemática de Gotinga representó un importante fenómeno cultural. Poco a poco el grupo de Matemáticas de Gotinga se convirtió en un foro que atraía a académicos de las más diversas procedencias y nacionalidades. En el periodo entre las dos guerras mundiales, el paso por la Universidad de Gotinga era casi un rito, cuando no una obligación, para cualquier matemático del globo que quisiera estar al día en su materia. Allí no solamente había un estilo nuevo de investigar en matemáticas, sino que precedió claramente al modo en el que esta actividad se entiende hoy. La comunicación directa entre matemáticos en seminarios y reuniones científicas pasó a ocupar un lugar de gran importancia, casi en pie de igualdad con la publicación de libros y artículos en revistas especializadas.

Después de lo que acabamos de exponer, no es extraño que los jóvenes franceses de los que hablamos al principio estén deseando salir de su país para conocer de primera mano lo que sucede en la vecina Alemania. André Weil fue el primero, a los 19 años, en abrir camino a los demás, en 1925; gracias a una beca Rockefeller pasa un año en Alemania. Ésta será la tónica general de todo ese grupo de amigos «normalianos». También harán lo mismo los filósofos-matemáticos Jean Cavaillès (1903–1944) y Albert Lautman (1908–1944).

Durante sus estancias en Alemania, Cavaillès, que pasa siempre que puede por Gotinga, visita a las principales figuras que trabajan sobre los fundamentos de las matemáticas centrándose en la axiomática, la teoría de conjuntos y el programa formalista. Pero nosotros destacaríamos los contactos que mantuvo con la ya por entonces algebrista de primer orden a nivel mundial Emmy Noether, fruto de los cuales aparece publicada por ambos la correspondencia entre Cantor y Dedekind. Esta serie de cartas, que comprende desde 1872 a 1899, está considerada como fundamental para entender la génesis de la teoría de conjuntos.[6] Sin duda conoció al legendario Hilbert, aunque no tenemos constancia de sus encuentros o conversaciones; sabemos que discutió largamente con el gran lógico Gerhard Gentzen, quien también moriría en la Guerra. Los principales escritos de Cavaillès pueden verse como una larga discusión de la posición elaborada por Hilbert en los años 1920 bajo los nombres de formalismo y finitismo. El resultado de sus investigaciones fueron las Tesis (Principal y Complementaria[7]) que defendió el 22 de enero de 1938 ante un tribunal presidido

[6] El título era *Briefwechsel Cantor-Dedekind* y lo publicó la editorial Hermann en París (1937). En el año 1962 la misma editorial lo reeditó, traducido al francés por Charles Ehresmann, junto con otros artículos de Cavaillès en *Philosophie Mathématique*. Existe versión española en la editorial Crítica.

[7] Quizá sea oportuno aclarar lo de Tesis Principal y Tesis Complementaria porque es una situación típicamente francesa. Los licenciados universitarios que querían alcanzar el Doctorado en

por Brunschvicg en la Sorbona, y cuyos títulos respectivos son: *Méthode axiomatique et formalisme* y *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles.*

Por su parte, Lautman en Alemania se centra en las grandes ideas de la nueva matemática y siente verdadera fascinación por la física cuántica. En sus reflexiones filosóficas, intentará establecer las claves de las relaciones entre las matemáticas y la realidad. Los títulos respectivos de sus Tesis (Principal y Complementaria) defendidas el 18 de diciembre de 1937 en la Sorbona ante un tribunal presidido por Brunschvicg fueron: *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques* y *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel.* Gustaría destacar que la Tesis Principal va dedicada a la memoria de su gran amigo, el malogrado lógico Jacques Herbrand (1908–1931), al que había conocido cuando estudiaban ambos en el Liceo Condorcet de París, y a quien admiraba por su genio y por su obra.[8] Admiración que se traducirá en influencia, no solamente en Lautman, sino en Cavaillès y —con deficiencias— en los fundadores de Bourbaki.

Hemos mencionado muy explícitamente los títulos de las Tesis de Cavaillès y Lautman porque utilizaremos las ideas clave que aparecen en ellos para articular el resto del artículo: axiomática, formalismo, estructura, existencia, unidad. Por cierto, las mismas ideas sobre las que Bourbaki se imaginaba asentadas las matemáticas, ya que para este Grupo las matemáticas eran una construcción intelectual dotada de una unidad profunda, reposando sobre el método axiomático y poniendo en juego una jerarquía de estructuras abstractas. La noción de existencia apunta al problema del «platonismo» de las matemáticas modernas, puesto de relieve en las duras polémicas entre Hilbert y Brouwer, y el formalismo fue la base del fracasado intento de Hilbert por despejar cualquier duda al respecto.

2. Las estructuras, de Gotinga a París

Tanto Cavaillès como Lautman piensan que las matemáticas son para el filósofo un observatorio privilegiado, puesto que en ellas el pensamiento se desarrolla según su esencia. Dicho de otra manera, el conocimiento matemático proporciona claves fundamentales para entender lo que quiere decir pensar o conocer. Las matemáticas son un modelo, pero no en el sentido de que el filósofo deba alinearse con su rigor y sus métodos, sino por la respuesta que sugieren a la pregunta *¿qué quiere decir pensar?* Cavaillès y Lautman consideran que la insistencia en el rigor ha ido demasiado a menudo ligada a una visión alicorta, insuficiente, a la vez estática y exterior de las matemáticas. Su objetivo es un estudio *dinámico* e *interior* a las teorías matemáticas,

Letras tenían que hacer un trabajo en latín. Esta situación provenía del Antiguo Régimen y fue mantenida después por la reforma napoleónica de la Universidad hasta la siguiente reforma de 1906. A partir de esta fecha, y hasta la reforma de 1969 en que se eliminó definitivamente la Tesis Complementaria, se podía sustituir el trabajo en latín por una Tesis Complementaria. He aquí la explicación para los casos de Cavaillès y Lautman, que se doctoraron en Letras (sección de Filosofía) a finales de los años treinta.

[8]Tanto es así que a su primer hijo, nacido en 1934, le pone el nombre de Jacques como claro homenaje a su amigo. La muerte de Herbrand, en un accidente mientras practicaba alpinismo, segó la mejor oportunidad que tuvo la comunidad de París para desarrollar estudios de fundamentos a la manera de Hilbert y su escuela.

de ahí que su obra se elabore en relación con desarrollos muy recientes (entonces) y no tenga nada que ver con disquisiciones filosóficas en torno a verdades como $2 + 2 = 4$ o a teoremas elementales de Euclides.

Como veremos, las reflexiones de Cavaillès se orientaron principalmente hacia una epistemología (o incluso una fenomenología) de las matemáticas, mientras que las de Lautman iban en la dirección más ambiciosa y arriesgada del pensamiento metafísico. Pero antes de presentar algunos elementos clave de esas filosofías, debemos prestar atención al suelo nutricio en el que van a enraizar. Se habla en la época de entreguerras de una «nueva matemática» articulada por el método axiomático, y mucho más abstracta que sus antecedentes, sobre todo por centrarse en el estudio de estructuras con un nivel de generalidad que relega a los objetos clásicos al papel de meros ejemplos.

La noción de estructura queda fijada —en lo esencial y a nivel práctico— desde los trabajos de Emmy Noether y su visión del álgebra abstracta, presentada en forma de manual por van der Waerden en 1930.[9] Por supuesto, no es éste el único origen ni quizá el principal: en esa misma época, habría que hablar sin duda de la topología (por ejemplo, la axiomatización de los espacios topológicos por Hausdorff en 1914); y más en general hay que remitirse al análisis lógico-conjuntista de todo tipo de objetos matemáticos (los números naturales y reales; los espacios euclídeos y no-euclídeos, arquimedianos o no; los sistemas de funciones; etc.) entroncando con Hilbert y sobre todo con Dedekind. Comenzaremos por orden cronológico.

