Para saber más

www.divulgamat.net

www.mathex.org

Congreso Internacional de Matemáticos
Madrid 2006

¿Por qué las Matemáticas?

Experiencing mathematics

Centro Cultural Conde Duque, 17 de agosto – 29 de octubre de 2006

Una exposición internacional realizada por iniciativa de la UNESCO


1 intake
2 compression
3 combustion
4 exhaustion
The rotary engine, REVOLUTIONARY!
Are four colors enough?
ROTARY ENGINE(RENESIS)


Piling oranges!

¿Por qué las Matemáticas?

Una exposición internacional realizada por iniciativa de la UNESCO

Centro Cultural Conde Duque
17 de Agosto – 29 de Octubre
2006

Los textos del catálogo original francés han sido escritos por Anita Castiel con la colaboración de los matemáticos que contribuyeron a elaborar cada uno de los temas de esta exposición. La actualización y adaptación de los mismos para este catálogo ha sido realizada por A. Bagazgoitia, A. Campillo, I. Colomina, J. L. Fernández, N. García, F. Hurtado, R. Ibáñez, A. M. Mancho, A. Pérez-Sanz, R. M. Ros y F. Santos. El autor del texto del tema 8 del catálogo es R. Ibáñez

¿Por qué las Matemáticas?

¿Por qué las Matemáticas?

Una exposición internacional realizada por iniciativa de la UNESCO

Inscribiéndose plenamente en su compromiso de promover la cooperación internacional, la UNESCO articuló los trabajos de matemáticos de primer plano en torno a una exposición que ha recorrido numerosas ciudades de todo el mundo. En el caso de Japón, el grupo estuvo dirigido por el Profesor Jin Akiyama, Director General Adjunto del Instituto de Investigación para el Desarrollo de la Educación en la Universidad de Tokai (Japón). Sus trabajos rinden homenaje a la belleza y al poder de las matemáticas a través de objetos artísticos que ilustran los conceptos y las fórmulas matemáticas, así como a través de modelos y dispositivos que ofrecen al público la oportunidad de realizar experiencias, descubrimientos, y hacerse una idea diferente de las verdades matemáticas. En el caso de Francia, la fuente de inspiración fue el Comité del Año Internacional de las Matemáticas 2000, dirigido en ese momento por la Profesora Mireille Chaleyat-Maurel. En este contexto, se diseñaron y se realizaron dos series de carteles que se expusieron en las estaciones del metro parisino sobre los temas "Las Matemáticas en la vida cotidiana" y "Las Matemáticas en la naturaleza".

La exposición internacional sobre las matemáticas responde a la falta de sensibilización por parte del público ante el hecho de que, en el siglo XXI, las matemáticas están en el centro de la vida cotidiana, y que tienen el poder de darle forma. Los sistemas matemáticos que hacen posibles las operaciones y la fabricación de objetos que marcan nuestro día a día no son visibles. Cuando alguien utiliza un teléfono o una tarjeta de crédito, escucha un CD, conduce un coche o coge un avión, ¿es consciente de que lo que hace que esos aparatos funcionen son las matemáticas? Asimismo, cuando alguien invierte en bolsa, consulta el boletín meteorológico o contempla una obra de arte, no es consciente de la relación existente entre dichos actos y las matemáticas. E incluso a menudo, los adultos afirman, con un cierto orgullo, que no tienen ni idea de matemáticas. La mayoría de la gente piensa que las matemáticas son "aburridas y difíciles". Las matemáticas nunca han sido tan impopulares como hoy en día. Algunos países reconocen la existencia de una crisis de las matemáticas, que ha cristalizado en un dramático descenso de los efectivos de estudiantes y en la penuria de profesores cualificados.

¿Por qué las Matemáticas? fue concebida y realizada para sensibilizar más al público sobre la importancia de las matemáticas, para mostrarle hasta qué punto las matemáticas resultan esenciales para su existencia cotidiana – ya se trate de realizar actividades económicas básicas o de gestionar estaciones o aeropuertos –, así como para demostrar que son divertidas, interesantes y están al alcance de todo el mundo. La exposición está dirigida a jóvenes de 10 a 18 años, a sus padres y a sus profesores.

¿Por qué las Matemáticas? incluye carteles, modelos de experimentación, dispositivos interactivos en torno a diversos temas, entre los que podemos citar: Formas de la naturaleza – Puntos, líneas y colores – Números y códigos secretos – Las casualidades de la vida – Orden y caos – Artes y Matemáticas – Unas matemáticas sorprendentes...

Su primera presentación tuvo lugar en Copenhague, en julio de 2004, con ocasión del X Congreso Internacional sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las matemáticas (ICME10). Desde entonces la exposición ha estado en París, Orleáns, Atenas, Pekín, Sudáfrica, Mozambique y Namibia. Este año 2006, la exposición viaja a Madrid, Bangkok y Lyon. Se están planificando las exhibiciones de 2007 que podrían incluir Líbano, otros países de oriente Medio y el sur de Asia.