Ya lo dijo van der Waerden en 1964:

> *Evariste Galois y Richard Dedekind son los que han dado su estructura al álgebra moderna. El esqueleto que soporta a dicha estructura surgió de ellos.*

Pero hay que tener en cuenta que la idea misma de grupo no aparece abstracta en Galois: el «esqueleto de estructura» que él creó, fundamental, es el punto de vista de la teoría de Galois, que conduciría al álgebra más allá de la simple teoría de ecuaciones. Será en la reflexión sobre sus resultados donde algunos (como Kronecker y Dedekind hacia 1858) aislarían los conceptos de cuerpo numérico y de grupo abstracto (este último analizado por Jordan en un conocido libro de 1870). Y es evidente que el familiarizarse con la noción de cuerpo, a través de la teoría de Galois, les permitió a ambos importantes avances en teoría de números algebraicos, comenzando por la definición misma de *entero* algebraico. Con Dedekind, por fin, el álgebra se aleja definitivamente de la simple teoría de ecuaciones, centrándose en nociones estructurales (cuerpo, anillo, ideal), y comenzando a elaborar de manera conjuntista y a base de morfismos. Pero aún quedaría un paso importante por dar, entre las estructuras relativamente concretas y ante todo numéricas de Dedekind, y la perspectiva estructural abstracta de Noether y van der Waerden.

[9] A nivel teórico era cuestión todavía abierta, y la idea de estructura fue precisada en maneras diferentes: la fundacional y conjuntista que formularon Tarski, los Bourbaki y otros hacia la década de 1930, pero también, dos décadas más tarde, la formulación propia de la teoría de categorías (ver los libros de Corry 2003 y Krömer 2007).

Dedekind escribía desde 1871 que el verdadero objeto del álgebra era estudiar «las interrelaciones entre los cuerpos», y lo hacía a base de un análisis fino y muy axiomático de sus subestructuras (subcuerpos, anillos, ideales) y de los morfismos entre ellas. Precisamente fue Dedekind, en 1894, quien formuló por primera vez la teoría de Galois como una teoría que estudia los grupos de automorfismos (del cuerpo base) y los cuerpos asociados a sus subgrupos. Esta idea sólo se convertiría en habitual a partir de los años 1920, con Artin y Noether; es un ejemplo prototípico de por qué Noether «gustaba decir en todas las ocasiones: "Ya está en Dedekind"» (van der Waerden 1964). Por lo demás, el más importante «esqueleto de estructura» creado por Dedekind fue su tratamiento del problema de la factorización de números algebraicos, resuelto al modo conjuntista con la teoría de ideales, y que a su vez transfirió a la geometría algebraica (Dedekind & Weber, 1882). Dedekind consideraba los conjuntos como *objetos* sometidos a operaciones matemáticas análogas a las tradicionales, tan «concretos» como los números, y lo demuestra el que trabaje con particiones de grupos, leyes de composición inducidas sobre clases de equivalencia, operaciones algebraicas sobre ideales, etc. Con lo cual se aproxima al planteamiento estructural y abstracto típico del álgebra del siglo XX. Podemos considerar su obra como uno de los mayores esfuerzos por lograr una visión sistemática, unitaria y rigurosa de la matemática: quizá no sea casual el hecho de que Bourbaki parezca considerarlo su principal ancestro.[10]

En comparación con todo esto, la presencia de las estructuras en los trabajos de Hilbert es limitada; aunque por supuesto el *Zahlbericht* contribuyó mucho a difundir los nuevos enfoques en teoría de números, y los *Grundlagen* tuvieron un gran impacto al utilizar ese mismo tipo de enfoque para un nuevo análisis de la geometría. De esta obra de Hilbert ya hablaremos más adelante en referencia al método axiomático, pero aquí nos gustaría destacar que el enfoque hilbertiano de la geometría era claramente conjuntista, o sea, partidario de la concepción de Dedekind y Cantor. Prueba de ello es que en dicha obra Hilbert parte de tres «sistemas» o conjuntos de objetos: «puntos», «rectas» y «planos»; definiendo después, axiomáticamente, ciertas relaciones y operaciones entre ellos. Pero en los trabajos sobre teoría de invariantes y sobre teoría de números, a pesar del éxito que tuvieron en su tiempo, tenemos que decir que Hilbert no llegó a absorber las revolucionarias ideas que había en las obras de Dedekind. Entre otras cosas, Hilbert empleó libremente recursos del álgebra tradicional y no incluyó en sus trabajos los métodos (de Dedekind) basados en subestructuras y morfismos que tanto fascinaron a Noether y Artin. Es evidente que a Hilbert no le obsesionaba como a Dedekind la idea de purificar y «aritmetizar» el álgebra; o, al menos, tenía una concepción distinta de lo que significaba esa aritmetización.[11]

[10]Decimos esto porque en sus *Elementos de Historia de la Matemática* (versión en castellano de 1976 en Alianza Universidad), Bourbaki cita a Dedekind unas 100 veces, siendo el matemático más citado.

[11]La visión de Dedekind nos resulta tremendamente radical: parece que, de haber seguido su tendencia, los polinomios habrían desaparecido de los manuales de álgebra. El enfoque de Hilbert, moderado, marcó en esto (aunque no tanto en los métodos de demostración) el camino hacia el siglo XX.

Pero, si Dedekind es el gran precedente del estilo estructural, en Emmy Noether es donde este estilo alcanza su madurez. Ella dedica su obra (y su vida) a la creación de un álgebra abstracta general, siguiendo una trayectoria que la lleva paso a paso de la tradición más algorítmica del siglo XIX, hasta la «modernidad» más abstracta.[12] El contexto teórico de los trabajos de Noether va más allá de los de Dedekind, abandonando la concreción de los cuerpos de números o de funciones; se sitúan así en el formalismo general de los *anillos*, tomando ideas tanto de la tradición Hilbert-Lasker en el estudio de invariantes en «formas» de varias variables, como de la tradición Dedekind. Una de sus contribuciones más célebres es el estudio sistemático de los ideales en anillos y de los fundamentos axiomáticos para diferentes propiedades de descomposición, empleando con gran efecto la condición de cadena ascendente (que se encuentra ya en trabajos de Dedekind, aunque sin papel protagonista). Estos problemas se tratan ampliamente en el famoso tratado *Moderne Algebra* (1930) de van der Waerden, considerado el manual programático del álgebra estructural y un modelo clave para Bourbaki.

En definitiva, podemos decir que la concentración en estructuras abstractas llegó hacia 1890 en el caso de los grupos, hacia 1910 para los cuerpos, 1920 para los anillos; y su definitiva integración entre sí y dentro de una imagen estructural del álgebra se dio en el periodo 1920/30. No es extraño que, en su época, tanto los fundadores de Bourbaki como sus amigos Cavaillès y Lautman se sientan impresionados y fascinados por este nuevo mundo que acaba de aparecer: las *estructuras abstractas*. Así hemos pasado de Dedekind a Hilbert, y de éste a Noether, para llegar a finales de los años 1930, cuando Cavaillès y Lautman están en plena actividad intelectual, y cuando también aparecerá el volumen I de los *Éléments de Mathématique* de Bourbaki.[13] Ya hemos dicho anteriormente que Cavaillès conoció bien a Emmy Noether en Gotinga, puesto que colaboró con ella en la edición de la correspondencia Cantor-Dedekind.

Para los bourbakistas, las matemáticas se reducían a un entramado de tres tipos de estructuras axiomáticas fundamentales: estructuras *algebraicas*, estructuras *de orden* y estructuras *topológicas*. Éstas son las que llamaban «estructuras *madre*» o «matrices», señalando que en diversas ramas de las matemáticas se encuentran combinaciones múltiples de varias de ellas, como los espacios vectoriales topológicos, o auténticas *encrucijadas* de todas las estructuras, como el número real.[14] Estas ideas, que alcanzaron su máxima difusión a nivel internacional en las décadas de 1950 y 1960, estaban contenidas en el manifiesto bourbakista «L'architecture des

[12]También, en una ocasión, marcó tendencia estableciendo nuevas relaciones de aquélla con la topología. (McLarty, 2006).

[13]Este primer volumen, en forma de fascículos sueltos, tenía por título *Teoría de conjuntos* y apareció en 1939, editado por Hermann; constaba de un fascículo de resultados sin demostraciones y 4 capítulos (o sea, 5 librillos). Puesto que el Grupo consideraba —siguiendo a Hilbert y a Cavaillès— la teoría de conjuntos como la base de las matemáticas, se comprende que tratara dicho tema en primer lugar.

[14]Hilbert caracterizó a $\mathbb{R}$ en 1900 como un cuerpo ordenado arquimediano y completo, siendo la última una estructura topológica; ya Dedekind lo había caracterizado en 1872 como un cuerpo ordenado denso y continuo. La propiedad arquimediana es consecuencia lógica de la continuidad de Dedekind, pero Hilbert tenía buenos motivos de orden técnico para aislarla y separarla de la completitud: su interés en los sistemas no arquimedianos.

mathématiques», publicado en 1948 en el libro *Les grands courants de la pensée mathématique* de F. Le Lionnais.

De este manifiesto nos gustaría destacar unas frases donde se ve claramente el rumbo idealista que tomó la confianza de los Bourbaki en las matemáticas como instrumento de investigación de la realidad:

> *En la concepción axiomática, en definitiva, las matemáticas se presentan como un depósito de formas abstractas —las estructuras matemáticas—, y ocurre, sin que se sepa bien por qué, que ciertos aspectos de la realidad experimental se amoldan a algunas de estas formas, como por una preadaptación. No se puede negar, por supuesto, que la mayor parte de estas formas tenían en sus orígenes un contenido intuitivo bien determinado; pero precisamente vaciándolas voluntariamente de este contenido se les ha podido dar toda la eficacia que tenían en sí en potencia, y se las ha hecho susceptibles de recibir nuevas interpretaciones, y de ejercitar plenamente su papel elaborador.*[15]

Por cierto, esta concepción nos recuerda inevitablemente la contemplativa visión, de corte neoplatónico, que defendió con tanto ardor Lautman y que nosotros calificamos de «platonismo estructural». En realidad, en la matemática moderna había un cierto platonismo: los objetos se tratan *como* si fueran independientes del sujeto pensante.[16] También podemos ver en esta cita el intento de Bourbaki por axiomatizar y codificar el edificio de las matemáticas a través del concepto de estructura.

Desde el punto de vista filosófico, Cavaillès y Lautman son defensores pioneros de una *filosofía de la estructura*; es decir, una filosofía inspirada en el estructuralismo matemático, que entiende las estructuras (a la manera de Dedekind, Hilbert y Noether) como otros tantos *conceptos* vertebradores del conocimiento matemático. Así, en su obra póstuma, Cavaillès trataría de generalizar esa visión en la forma de una «filosofía del concepto». Luego, la matemática de las estructuras conduce a Cavaillès hacia la filosofía del concepto porque la eficiencia organizadora de las estructuras produce el efecto de una matemática objetiva, anónima, sin sujeto. En su obra póstuma dirá: «la estructura habla sobre ella misma». (Naturalmente, ese paso no se apoyaba sólo en la matemática, sino también en impulsos de la propia filosofía, concretamente una oposición a la «filosofía del sujeto» tradicional desde Descartes: si Kant sustituyó las estructuras del mundo por las estructuras de la mente, Cavaillès quiso reemplazar éstas por las estructuras de los conceptos.)

La obra de Lautman tratará de poner en evidencia la armonía del edificio matemático precisamente a través del concepto de estructura. No por casualidad en el título de su Tesis Principal aparece esta palabra: *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*. Su análisis, siempre atrevido, trata de mostrar cómo opera en matemáticas un entrelazamiento de estructuras en el cual se van generando entes u objetos nuevos, en un proceso nada arbitrario. De ahí que ligue estructuras

[15] Le Lionnais (1948), pp. 46–47.

[16] Bastaría con recordar el teorema del buen orden de Zermelo y las controversias que suscitó. Sobre este tema, véase el clásico artículo de Bernays (1935), o en castellano la exposición de Ferreirós (1999).

con existencia, progresos en la configuración de estructuras cada vez más perfectas con la emergencia de objetos:

> *La concepción estructural y la concepción dinámica de las matemáticas parecen oponerse en principio: mientras una tiende a considerar una teoría matemática como un todo acabado, independiente del tiempo, la otra, al contrario, no la separa de las etapas temporales de su elaboración.*[17]

Pero esta apariencia no resiste un examen más profundo, piensa Lautman, sino que el realismo matemático se articula con el fenómeno bien comprobado del devenir dinámico de los conceptos y las teorías. Y esto le confirma en su convicción más intensa, «el sentimiento de que, en el desarrollo de las matemáticas, se afirma una realidad que la filosofía matemática tiene como función reconocer y describir».[18] Lautman —como lo harán los Bourbaki— insiste en la diferencia abismal entre el punto de vista «estructural» de la matemática, asociado con Hilbert, y la concepción de las matemáticas que hay en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead. Hilbert sustituye el método de las definiciones genéticas por el de las definiciones axiomáticas, y, lejos de querer reconstruir el conjunto de las matemáticas a partir de la lógica, introduce —al contrario—, pasando de la lógica a la aritmética, de la aritmética al análisis, etc., nuevas variables y nuevos axiomas que amplían cada vez más el dominio de las consecuencias.

Nos gustaría destacar de la obra de Lautman algunas de sus jugosas reflexiones sobre la tensión entre ideas opuestas, o pares dialécticos, en el progreso del pensamiento matemático. Por ejemplo, el apartado donde analiza la importancia de la dualidad entre *lo local y lo global*. Recurriendo a la teoría de la Relatividad, en sus versiones restringida y general, se da cuenta de las relaciones profundas que tiene la primera con la concepción global del espacio tal como lo define Klein en el *Programa de Erlangen* de 1872, y la segunda con la concepción infinitesimal de Riemann en su famosa memoria de 1854 *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría.* Lo mismo le sucede con los problemas relativos a las condiciones de existencia de las ecuaciones diferenciales o de las ecuaciones en derivadas parciales: Lautman indica que los analistas del siglo XIX han establecido teoremas de existencia locales, mientras que el estudio directo de ciertos fenómenos físicos conduce a la consideración de problemas globales.

También considera la importancia de las *propiedades intrínsecas* frente a las *propiedades inducidas*, o propiedades de relación. Analizando la constitución de la geometría diferencial de Gauss y Riemann, que estudia las propiedades intrínsecas de una variedad independientemente del espacio en el cual está sumergida, Lautman nos avisa de que las nociones de la geometría diferencial intrínseca son puramente intelectuales. Según Lautman, esta oposición entre intrínseco y extrínseco (en este caso, el modo de exploración donde la variedad se sumerge en un espacio euclidiano con un número suficiente de dimensiones) es, para las matemáticas, una ocasión extraordinaria para acercar dos nociones lógicas opuestas. Tanto es así que considera a la posibilidad de determinar las propiedades de situación extrínsecas por las

[17] Lautman (1977), p. 27.
[18] Lautman (1977), p. 23.

propiedades de estructura intrínsecas como un interrogante leibniziano, expresada muy bien por el término *Analysis situs*. La respuesta a este interrogante es que, en dos dimensiones, las propiedades de situación se pueden reducir a las propiedades de estructura; pero, en tres dimensiones, esto deja de cumplirse.

En un lugar destacado coloca Lautman los *mixtos* (estructuras como las superficies de Riemann o los espacios de Hilbert), a través de los cuales ve manifestarse la creación matemática en su más alto grado. En su opinión, el paso de las nociones llamadas «elementales» a las nociones abstractas no se presenta como la inclusión de lo particular en lo general, sino como una mediación entre lo intuitivo y lo conceptual.[19]

3. Método axiomático y formalismo

Acabamos de ver la importancia que tiene para Lautman la concepción de las matemáticas en sentido hilbertiano. Lo mismo podríamos decir de Cavaillès, ya que desde la perspectiva de la historia cultural de las ideas, ambos son los militantes introductores de la axiomática alemana en un contexto francés que venía estando dominado por los «intuicionistas» o «semi-intuicionistas» Poincaré, Borel, Baire y Lebesgue. Precisamente en la Tesis Principal de Cavaillès aparece un interesante análisis del método axiomático de Hilbert, cuyo título completo es: *Méthode axiomatique et formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*.