Las futuras solicitudes para acoger la exposición serán estudiadas por el grupo de trabajo del proyecto dirigido por la UNESCO. El grupo, al reforzar la cooperación internacional y solicitar apoyo técnico y financiero, pretende que los países en vía de desarrollo puedan tener acceso a la exposición, que los profesores reciban la formación necesaria para utilizar los experimentos y que estas matemáticas de "manos a la obra" se impartan en las escuelas.

Minella C. Alarcón

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
UNESCO, París, Francia

¿Por qué las Matemáticas?

...en el Congreso Internacional de Matemáticos Madrid 2006.

Las Matemáticas son una ciencia extremadamente valiosa, que ha acompañado a la humanidad por milenios y que ha permitido que veamos el mundo desde perspectivas nuevas. Mediante las matemáticas comprendemos –y por lo tanto domeñamos– el universo. Pero, desgraciadamente, son una ciencia invisible en sus aplicaciones. El único contacto que muchos ciudadanos tienen con ella se produce durante la enseñanza secundaria, y en numerosos casos, con poca fortuna. En consecuencia, las Matemáticas se han convertido en una ciencia mal conocida y escasamente apreciada. ¿Qué hacer para cambiar esta tendencia? ¿Cómo conseguir que los ciudadanos en general y los escolares en particular aprendan a valorar adecuadamente esta disciplina y estén dispuestos a dedicarle los esfuerzos necesarios para su aprendizaje?

Desde hace unos años, los matemáticos hemos comenzado a interesarnos por las tareas de divulgación, dentro de una corriente general en una Europa preocupada por mantener un alto estándar científico y tecnológico que precisa combatir la caída de vocaciones científicas. En gran medida el bienestar europeo de las próximas décadas depende del éxito en esta empresa.

España también trata de poner en marcha acciones divulgativas en Matemáticas. La celebración del Año Mundial de las Matemáticas en 2000 supuso el primer intento sistemático, animados por ser este tema uno de los grandes objetivos de la Unión Matemática Internacional en la Declaración de Rio de Janeiro para el 2000. Iniciativas posteriores como *Divulgamat* o *Ciencia en Acción* son apuestas decididas por el tema. La celebración en Madrid del Congreso Internacional de Matemáticos nos da ahora una nueva ocasión de impulsar la divulgación, y así se han diseñado varias actividades en torno al mismo. No sólo la divulgación tradicional, sino también la difusión de los avances matemáticos recientes, pues tan importante es mostrar la relevancia de la disciplina como su vitalidad y pujanza.

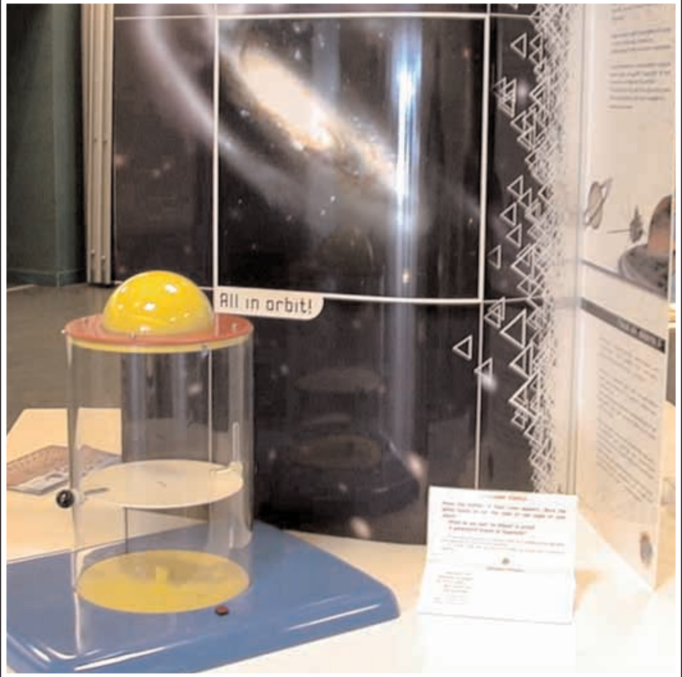
¿Por qué las Matemáticas? es una de estas iniciativas europeas, con origen francés, un país que lidera el tema de la divulgación matemática. Se trata de una exposición en la que se prohíbe no tocar, en la que se pretende que los visitantes palpen las matemáticas con sus manos y no solo con sus mentes, cumpliendo la vieja máxima de "enseñar deleitando". Como en los grandes espectáculos, sólo nos queda decirles a los visitantes: "Pasen y vean". No saldrán defraudados.

Manuel de León

Presidente del ICM2006 Madrid
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Real Academia de Ciencias

¡Unas matemáticas muy espaciales!

1 – Leer la naturaleza



Poner satélites en órbita alrededor de la Tierra o de un planeta, hacer que escapen de la atracción terrestre o guiar sondas durante su viaje interplanetario es un auténtico trabajo de orfebre que requiere un gran número de cálculos y la utilización de matemáticas avanzadas.