En esta obra toma Cavaillès como gran referencia los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert, ese libro-modelo para la axiomática concebida como instrumento de análisis, de organización y de fundamentación del saber matemático. Puesto que Hilbert presenta la axiomática como el instante crítico del razonamiento matemático, Cavaillès se interesará profundamente por ella. Se da cuenta de que la axiomática pone en evidencia la estructura lógica de las diferentes geometrías, o sea, un sistema de geometría es un ejemplo de sistema formal o estructural. Para Cavaillès la axiomatización es una reflexión, en el interior de la matemática, sobre las operaciones matemáticas. La axiomatización aísla y depura los procedimientos que forman el núcleo de una teoría. Y, en este retorno reflexivo, participa en el progreso, en la extensión de la matemática. La reflexión de la matemática sobre sí misma es uno de los motores de su desarrollo. La axiomatización no sólo es una de las modalidades del pensamiento matemático, sino uno de los procesos que impulsan su devenir. Pero Cavaillès se preguntará:

> *Por fecundo que sea el método axiomático, por estrecho que sea su vínculo con la matemática verdadera, ¿puede fundamentarla?*[20]

Pregunta inevitable a finales de los años 1930, después de que Kurt Gödel (1906–1978) demostrara que la consistencia de los axiomas de la aritmética no puede establecerse formalmente por medios finitarios. La reflexión de Cavaillès sobre la axiomática y el formalismo se elabora sobre todo con el desarrollo de las ideas de Hilbert

[19] El análisis que hace Lautman del espacio de Hilbert, como ejemplo importante de mixto, es muy interesante, porque lo considera «homogéneo al continuo por la naturaleza y la topología de sus elementos, y al discontinuo por sus descomposiciones estructurales».

[20] Cavaillès (1981), p. 79.

en torno a los fundamentos entre 1900 y 1930, e inevitablemente debe afrontar el fracaso de su intento de eliminar, de una vez y para siempre, cualquier duda escéptica sobre la consistencia de las teorías matemáticas.

No cabe duda de que, al hablar de axiomática, la gran mayoría de los matemáticos considera a Hilbert como artífice del tratamiento canónico. Pero el método axiomático moderno tiene precedentes muy importantes en toda una serie de geómetras del siglo XIX, desde Möbius y Grassmann hasta Peano y Pasch, sobre todo debido a la necesidad de aclarar las características estructurales (p.e., dualidad) y las dificultades metodológicas (elementos ideales) que planteaba la geometría proyectiva. Quien mejor representa la geometría axiomática y quien tuvo probablemente mayor impacto en la obra de Hilbert fue Moritz Pasch (1843–1930), cuyo libro *Fundamentos de la nueva geometría* (1882) se propuso desarrollar los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva en base a un conjunto finito de axiomas, mediante deducciones puramente lógicas y sin utilizar coordenadas ni diagramas de ningún tipo. Fue el primero que se planteó el papel de las hipótesis de continuidad en geometría proyectiva, algo que influyó en matemáticos alemanes como Hermann Wiener (1857–1939) y Hilbert. Tampoco está de más recordar el papel de Dedekind en álgebra y fundamentos de la aritmética, con sus caracterizaciones axiomáticas de los cuerpos numéricos, los ideales, los números reales, los módulos, los números naturales y (en 1900) los retículos. Grassmann, Dedekind y Pasch influyeron en toda una escuela de matemáticos italianos, a cuya cabeza se encontraba Peano; aunque la influencia tomó un cariz distinto porque éstos se preocuparon, ante todo, por aspectos lógicos de la axiomatización de la geometría y la aritmética.

Para Hilbert el análisis axiomático de una teoría no entra en acción en su fase inicial —según sus palabras «la etapa intuitiva»—, sino que más bien debe propiciar en su época de madurez —«la etapa crítica»— la subsanación de posibles desperfectos, la simplificación de resultados y la sistematización y exportación de sus logros a otros campos en principio distintos de aquel para el que la teoría fue concebida. A Hilbert le gustaba ilustrar su idea del método axiomático apelando a la siguiente metáfora arquitectónica:

> *El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, donde primero se asientan firmemente los cimientos y sólo después se procede a edificar y a ampliar las habitaciones. La ciencia prefiere asegurarse, tan pronto como sea posible, espacios confortables donde moverse libremente y sólo después, cuando aquí y allá surgen señales de que los tambaleantes cimientos no son capaces de sostener la expansión de las habitaciones, se pone a fortificarlos y afirmarlos. Esto no es signo de debilidad, sino más bien la forma correcta y saludable de su desarrollo.*[21]

De hecho, Hilbert sostenía que el éxito de sus *Fundamentos* se debía en gran parte al enorme grado de desarrollo de la geometría, soportado en la experiencia de siglos. El Grupo Bourbaki, en su famoso manifiesto «L'architecture des mathématiques»,

[21] Esto lo dijo Hilbert en un curso dado en 1905 en Gotinga, que tenía por título *Logische Principien des mathematischen Denkens* (biblioteca del Seminario de Matemáticas de la Universidad de Gotinga).

sustituiría el símil de Hilbert por la imagen de las matemáticas como una ciudad con intrincados barrios y modernos barrios lineales o funcionales.

En los *Fundamentos de la geometría* (1899), Hilbert no solo puso orden en la geometría elemental o euclídea sino que, de paso, también lo hizo en muchas otras geometrías concebibles (proyectiva, no arquimediana). Se percató de que los axiomas propuestos por Pasch contenían algunas redundancias (en particular, la propiedad arquimediana se deducía de las otras) y se propuso encontrar un conjunto de axiomas que evitase dichas repeticiones. En 1891 Hilbert participó en la reunión de la Sociedad Matemática Alemana en Halle y, entre otras cosas, asistió a una conferencia sobre fundamentos de la geometría que impartió Wiener, donde afirmó, sin demostrarlo, que era posible probar los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva, en particular los teoremas de Desargues y Pappus-Pascal, sin recurrir a argumentos de continuidad. He aquí el argumento que necesitaba Hilbert para su trabajo, y que le permitió también tender un puente entre los enfoques sintético y analítico que tanto se habían discutido durante el siglo anterior. El ansiado puente lo establece al introducir, gracias a un análisis axiomático muy sutil, las coordenadas en geometría axiomática mediante la creación de ciertos cálculos con segmentos. En una ocasión se refirió a esto como una «aritmetización de la geometría» por la vía de una introducción del número sobre bases sintéticas.

Para Hilbert —siguiendo aquí a Gauss, Riemann y otros— la geometría es una rama especial de las matemáticas porque forma parte de las ciencias de la naturaleza: no deja de ser la ciencia que se ocupa de las propiedades del espacio.[22] Pero advirtió que ese conocimiento puede transformarse en conceptos o ideas, y desligarse de lo intuitivo-empírico. Quizá puede decirse que vio la manera de estudiarla similarmente a lo que se hacía en las teorías algebraicas abstractas de su tiempo. La geometría puede ser tratada como una teoría general y estructural, axiomatizándola, y al hacerlo es posible iluminar gran número de problemas. En el proceso, mostró cómo el estilo axiomático da pie a nuevos desarrollos, al analizar sistemáticamente distintos grupos de axiomas, al plantearse cuestiones de independencia y consistencia, y al manejar libremente interpretaciones múltiples de los axiomas (incluyendo modelos aritméticos). El impacto de este nuevo estilo en el siglo XX es innegable.

Poco después, el enfoque axiomático de Hilbert quedó ligado con serios problemas en los fundamentos de las matemáticas. En su trabajo de 1899, había reducido la consistencia de la geometría euclídea a la del propio conjunto de los números reales. Los números reales recibieron a su vez tratamiento axiomático, y Hilbert propuso precisamente la cuestión de su consistencia como 2.º problema, en su famosa lista de 23, del año 1900.[23] Sucedía esto precisamente a la vista de las paradojas o contradicciones en la teoría de conjuntos, que —junto al axioma de elección— abrieron

[22]Es más, en geometría la intuición sensorial juega un papel decisivo: nuestros sentidos y nuestra intuición nos permiten seleccionar propiedades del espacio que son esenciales para la elaboración del resto. Esas propiedades, en el caso de la geometría proyectiva, son las relaciones con la incidencia de puntos, rectas y planos; a partir de ahí, se utiliza la lógica para deducir el resto de resultados.

[23]En el problema n.º 6, Hilbert propuso buscar exposiciones axiomáticas de las diversas teorías físicas, lo que estimuló el interés de muchos investigadores, pero condujo a serias dificultades en el tratamiento de la mecánica cuántica. La axiomatización de toda la física como propugnaba Hilbert fue un proyecto nunca concluido.

de nuevo el debate sobre la validez de los nuevos métodos. Pronto Ernst Zermelo, que se incorporó a Gotinga en esos años, siguió el modelo de la axiomatización de la geometría por Hilbert y propuso un sistema de axiomas que restringían el concepto de conjunto para evitar la aparición de antinomias, pero al mismo tiempo era lo suficientemente amplio para el análisis matemático y los resultados clave de Cantor. En los años 1920, Fraenkel, Skolem y von Neumann perfeccionarían el sistema axiomático de Zermelo.

Por esos mismos años, espoleado por las duras críticas que planteaban Brouwer y Weyl a los métodos de la matemática moderna, conjuntista, Hilbert puso en marcha su célebre *programa metamatemático* para justificar dichos métodos (el «paraíso de Cantor» del que «nadie podrá expulsarnos»), con la inestimable colaboración de Paul Bernays (1888–1978). Sacando partido de la axiomatización de las teorías matemáticas, y aprovechando el gran desarrollo de la lógica formal (axiomatizada también por Frege, Peano y Russell), el enfoque de Hilbert se basaba en *formalizar* completamente las teorías. Al hacerlo, los teoremas quedan reemplazados por fórmulas, y las demostraciones informales se transforman en inferencias deductivas, puramente formales, según reglas prefijadas. ¿Qué se gana con ello? Que resulta posible desarrollar una teoría de las demostraciones donde éstas no son, a fin de cuentas, más que un proceso *combinatorio finito*. Surgía así el sueño de demostrar la consistencia de una teoría cualquiera por medios finitarios... Sueño del que Gödel despertaría a los hilbertianos con una verdadera sacudida, sus teoremas de incompletud.[24]

Volviendo a la Tesis Principal de Cavaillès, podemos decir que se trata de un escrito de 1938 donde «rescata» lo que considera puede salvarse del formalismo de Hilbert tras los teoremas de Gödel. Piensa Cavaillès que no son alcanzados por estos teoremas los análisis de Hilbert y Bernays que se refieren a la *teoría de la generalización y del método axiomático*, ni los referidos a la *teoría del signo* en tanto base intuitiva y concreta del pensamiento matemático. Esto es: aunque sin duda es preciso renunciar al objetivo clave de eliminar las dudas escépticas sobre la consistencia —de manera que el pensamiento matemático queda en el aire, sin un fundamento absoluto para su certeza—, puede en cambio salvarse un *formalismo modificado*, entendido como reflexión sobre el proceso de elaboración progresiva de la experiencia matemática.

Apoyándose en la teoría de la generalización o adjunción de ideales, estudiada por Hilbert, trata Cavaillès de mostrar la «fecundidad propia» de la matemática clásica y justificar «el contenido objetivo» de la matemática clásica. La aportación más genuina de Cavaillès es la utilización del término «tematización», con el que se refiere a la transformación de una operación en «elemento de un campo operatorio superior», algo así como una inversión por la cual las operaciones de una cierta teoría se convierten en los objetos de operaciones de grado superior en una nueva teoría. Un ejemplo sencillo sería el siguiente: la generalización o *idealización* entra en juego

[24]Casi todo el mundo acepta que los métodos finitarios quedan agotados por las posibilidades combinatorias de la aritmética formal, o incluso de la aritmética recursiva primitiva. Si se acepta esa idea, el segundo teorema de Gödel (una fórmula que exprese la consistencia de la aritmética de Peano no es demostrable mediante los procedimientos formales de dicha teoría —¡salvo que dicha teoría sea inconsistente!—) implica el total fracaso del programa de Hilbert.

cuando el dominio de los números reales es ampliado con la introducción de la unidad compleja; este proceso está al servicio no sólo de lograr una clausura algebraica, la validez del teorema fundamental del álgebra, sino que despliega una sorprendente armonía de resultados que se revela en el análisis de variable compleja. Otros ejemplos caros a Hilbert eran los elementos en el infinito de la geometría proyectiva, los ideales de la teoría de números algebraicos.[25] La tematización, en cambio, entra en juego cuando, de considerar permutaciones de raíces de una ecuación algebraica, se pasa a la composición de permutaciones y el estudio de sus grupos. O cuando Dedekind pasa a considerar como objeto de teorización las correspondencias o aplicaciones con las que Cantor operaba sobre conjuntos, avanzando hacia la composición de aplicaciones y morfismos.[26] Otro ejemplo, posterior a Cavaillès, sería precisamente la emergencia de la teoría de categorías.

Según Cavaillès, la generalización (o *idealización*) y la tematización representan una reconstrucción de la matemática y son procesos clave del devenir del pensamiento matemático, ya que permiten desarrollar una teoría nueva transformando teorías antiguas, sobrepasando las limitaciones de éstas. En definitiva, en la generalización y la tematización ve Cavaillès como unos ejes coordenados entre los cuales encuentran sentido las dinámicas de la actividad matemática. Más aún, para Cavaillès idealización y tematización manifiestan «una propiedad constitutiva del pensamiento» en general, y no solamente matemático (estamos en la antesala del programa, que se propuso al final de su obra póstuma, de una filosofía del concepto).

Volvamos al proyecto que Bourbaki intentó desarrollar idealmente, hasta sus últimas consecuencias. Si Dedekind había repensado el álgebra en una orientación conjuntista y axiomática, Hilbert había hecho lo propio en los *Fundamentos de la geometría*, igual que haría poco después Hausdorff con la noción de espacio topológico, y en un plano aún más avanzado Noether y van der Waerden con su *Algebra*. Éstos eran algunos de los principales modelos a seguir. De hecho, los bourbakistas no se limitaban a axiomatizar teorías aisladas, sino que su objetivo era extender el proceso de axiomatización a la totalidad de las matemáticas, para liberar toda la potencialidad del pensamiento matemático. Bourbaki propone, en definitiva, una organización piramidal de las matemáticas, dominada por la teoría de conjuntos y sus extensiones, especialmente el álgebra y la topología (y con «mixtos» muy destacados como diversas formas del análisis). Por ello los bourbakistas tenían especial interés en el volumen I de sus *Elementos* que trataba sobre conjuntos y lógica, aunque pa-

[25]Otra cara de la generalización consiste en que la suma, por ejemplo, puede verse como una operación abstracta en la que los elementos no están claramente especificados. El interés se vuelve entonces sobre las propiedades formales de esta operación, que se convierte en «ley de composición» interpretable de forma multiplicativa tanto como aditiva. Tematizar estas propiedades formales conduce a despejar el modo de funcionamiento de la ley de composición: por ejemplo, propiedades de asociatividad, de conmutatividad, existencia de un elemento neutro y de un inverso para todo elemento del conjunto considerado. Se tienen así formulados los axiomas de la teoría de grupos conmutativos.

[26]Pensamos que Cavaillès no estudió los trabajos de Dedekind sobre teoría de números algebraicos (y en particular el extenso suplemento de 1894). Si lo hubiera hecho, habría visto bajo una luz nueva el surgimiento de la axiomática moderna y la noción de estructura: homomorfismos, isomorfismos, automorfismos, análisis basados en las subestructuras (estudiadas como un todo, y no descompuestas en propiedades de sus elementos).

rece que hay acuerdo en que es el volumen más flojo.[27] Pensamos que este volumen hubiera sido distinto, y probablemente mucho más logrado, si Cavaillès, Lautman y (sobre todo) Herbrand no hubieran muerto tan jóvenes.

Como parte del devenir de las matemáticas, en 1945 nace la teoría de *categorías* a partir de las reflexiones de Samuel Eilenberg (1913–1998) y Saunders MacLane (1909–2005) en el campo de la topología algebraica.[28] Se trata de una abstracción «de segundo grado» sobre el estructuralismo conjuntista, propio de Dedekind y Noether, en la que las estructuras dejan de caracterizarse «desde dentro» a través de operaciones sobre los elementos (al modo de Hilbert), quedando estructuras y aplicaciones «sublimados» en *objetos* y *flechas* desprovistos de conexión con las nociones corrientes de «conjunto» y «ley». Resulta notable que el estilo axiomático de Dedekind y Noether (con su forma de «fundamentación conjuntista») se situaba ya, precisamente, a medio camino, relegando las operaciones simples para enfatizar las relaciones entre subestructuras y los morfismos. Esto permite entender que la concepción de Noether haya sido una influencia importante y directa en el camino hacia la concepción categorial y functorial de la topología.[29] Estamos ante un caso de tematización bastante claro, y a la vez una confirmación de la tesis de Cavaillès en el sentido de que no es posible *definir* las matemáticas de una manera definitiva, sino que su devenir desbordará inevitablemente las acotaciones: los conceptos categoriales tenían difícil encaje en la fundamentación conjuntista de las matemáticas, de donde vino una larga polémica aún viva.