Los matemáticos utilizan herramientas desarrolladas desde hace muchísimo tiempo –las leyes de Newton (1687), el método de Lagrange (1755) o de Gauss (1801)...– y resultados obtenidos recientemente como las teorías del control óptimo, de la relatividad o del caos determinista.

¡Adiós, Rosetta!

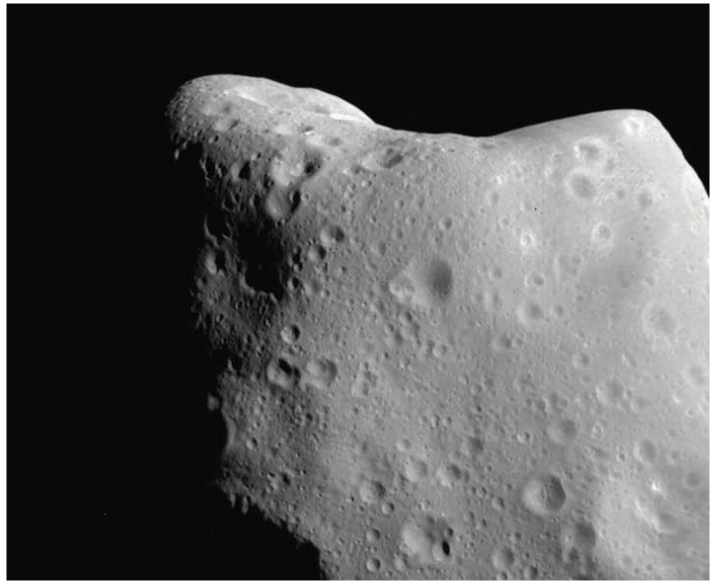
El lanzamiento de la sonda europea Rosetta el 2 de marzo de 2004 para alcanzar el cometa Churyumov-Gerasimenko –Chury para los íntimos– está lejos de ser una vulgar excursión al espacio.

Su periplo, que durará 10 años, promete ser uno de los más complejos viajes jamás organizado por expertos en tecnología espacial. Su misión: acudir a su cita con Chury en mayo de 2014, seguir al cometa durante un año y depositar su vehículo de aterrizaje Philae en un suelo del que no se sabe absolutamente nada. Evidentemente, esta odisea, todo un evento del siglo XXI, ha requerido todas las sutilidades de la mecánica celeste y de las matemáticas más avanzadas. Para hacerse una idea de su complejidad, basta con recordar que un cometa es un objeto interestelar extremadamente móvil y que Chury se encuentra a varios miles de millones de kilómetros de la Tierra.

Coreografías celestes

El sector espacial acepta desafíos técnicos y matemáticos auténticamente endiablados.

Imaginaos que intentáis, en un mar desatado, alcanzar con vuestra balsa, y con la única ayuda de vuestras manos, una embarcación a la deriva situada a varias decenas de kilómetros. Este es el reto al que deben enfrentarse los expertos espaciales para colocar, orientar y mantener un satélite en órbita o para guiar una sonda. La precisión que se requiere es impresionante, del orden de un centímetro para el control de un satélite situado a varios cientos de kilómetros de la Tierra. Sin embargo, esta configuración constituye el caso más común. (Véase el artículo siguiente).

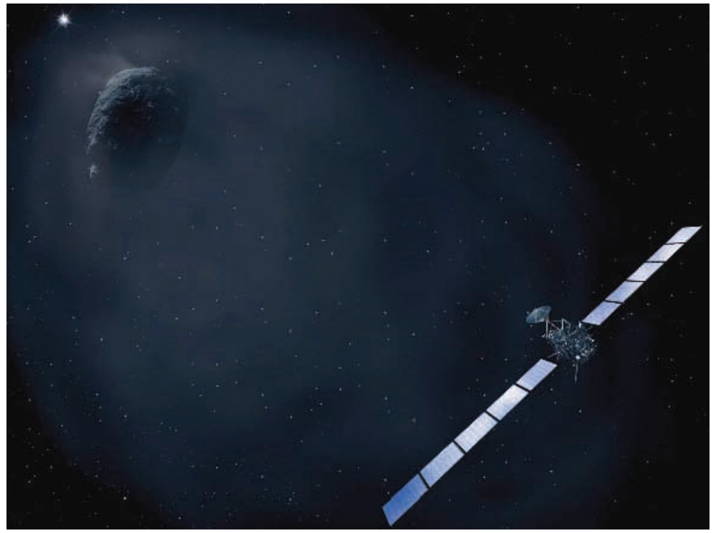


Asteroide © Nasa

La mayor parte de los problemas de orden matemático que se encuentran los científicos y los ingenieros tienen que ver con la teoría del control óptimo. Así, cuando una sonda “marca” su ruta en el espacio, se busca “optimizar” y “controlar” su viaje. En general, en matemáticas, la palabra “optimizar” significa que se desea minimizar o maximizar una magnitud. Y la noción de “control” significa que el sistema posee un parámetro con el que se puede jugar para alcanzar el objetivo. En el caso de la sonda, los expertos tienen que definir el encadenamiento de las operaciones que permiten pasar de un estado inicial a un estado final predeterminado haciendo que los motores funcionen lo menos posible. En efecto, la cantidad de carburante que puede transportar es limitada.

Una técnica sutil consiste en utilizar la gravitación de diferentes astros para desviarla y acelerarla: se trata del efecto “asistencia gravitacional”.

Uno de los éxitos más espectaculares de la asistencia gravitacional es probablemente el caso de la sonda Voyager, lanzada en 1977 para un largo periplo de exploración de los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Este trayecto, sin utilizar la asistencia gravitacional, hubiese podido durar, en el mejor de los casos, cerca de 30 años. Sin embargo, la sonda Voyager sólo tardó 12 años en llegar a Neptuno. Asimismo, el Voyager se benefició de una configuración particularmente favorable de los planetas que permitió minimizar el trayecto recorrido y que sólo se da una vez cada 176 años aproximadamente...



Rosetta

La sonda Rosetta (véase el texto 1 página 7) utilizará su paso cerca de la Tierra y de Marte, hasta 2009, para acortar su trayecto. Deberá reservar carburante ya que lo necesitará en mayo de 2011 para ponerse en órbita alrededor de Chury y depositar su vehículo de aterrizaje Philae. Porque, al contrario que en el caso de las misiones planetarias, la atracción gravitacional no le será de ayuda debido al hecho de que el cometa es demasiado poco masivo.

Por otra parte, los ingenieros se ven a menudo enfrentados al problema de mantener a un satélite en su órbita. Una vez más, es necesario encontrar las maniobras que permitan lograrlo consumiendo la mínima cantidad de energía posible. Los matemáticos especializados en control óptimo han demostrado que, en términos de ahorro de carburante, resulta más ventajoso utilizar motores de bajo empuje pero capaces de funcionar de forma constante. Este tipo de motores debería generalizarse y sustituir los motores actuales que funcionan mediante impulsos breves e intensos.

La teoría del control óptimo es una rama relativamente joven de las matemáticas aplicadas que está en plena expansión. Nació a mediados de los años 1940, fundamentalmente como respuesta a las necesidades de la industria aeroespacial. Uno de los resultados más impactantes es el “Principio del máximo de Pontryagin”, obtenido por un grupo de investigadores soviéticos, en el que se encontraba Lev Pontryagin, hacia 1960. Este teorema establece las condiciones necesarias que debe cumplir toda solución de un problema de control óptimo. Supone una ayuda preciosa a la hora de buscar soluciones de forma efectiva.

Trayectoria retrógada de Marte © Nasa

Todos los métodos matemáticos utilizados en el sector espacial requieren cálculos numéricos muy voluminosos. ¡Y los matemáticos ya no saben a que santo ordenador encomendarse! Son conscientes de que los errores son inevitables, ya sean humanos o debidos al propio funcionamiento del ordenador.

Así, la sonda Mars Climate Orbiter se estrelló en Marte en septiembre de 1999 debido a un descuido asombroso: una parte de los diseñadores de software supusieron que la unidad de medida era el metro, mientras que la otra parte pensó que era el pie (la unidad inglesa). Por otro lado, incluso con un sistema informático irreprochable, la mayoría de los cálculos conducen a errores inevitables. En efecto, el resultado de una operación realizada en un ordenador no puede, casi nunca, representarse exactamente: debe redondearse, es decir, dar un número máquina próximo al resultado exacto. Los números representables de forma exacta, que constituyen un subconjunto de números racionales, se denominan números máquina. Una secuencia de redondeos puede conducir a resultados extraños. “La aritmética en coma flotante”, la que utilizan los ordenadores, es actualmente un tema de investigación crucial.

Los expertos espaciales también recurren a la mecánica celeste, una disciplina que aunque tenga ya más de tres siglos sigue siendo eficaz (véase texto número 2 página 7). Gracias a ella, sabemos que vencer la atracción terrestre constituye la fase más delicada y más costosa en términos de energía. Para tener una oportunidad de escapar del pozo de gravitación de la Tierra, el satélite o la sonda deben alcanzar como mínimo 40.000 km/h, la velocidad de liberación. Por debajo de dicha velocidad, el objeto únicamente será satelizado alrededor de la Tierra, en una orbita que, según las leyes de Kepler (véase texto número 1 página 7), será una elipse o un círculo. Sólo cuando supere dicha velocidad, el satélite escapará a la esfera de influencia de la Tierra y se lanzará en una órbita hiperbólica, en el vacío interplanetario, con el excedente de velocidad que haya podido conservar.