También nos gustaría destacar que muchas de las concepciones filosóficas de Lautman, después de algunos arreglos técnicos, se han podido traducir en términos matemáticos precisamente a través de la teoría de categorías. El primero que se dio cuenta de esta posibilidad fue su amigo bourbakista Charles Ehresmann, quien estaba presente en el debate del 4 de febrero de 1939; en la intervención que hizo al final de las exposiciones de Cavaillès y Lautman dijo: «Creo que los problemas generales planteados por Lautman pueden enunciarse en términos matemáticos, y añadiría que no se puede evitar enunciarlos en términos matemáticos». Lautman no llegó a conocer la teoría de categorías, y es difícil saber si las conversaciones con Ehresmann pudieron influir en su concepción tan especial de las matemáticas. Lo que está claro es que Ehresmann se dedicó, a partir de los años 1950 y hasta el final de su vida, a las categorías. Tema éste que no llegó a encajar en los *Elementos* de Bourbaki, quienes se resistieron a tratar nociones categoriales porque desbordaban el marco de estructuras conjuntistas expuesto en su volumen I. Lo cual muestra muy concretamente que, en efecto, la matemática es un devenir que desborda los intentos de definición restrictiva.

---

[27] Ver, por ejemplo, Corry (2003).

[28] Publicaron en dicho año, en *Trans. Amer. Math. Soc.* n.º 58, pp. 231–294, el artículo «General Theory of Natural Equivalences».

[29] Véase el reciente trabajo de McLarty «Emmy Noether's "Set Theoretic" Topology: From Dedekind to the rise of functors» (2006).

4. La unidad de las matemáticas

Un viejo problema: ¿unidad o diversidad?, ¿matemática o matemáticas? Por algo los Bourbaki escribieron *Éléments de Mathématique*, con un singular que suena raro en francés. Sí estamos de acuerdo en que a lo largo del siglo XIX, que fue un periodo de una fecundidad extraordinaria, se va gestando una idea general que subyace en todas las teorías matemáticas: la noción de *grupo*. No cabe duda que el hecho de que una misma estructura pudiera aparecer en teorías muy diferentes hizo pensar a los matemáticos que existía una *unidad* esencial de la matemática.

Con el protagonismo de los grupos de sustituciones en álgebra y los grupos de transformaciones en geometría, nuevos objetos abstractos muy diferentes a los clásicos, pero a la vez clarificadores y estructuradores, se comienza un camino que confluirá con las llamativas contribuciones de Dirichlet y Riemann a la teoría analítica de números, al abordar el estudio de los números primos con las herramientas del análisis de variable real y, no contento Riemann con ello, compleja en su celebérrima hipótesis. En estos fenómenos se perciben las primeras manifestaciones de una profunda unidad, y por ello estimularon enormemente la reflexión sobre el misterio de esta unidad estructural en el pensamiento matemático.

Ya hemos dicho anteriormente que Gotinga encarnaba el dinamismo de una cultura en continua transformación. Este dinamismo se acrecentaba más todavía gracias a la concepción de Klein de las matemáticas en un contexto amplio y unitario, junto con las ciencias naturales y, en último término, con la tecnología. De hecho, la relación con el mundo de la ingeniería y la industria era muy concreta, pues Klein mantenía relaciones con la empresa alemana que se plasmaron en una creciente interacción con la universidad y en el apoyo por parte de los industriales a la infraestructura científica. Promovía, dentro de la universidad, los contactos entre matemáticos y especialistas de otras disciplinas como hidrodinámica, mecánica o teoría de la elasticidad.

De la mano de Felix Klein, que según dijo un discípulo «reinaba como un dios» en Gotinga, «fichando» a los mejores científicos de la época, esa universidad conoció las más altas cotas de reconocimiento científico. Si París había sido la capital de las matemáticas a principios del siglo XIX, y Berlín lo fue desde 1860 bajo el famoso triunvirato de Kummer, Weierstrass y Kronecker, Gotinga pasó a tomar el testigo a partir de 1895 (lo hubiera hecho antes, de la mano de Dirichlet y Riemann, si no hubiera sido por sus tempranas muertes). Entre Berlín y Gotinga no sólo había una competición institucional en el esfuerzo por promover el avance de las matemáticas, sino también diferencias metodológicas muy interesantes: la perspectiva de Berlín era en un sentido más tradicional, buscando el rigor a través de cálculos efectivos y fórmulas concretas, mientras el enfoque promovido desde Gotinga era más conceptual, de orientación abstracta, lógica y conjuntista.

En definitiva, en Klein podemos admirar su defensa de la unidad en matemáticas frente a los ataques a la geometría que se originan con Gauss (el número es puro y a priori, la geometría tiene elementos empíricos) y sobre todo con los berlineses (la geometría es matemática aplicada, como la mecánica), además de su visión abstracta de la geometría basada en el espacio proyectivo y la teoría de grupos. Recordemos el texto de su famoso «Programa de Erlangen», la tesis que defendió en la conferencia con la que tomó posesión en 1872 de su primera cátedra en la Universidad de Erlangen, y que se puede resumir así: toda geometría se basa en un grupo de transformaciones determinadas, siendo los invariantes de ese grupo lo que la caracteriza. El propio Klein reconoció la influencia que tuvieron Jordan y Lie en su idea de clasificar los diferentes enfoques de la geometría sobre una base teórica de grupos. También nos gustaría hacer referencia a sus descubrimientos, publicados en 1884 en un extenso tratado con el extravagante título de *Conferencias sobre el icosaedro y la solución de las ecuaciones de quinto grado*, donde muestra el inesperado vínculo entre permutaciones y rotaciones del icosaedro que le permiten tejer un precioso tapiz en el que la ecuación de quinto grado, los grupos de rotación y las funciones elípticas están todos entrelazados. He aquí un buen ejemplo del poder unificador de la teoría de grupos y la unificación por la vía geométrica.

Hilbert se apunta al carro: sus *Fundamentos* liberan a la geometría de toda referencia a la intuición o lo empírico, y plantean un estudio general de estructuras geométricas diversas. Esto es, aplica a la geometría los métodos modernos que se habían ido elaborando en álgebra y análisis. Lo cual es muy distinto de la reflexión sobre el tema unos años atrás. Ya en sus primeras investigaciones sobre teoría de invariantes, Hilbert se alejó del estudio algebraico de estos problemas basado en el cálculo de largas y complejas series de operaciones algebraicas. Decidió seguir más bien la senda de su maestro H. Weber, en una obra escrita conjuntamente con Dedekind, y enfrentarse a los problemas fundamentales de la teoría siguiendo un enfoque más abstracto, usando demostraciones de existencia puramente basadas en el razonamiento lógico (reducción al absurdo). Muchos matemáticos mantenían sus reservas respecto a este tipo de técnica de demostración, y preferían un enfoque constructivo directo que mostrase la existencia concreta de los objetos matemáticos tratados.

De este modo, las investigaciones de Hilbert, más allá de su significado en relación a una determinada teoría matemática, proponían un debate sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y los métodos de demostración, ligado a la cuestión de la fundamentación lógica de las matemáticas. De hecho, Hilbert apoyó decididamente las investigaciones de Cantor y Dedekind sobre la teoría de conjuntos y los números transfinitos, que habían abierto esas discusiones y modificaban notablemente el paisaje de las matemáticas. Hilbert extendió posteriormente este enfoque abstracto a una gran variedad de temas matemáticos, proponiendo así una renovación global en las matemáticas, concebidas por él como un *cuerpo unificado de conocimiento*.