Las leyes de la mecánica celeste son fácilmente operatorias tan solo en el caso de un “problema de dos cuerpos”, por ejemplo, para determinar el movimiento de la Tierra en presencia del Sol despreciando la acción de los demás cuerpos del sistema solar. Este caso de manual, bastante restrictivo, no corresponde al contexto real. En cuanto existen tres cuerpos en interacción gravitacional, el problema adquiere una dificultad considerable y siempre es objeto de intensas investigaciones. Al atacar este problema a principios del siglo XX, el matemático francés Henri Poincaré planteo las bases de lo que actualmente se denomina la teoría del “caos determinista” y “de los sistemas dinámicos”. Gracias a los ordenadores modernos, resulta posible aproximarse a la solución del sistema de ecuaciones de este problema, siempre y cuando se conozcan la posición y las velocidades de todos los cuerpos en un instante determinado o las “condiciones iniciales”. Por ejemplo, las soluciones se pueden buscar en forma de desarrollos en series trigonométricas relativos a las leyes de Kepler.

De hecho, los métodos de la mecánica celeste tan sólo proporcionan una trayectoria media que hay que afinar posteriormente, es decir, deformar, para tener en cuenta los imprevistos del viaje interplanetario o la puesta en órbita: frotamientos con la alta atmósfera o radiaciones electromagnéticas, por ejemplo. Por todo esto, el precio que han tenido que pagar los matemáticos para convertirse en los coreógrafos del espacio son los cálculos endiablados y el uso de teorías punteras.

1

¡Historias orbitales!

En el siglo XVI, Nicolás Copérnico demostró que la concepción geocéntrica del Universo, que prevalecía desde la Antigüedad, era falsa. La Tierra ya no es el centro del Mundo. En el sistema de Copérnico, todos los planetas describen círculos alrededor del Sol.

Pero, rápidamente, el sistema deja de funcionar bien: las observaciones de Marte realizadas por Tycho Brahe, no concuerdan con las órbitas circulares.

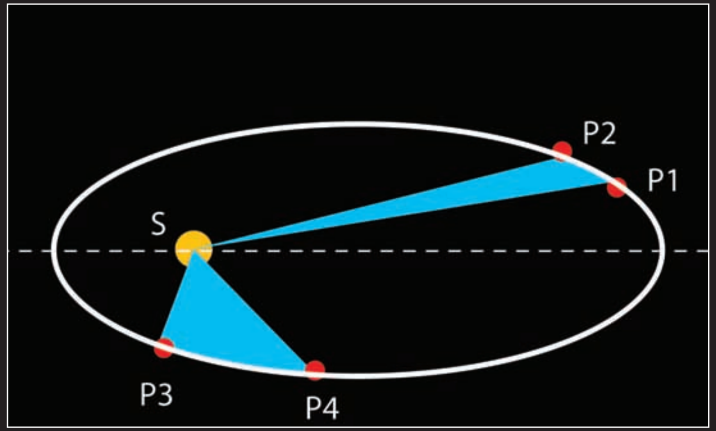
El matemático Johannes Kepler va a resolver este problema al enunciar las tres leyes que llevan su nombre.

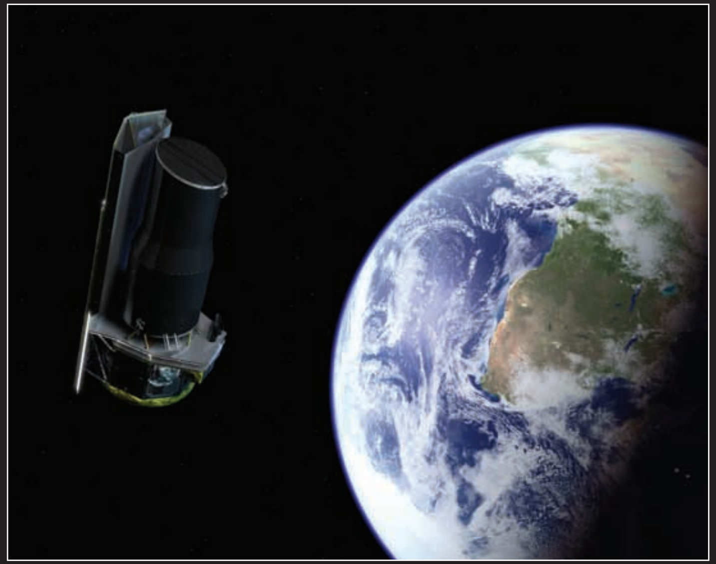
Primera ley (1609): los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos.

Segunda ley, la llamada ley de las áreas (1609): las áreas barridas por los radios vectores que unen el centro del Sol con el centro de un planeta son proporcionales a los tiempos utilizados para describirlas.

Tercera ley (1619): los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

Las leyes de Kepler fueron confirmadas y explicadas posteriormente por numerosos científicos. Se aplican a cualquier sistema orbital de dos cuerpos, como los satélites artificiales que orbitan alrededor de la Tierra. Así, los planetas y un gran número de satélites artificiales describen una elipse estando el Sol o la Tierra en uno de sus focos. Los cometas, cuyos periodos son extremadamente largos, describen trayectorias muy elípticas, casi parabólicas. Por último, tras vencer la atracción del sistema solar, una sonda o un satélite sigue su ruta, sin esfuerzos, siguiendo una trayectoria hiperbólica.