Hilbert tenía una confianza muy profunda en su capacidad para propulsar el desarrollo futuro de las matemáticas. La prueba evidente de ello sería su famosa conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 y su no menos famosa lista de 23 problemas. Quizá la base de esta confianza residía en su convicción de la existencia de una armonía preestablecida entre las matemáticas y la realidad física, que le conducía a concebir las matemáticas como fundamento de todo el conocimiento científico exacto de la naturaleza. Este punto de vista lo situaba en continuidad con el de Klein. Por consiguiente, la visión axiomática defendida por Hilbert no contradecía las ideas de Klein, sino que constituía en realidad una evolución natural del acento puesto por este último en la relación entre las matemáticas y sus aplicaciones. Como ya hemos dicho anteriormente, en el trabajo cotidiano de Gotinga había una estrecha colaboración entre matemáticos y físicos. De hecho, uno de los programas de investigación más importantes de Hilbert era precisamente la axiomatización de las principales teorías físicas (que era el tema del sexto problema de la conferencia de 1900). De esta forma, Hilbert afirmaba al mismo tiempo la universalidad de las matemáticas y su profunda unidad.

Sin embargo, a principios del siglo XX, las matemáticas comenzaban a afrontar una creciente fragmentación y especialización. Al mismo tiempo, la conexión con la física y otras disciplinas iba adquiriendo un nuevo carácter esencialmente distinto del concepto clásico de aplicación de las matemáticas a la mecánica. Pero, pese a la aparente fragmentación que las nuevas tendencias estaban introduciendo en la investigación, Hilbert estaba convencido de que este nuevo enfoque ofrecía la posibilidad de obtener ideas de síntesis capaces de sacar a la luz la conexión íntima entre diversos aspectos; este proceso de reunificación permitiría preservar la aspiración clásica de la unidad de las matemáticas y de la ciencia sin obstaculizar el desarrollo de las distintas disciplinas. Este será también el convencimiento de Lautman a lo largo de toda su obra, pero de una manera especial en su Tesis Complementaria.

Lautman, en su escrito de 1937, *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, tratará de explorar, mediante unos ejemplos muy bien elegidos, *la profunda unidad de las matemáticas modernas*. A Lautman le interesará:

> *Caracterizar, en sus trazos comunes, las diversas teorías que, contrapuestas con el análisis, tienen como objeto el estudio de la estructura global de un «todo».*[30]

Luego, el objetivo de Lautman en esta obra será mostrar cómo pueden encontrarse en las teorías modernas del Análisis los aspectos que le parecen caracterizar al Álgebra moderna. Con sus propias palabras:

> *Cómo la matemática moderna está comprometida en la búsqueda de esa unificación del álgebra y del análisis, gracias a la penetración cada vez mayor de los métodos estructurales y finitistas del álgebra en los dominios del análisis y del continuo. En suma, el conflicto de los métodos entre álgebra y análisis se disiparía a favor del álgebra.*[31]

De manera especial le interesó a Lautman el aspecto de la nueva matemática que se refiere a la no conmutatividad de la multiplicación, porque le parecía que esta propiedad distinguía profundamente a las teorías donde se da, de la aritmética y del álgebra ordinarias. En concreto dirá:

> *Nos proponemos mostrar, gracias a los trabajos de Cartan y de sus predecesores, cómo ha penetrado en el análisis contemporáneo ese modo de*

[30] Lautman (1977), p. 157.
[31] Lautman (1977), p. 160.

> *pensamiento esencial del álgebra moderna que resulta ser el cálculo de las magnitudes no conmutativas.*[32]

En definitiva, para Lautman la unidad de las matemáticas se expresa, no en una base común para desde ella reconstruir el todo, sino en la convergencia de sus métodos y en el trasvase de ideas entre sus diversas ramas: lógica, aritmética, álgebra, geometría, topología, análisis. Así, la penetración de los métodos del Álgebra en el Análisis, el Análisis subordinado a la Topología, la aparición por doquier de la idea geométrica de dominio, o la introducción de la variable compleja en la Aritmética, son algunos de los ejemplos estudiados por Lautman donde se percibe la unidad global de las matemáticas. Se trata de una unidad *real* dentro del universo sintético de las matemáticas efectivas (o sea, dentro del conjunto de teorías, estructuras y construcciones que surgieron en las matemáticas avanzadas de la época de Lautman) cuya presencia pasa inadvertida cuando se intenta reducir toda la pluralidad del conocimiento matemático en una reconstrucción analítico-fundacional.

Ya hemos dicho anteriormente que el Grupo Bourbaki tenía como uno de sus objetivos iniciales el buscar una exposición enteramente coherente del conjunto de las ramas de la matemática, pero también estaba implícita una creencia absoluta en la unidad de las matemáticas —lo que enlazaba con Klein y Hilbert—, aún a riesgo de obviar algunas partes «marginales»[33] (probabilidades, combinatoria, lógica, etc.). Una de las novedades de Bourbaki consistió en aclarar la forma en que encajaban las teorías, destacando la formulación axiomática de ellas como el elemento que facilitaba dicho proceso. Pensaba Bourbaki que así era como se generaban las matemáticas a partir de un pequeño número de teorías axiomáticas de diferentes tipos que le daban su coherencia, y la estructura de estas teorías constituía la arquitectura de la disciplina y la hacía inteligible. El Grupo veía a la concepción axiomática como una guía para el universo matemático. Bourbaki pensaba que Hilbert había enseñado a los matemáticos a pensar axiomáticamente. Por esto, no es extraño que Hilbert personificara ciertamente, para la generación de entreguerras, el ideal del matemático.

En definitiva, los escritos de Cavaillès y Lautman sobre filosofía matemática marcan a la vez una renovación y una ruptura. Intentaron captar o comprender cómo se hacía la matemática efectiva; es decir, la que hace el matemático en su trabajo efectivo. Así, Cavaillès y Lautman rompen con las formas usuales de exposición filosófica de su época, que mantenían al filósofo alejado de la matemática real del matemático en activo. Y lo hacen enfatizando la singularidad del pensamiento matemático, su irreductibilidad incluso:

> *Las matemáticas constituyen un objeto «sui generis», original en su esencia, autónomo en su movimiento.*[34]

[32]Lautman (1977), pp. 181–182.

[33]Precisamente este hecho está en el origen del artículo de A. R. D. Mathias «La ignorancia de Bourbaki».

[34]Cavaillès (1997), p. 21.

5. Conclusión

A pesar de que las obras de Cavaillès y Lautman son reducidas, cosa inevitable ya que la Guerra Mundial segó sus vidas, esto no impide que sean extremadamente densas y de gran interés. Estamos ante dos personas de una erudición científica muy considerable. Pese a que sus textos son difíciles, poseen un estilo claro, paradójicamente pedagógico, ya que nos hablan al mismo tiempo del corpus teórico, de su historia y de las prácticas matemáticas. Nuestro objetivo en este artículo ha sido, por una parte, despertar al menos la curiosidad por estos dos personajes que en España son poco conocidos (sobre todo Albert Lautman); y, por otra, destacar que los escritos de estos filósofos-matemáticos se pueden considerar íntimamente ligados a la génesis del programa bourbakista.

Nos gustaría señalar que el conocimiento de Lautman se verá ayudado muy pronto por la publicación de sus *Obras Completas* en una edición al cuidado de Fernando Zalamea (de la Universidad Nacional de Colombia, en Bogotá). Y, dicho esto, debemos mencionar también la traducción de *Método axiomático y formalismo* que se publicó hace años en México, a cargo de Carlos Álvarez y Santiago Ramírez (de la Universidad Nacional Autónoma de México). Curiosamente, son matemáticos latinoamericanos los que se han encargado de difundir estos trabajos matemático-filosóficos en nuestro ámbito cultural, quizá debido a una mayor sensibilidad cultural e intelectual. Si bien cabe decir que el estilo de reflexión de los dos franceses no resulta desconocido en nuestro idioma: el esfuerzo por pensar «al interior de las matemáticas» y la cercanía al hacer matemático efectivo han sido característicos de las obras de Javier de Lorenzo y Miguel de Guzmán, por nombrar dos casos relevantes.[35]

Cavaillès y Lautman estaban de acuerdo en que las matemáticas son un devenir, que ellos consideraban marcado por una autonomía radical (también en esto demostraron ser miembros de la misma generación que los Bourbaki y compartir sus ideas en profundidad). Cavaillès expresará magistralmente la idea de que se trata de un verdadero devenir, imprevisible, mas a pesar de todo se expresa en ellas una necesidad. Así, dice:

> *Las matemáticas constituyen un devenir singular. No sólo es imposible reducirlas a algo más que ellas mismas, sino que toda definición, en una época dada, es relativa a esa época; es decir, a la historia de la cual es el desenlace: no existen definiciones eternas.*[36]

Esta combinación de contingencia y necesidad se aprecia en los encadenamientos matemáticos o en las propias etapas de la ciencia matemática, y podría mostrarse en el consabido ejemplo —por otra parte maravilloso— de la invención del cálculo infinitesimal al mismo tiempo por Newton y Leibniz. Cavaillès prefiere recurrir a sucesos muy recientes, y toma el ejemplo de la teoría de conjuntos, a la que se llega por dos caminos diferentes: el de Dedekind, buscando un fundamento para la teoría de números, y el de Cantor, analizando los puntos de discontinuidad de las

[35] Un trabajo interesante es el de F. Zalamea, «Javier de Lorenzo: por una filosofía dinámica de la praxis matemática», *Mathesis*, serie 3.ª, vol. 2 (2007), 1–35.