2

La prueba del satélite

Desde el mes de abril de 2004, la sonda estadounidense Gravity Probe B realiza “sus grandes componendas” desde lo alto de su órbita polar a 650 Km de altura. Su objetivo es confirmar la teoría de la relatividad general de Einstein. Tras varios decenios de espera, esta experiencia materializa uno de los sueños de todos los científicos del mundo. Porque, aunque varias de las predicciones de esta teoría ya hayan sido comprobadas con una precisión increíble, todavía tiene que demostrar sus aptitudes.

Según la relatividad general, la masa de los objetos celestes deforma el espacio-tiempo que se vuelve “curvo”. De este modo, los planetas y las estrellas se atraen mutuamente como bolas situadas sobre una manta tendida que se deforma debido a su masa. La luz no se libra de esta “maquinación” gravitacional. Para medir la “curvatura” del espacio-tiempo, hay que poder estudiar la trayectoria de un objeto hipersensible, como los investigadores van a hacerlo con la sonda Gravity Probe B. A bordo de ésta, los ejes de cuatro giroscopios de altísima tecnología están alineados con una estrella predeterminada en la constelación de Pegaso y constituyen el sistema de referencia espacio-tiempo. Los investigadores van a medir durante varios meses las variaciones más ínfimas de la alineación de los ejes bajo el efecto gravitacional de la Tierra... si existen. No obstante, estos efectos tan ínfimos para la Tierra tienen implicaciones a gran escala sobre la naturaleza y la propia estructura del Universo.

Para saber más

En Internet

www.ksc.nasa.gov/elvnew/gpb/vlcc.htm
[Gravity Probe B en directo]

www.esa.int/SPECIALS/Rosetta
sci.esa.int/missionsRosetta2004
[Páginas de la Agencia Espacial Europea sobre Rosetta]

www.sc.ehu.es/shweb/fisica/celeste/kepler/kepler.htm
[Una web interactiva sobre las 3 leyes]

www.astromia.com
[Astronomía e historia de la astronomía]

En los libros

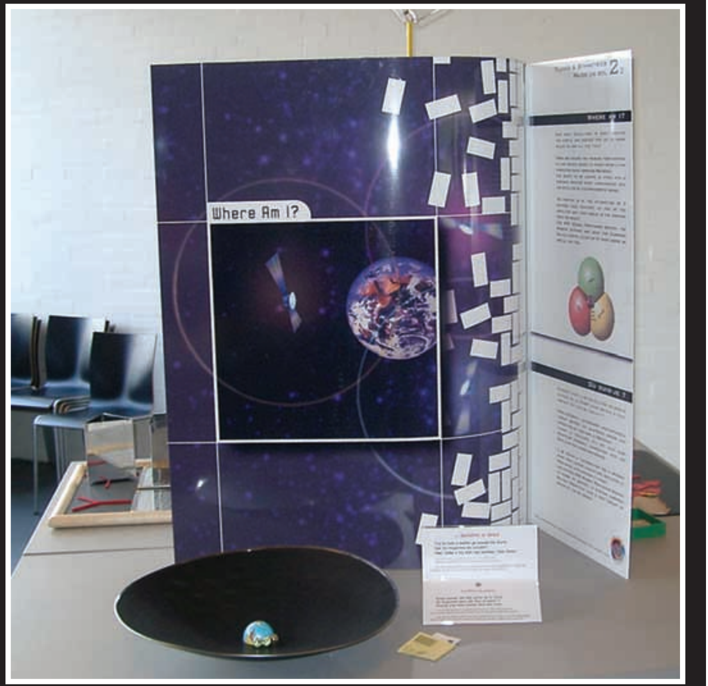
David Galadí, Jordi Gutiérrez, Astronomía General, Ediciones Omega, 2001.

Ángel Gómez, Historia de la Astronomía, Colección Flash Más de Acento Editorial, 2002.

Juan Vernet, Astrología y Astronomía en el Renacimiento, Acantilado, 2000.

¿Dónde estoy? ¿Dónde voy?

2 – Teselaciones y Simetrías



El sistema estadounidense Global Positionning System (GPS) y, a partir de 2010, el sistema europeo Galileo van a cambiar vuestras vidas. Dentro de poco, apuntaréis en vuestras agendas la hora y las coordenadas de una cita, y un vehículo os conducirá automáticamente, ya no "a tiempo y puntuales" sino "a tiempo y al lugar". En un futuro próximo, se incorporarán chips mini-GPS, a buen precio en los teléfonos celulares, ordenadores, relojes e incluso quizás, ¡en nuestro propio cuerpo!

Disponer de nuestra ubicación exacta puede considerarse, en el lenguaje del historiador de las ciencias, como una ruptura epistemológica, ya que nada será como antes.