[36] Cavaillès (1994), p. 594.

funciones representables en series trigonométricas. Para Cavaillès, esa convergencia de caminos y ese «descubrimiento» simultáneo muestran el carácter de necesidad de dicha creación.

Para Lautman, el progreso en matemáticas es en definitiva el resultado de la tensión entre ideas opuestas, todavía más abstractas que las teorías matemáticas en que se traducen y encarnan, como son los pares dialécticos: local-global, intrínseco-extrínseco, simetría-asimetría, finito-infinito, discreto-continuo, etc. Como ejemplo de las claves de su obra, nos gustaría destacar el siguiente párrafo:

> *La idea de la mezcla de simetría y disimetría juega un papel dominante, no sólo con respecto a la física, sino también, como hemos intentado mostrar, con respecto a las matemáticas. Las dos realidades se presentan así en concordancia, como realizaciones distintas de una misma dialéctica, que las genera en actos de comparable génesis.*[37]

Aquí aparecen los términos más representativos de su filosofía, así como un resumen de su visión de la relación entre la física y las matemáticas. No es necesario insistir en la importancia de los términos simetría y disimetría (o ruptura de la simetría), que en el álgebra estructural se traducen en conmutativo y no conmutativo.

Si Cavaillès hace del devenir un rasgo definitorio de la fenomenología de la *experiencia matemática*, Lautman considera que tal devenir no es otra cosa que la encarnación en estructuras de ciertas relaciones que responden a una dinámica superior de las Ideas. Desde su hermosa visión, atrevida y metafísica,

> *El pensamiento matemático tiene así el eminente papel de ofrecer al filósofo el espectáculo constantemente recomenzado de la génesis de lo real a partir de la idea.*[38]

En definitiva, si hubiera que reducir a fórmulas simples sus complejas aportaciones, diríamos que las matemáticas son para Cavaillès una forma de experiencia *sui generis*, y para Lautman un movimiento de encarnación de una dialéctica superior. Todo lo cual adquirió luces y matices muy particulares en medio del proceso de repensar las matemáticas desde la axiomática y las estructuras, que era central en los años 1930, y la convicción de una unidad profunda subyacente a las múltiples teorías. Dos puntos, éstos, centrales en todo el proyecto bourbakista.

Para terminar, corroborando lo que acabamos de decir, nos gustaría recurrir a unas palabras de Jean Dieudonné, quien quizá fue el «alma» histórica y filosófica de Bourbaki:[39]

> *Los filósofos contemporáneos que se interesan por la matemática se ocupan en la mayoría de los casos de sus orígenes, de sus relaciones con la lógica, o de los «problemas de fundamentos»; actitud muy natural, puesto que son cuestiones que conducen a la reflexión filosófica. Bien pocos son*

[37] Lautman (1977), p. 253. Se trata de un párrafo del artículo *Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique*, escrito por Lautman en 1942 y publicado en 1948 en el famoso libro de F. Le Lionnais al que hemos aludido unas líneas más arriba.

[38] Cavaillès (1994), p. 596.

[39] Prefacio a la primera edición de las obras de Lautman (1977).

> *los que buscan hacerse una idea de las grandes tendencias de las matemáticas de su tiempo, y de lo que guía más o menos conscientemente a los matemáticos actuales en sus trabajos.*
>
> *Albert Lautman, por el contrario, parece haber estado siempre fascinado por estas cuestiones. Como Jean Cavaillès, había hecho el esfuerzo de iniciarse en las técnicas matemáticas de base, lo que le permitía estar informado de las investigaciones más recientes sin correr el riesgo de ahogarse bajo un oleaje de nociones abstractas difícilmente asimilables por un profano. Además [. . .] había adquirido sobre las matemáticas de los años 1920–1930 las visiones más extensas y precisas, que no tenían la mayoría de los matemáticos de su generación, a menudo estrechamente especializados; yo puedo dar testimonio en lo que me concierne personalmente.*
>
> *Éstas son las visiones que expone en sus dos tesis y, a cuarenta años de distancia, no deja de impresionar su aspecto profético. Ya que, desde el título de estas obras, se ponen de relieve las dos ideas clave que han dominado toda la evolución posterior, el concepto de estructura matemática y el sentimiento profundo de la unidad esencial subyacente a la multiplicidad aparente de las diversas disciplinas matemáticas.*[40]

REFERENCIAS

P. BERNAYS (1935), Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement mathématique*, t. 34, pp. 52–69.

J. CAVAILLÈS (1981), *Méthode axiomatique et formalisme, Essai sur le problème du fondement des mathématiques.* Hermann, París. Existe traducción al español de Carlos Álvarez y Santiago Ramírez: *Método axiomático y formalismo*, México, UNAM, 1992.

J. CAVAILLÈS (1994), *Oeuvres complètes de philosophie des sciences.* Hermann, París.

J. CAVAILLÈS (1997), *Sur la logique et la théorie de la science.* Vrin, París

J. CAVAILLÈS Y A. LAUTMAN (1989), El pensamiento matemático. *Mathesis*, vol. V, n.º 4 (noviembre de 1989), pp. 561–577. Contiene el debate del 4 de febrero de 1939, traducido por Santiago Ramírez.

L. CORRY (2003), Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. Basel / Boston, Birkhäuser, 2.ª edición. Original de 1996.

J. FERREIRÓS (1999), Matemáticas y platonismo(s). *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2, pp. 446–473.

R. KRÖMER (2007), *Tool and Object. A history and philosophy of category theory.* Basel / Boston, Birkhäuser.

A. LAUTMAN (1977), *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits.* Générale d'Éditions (10/18), París. (Próximamente aparecerá una edición en castellano, con

[40] Lautman (1977), pp. 15–16.

amplio estudio introductorio, por Fernando Zalamea: *Albert Lautman. Ensayos sobre la estructura y la unidad de las matemáticas modernas*, Siglo del Hombre Editores, Bogotá.)

N. Ledesma Pereña (2008), *La Matemática Moderna: Entre el formalismo modificado de Cavaillès y el platonismo estructural de Lautman.* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla. http://fondosdigitales.us.es/media/thesis/852/X_TD_FA-PROV1.pdf

F. Le Lionnais (1948), *Les grands courants de la pensée mathématique.* Cahiers du Sud, Fontenay-aux Roses. Reedición en 1998, Hermann, París. Existe versión castellana en Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1962. (Incluye el artículo de Albert Lautman «Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique».)

C. McLarty (2006), Emmy Noether's "Set Theoretic" Topology: From Dedekind to the rise of functors. En J. Ferreirós & J. Gray (eds.), *The architecture of modern mathematics*, Oxford University Press.

F. Zalamea (1994), La filosofía de la matemática de Albert Lautman. *Mathesis* 10 (1994), 273–289.

F. Zalamea (2006), Albert Lautman et la dialectique créatrice des mathématiques modernes. En A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, París, Vrin, pp. 17–33.

N. Ledesma, I.E.S. Guadiana, Dr. Severo Ochoa s/n, 21400 Ayamonte (Huelva)
Correo electrónico: nic.led@gmail.com

J. Ferreirós, Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla, C/ Camilo J. Cela s/n, 41018 Sevilla
Correo electrónico: josef@us.es
Página web: http://personal.us.es/josef/