El Cielo trabaja para la Tierra

No tener miedo a perderse en un bosque muy oscuro y profundo.

Ni dar vueltas antes de encontrar el camino serpenteante que nos llevará hacia un pequeño paraíso desconocido por los turistas.

O memorizar 1.500 de las 5.334 calles de París para obtener la licencia de taxista.

Encontrar el lugar donde aparcamos el coche.

Para un detective, organizar sus vigilancias.

Para un piloto de avión, conocer su velocidad instantánea y disponer de un plan de vuelo seguro.

Saber exactamente en que trópico, latitud y longitud, a que altitud deambulamos o escalamos...

Mirar detenidamente los nuevos mapas y darse cuenta de que el Mont Blanc ya no mide 4.807 m sino 4.810 m y 40 cm...

Situados a unos 20.000 Km de altitud, los 24 satélites del Global Positionning System velan sobre la Tierra y la lista de sus aplicaciones está lejos de cerrarse.

Nacido bajo el signo del GPS

El Global Positionning System (GPS) permite medir con precisión nuestra posición en cualquier punto en la Tierra, tanto en el suelo como en el aire. Una revolución cotidiana y un reto estratégico capital.

El Mont-Blanc: 4810 m. y 40 cm.

En el cielo, una nueva "constelación" brilla desde 1990. Los 24 satélites estadounidenses del Global Positionning System (GPS) emiten constantemente señales codificadas que se puede recibir en la Tierra mediante un receptor adecuado. Todo el mundo puede deducir su posición exacta, tanto en el suelo como en el aire, con una precisión del orden de unas decenas de centímetros.

En sus orígenes, este sistema era un dispositivo militar, diseñado por el ejército estadounidense para su uso exclusivo, como el guiado de misiles o la asistencia a la navegación de aviones y vehículos de reconocimiento.

Desde 1995, los ciudadanos de todos los países del mundo están contentos, ya que tienen acceso al GPS y a sus aplicaciones... O casi, ya que este acceso sigue siendo limitado en términos de precisión del posicionamiento y en casos de fuerza mayor, como una guerra, está cerrado.

La retahíla de aplicaciones, civiles, militares, cartográficas... derivadas del simple hecho de saber la hora y la posición exacta no dejan de ampliarse (véase "*El cielo trabaja para la Tierra*"). Detrás de un sistema como el GPS se esconde un reto estratégico capital. Por lo tanto, es lógico que Europa haya decidido liberarse del dominio del ejército estadounidense que puede limitar con toda libertad las prestaciones del acceso al GPS. Esta independencia será efectiva en 2010 con la puesta en servicio del sistema Galileo y su constelación de 30 satélites.

Empezaremos por describir la constelación GPS. Los 24 satélites están repartidos en 6 órbitas circulares a una altura de 20.200 Km, en grupos de cuatro, con una inclinación respecto al plano de ecuador de 55° y una separación entre órbitas de 60° en cuanto a la longitud. Se dice que cada satélite se desplaza en "fase" con un periodo de 12 horas. Dicho de otro modo, todos los satélites pasan dos veces al día por el mismo sitio. Esta distribución permite cubrir todo nuestro planeta y, al menos cuatro satélites son visibles simultáneamente desde cualquier punto del globo. Podemos constatar que los satélites no pasan nunca por encima de países que se encuentren a una latitud superior a 55°, lo que no impide que sean visibles. Esta cobertura es ampliamente suficiente para entrar al mismo nivel en el universo GPS.

Para localizarse, un observador debe determinar las distancias d_1, d_2 y d_3 que le separan de tres satélites S_1, S_2 y S_3 del sistema GPS. Estas distancias se calculan a partir de la medida de los tiempos de recorrido de las señales emitidas por los satélites en una frecuencia única y común a todos de 1575,42 MHz. Estas señales permiten conocer exactamente la posición del satélite. El receptor se pone a la escucha de la frecuencia de los satélites activos, es decir, de los que están en su campo de cobertura, y recoge la mayor información posible sobre sus trayectorias y el estado de la ionosfera. En concreto, los satélites generan un código pseudoaleatorio que se transmite cifrado en la modulación de las ondas portadoras. Asimismo, los receptores GPS generan un mismo código, sincronizado con los de los satélites. Para determinar la distancia que separa a un satélite de un receptor, se mide el tiempo de propagación de un código que se desplaza a la velocidad de la luz. Cuando el receptor lo recibe, es capaz de determinar el retardo debido al trayecto recorrido. La medida se realiza retrasando el código del receptor hasta que esté alineado con el código del satélite. De este modo, se halla una diferencia de tiempo que se puede multiplicar por la velocidad de la luz para obtener la distancia que se busca. ¡Gracias, Einstein!

El parámetro d_1 permite situarse en una esfera de radio d_1 y de centro S_1; d_2 en una esfera de radio d_2 y de centro S_2, es decir, en el círculo de intersección de esas dos esferas: por último, d_3 en una esfera de radio d_3 y de centro S_3. Estos tres parámetros sitúan al observador en la intersección de las 3 esferas. Entonces son posibles dos posiciones, P_1 y P_2, simétricas respecto al plano de los satélites; pero la ambigüedad surge fácilmente ya que, si uno de los puntos, P_1 por ejemplo, está situado cerca de la Tierra, P_2 estará a más de 40.000 Km de la superficie de ésta.

Los satélites llevan a bordo un reloj de gran precisión porque para obtener una precisión del orden del metro, la exactitud del reloj debe ser de 1 a 2.10^{-9} segundos. Los receptores de la señal GPS, por el contrario, suelen estar equipados con relojes de cuarzo de menor calidad. Para paliar esta dificultad y mejorar la precisión resulta necesario hacer intervenir a un cuarto satélite. Con ello, los receptores del sistema GPS se convierten, además, en relojes de altísima precisión.

Otra metodología habitual en el uso del GPS es el posicionamiento diferencial; es decir, la determinación del vector entre dos receptores. Este método permite obtener precisiones centimétricas y, con periodos de observación extendidos a una decena de horas, hasta milimétricas. Así, el 8 de septiembre de 2001, a las 07:00 horas (tiempo universal), el Mont Blanc creció gracias al GPS. En esa fecha, pasó de medir 4.807 m a 4.810,40 m con un margen de error de aproximadamente 10 cm.

Los mapas del Instituto Geográfico Nacional (IGN) incluirán este nuevo dato a medida que se vayan renovando. Gracias al procedimiento GPS, también sabemos hoy en día que el techo del mundo, el Everest, ha tenido que revisar sus pretensiones a la baja. Su altitud es ahora de 8.846,4 m y no de 8.848 m. Por otro lado, las nociones de altitud y de profundidad se acercan en los abismos oceánicos. Gracias una vez más al GPS, a otros satélites y a otros instrumentos, se están realizando actualmente mapas de los fondos marinos, lo que parecía imposible hace tan sólo algunos años.

El receptor GPS también puede calcular su velocidad instantánea de desplazamiento jugando con un efecto físico, el efecto Doppler. En efecto, cuando el receptor se desplaza, incluso lentamente, se produce un ligero desfase entre la señal calculada y la señal recibida. Este efecto, que se superpone a la velocidad de los satélites, superior a 3,89 Km/s, es muy débil. Pero es suficiente para el cálculo de la velocidad instantánea del receptor respecto a la Tierra.

Por lo tanto, el GPS requiere muchas matemáticas, una buena dosis de cálculos (no, no es lo mismo) y se basa en principios punteros de física como la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. Además, se puede considerar que el GPS es una aplicación concreta del concepto de espacio-tiempo introducido por Einstein. El sistema se basa en el segundo postulado de Einstein, es decir, la constancia de la velocidad de la luz en el vacío.

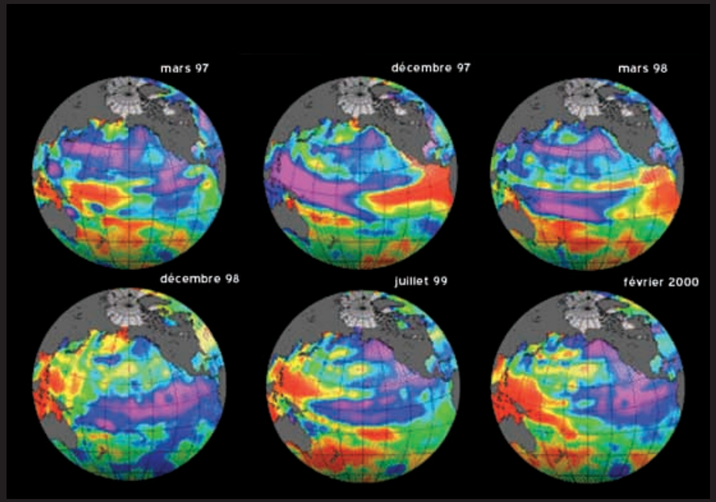
Los físicos encuentran en el GPS un fabuloso banco de pruebas y de comprobación de la relatividad general. En efecto, el GPS requiere instrumentos muy precisos que se desplazan a gran velocidad. Y entonces, las influencias relativistas y de mecánica cuántica son observables. Por ello se aplica una gran parte del arsenal de conceptos de la teoría de la relatividad, como la dilatación del tiempo (debida a la velocidad de los relojes de a bordo) o el efecto Sagnac (efecto de la rotación de la Tierra sobre los relojes terrestres).

¿Y los matemáticos? Por una parte, en física cuántica o relativista, no se sabe si el físico es matemático o al revés. Pero, sea lo que sea, un receptor GPS tiene que resolver muy rápidamente problemas numéricos complejos y utiliza complicados algoritmos de cifrado y de sincronización. Por lo tanto, los matemáticos sólo pueden extasiarse ante este compendio de tecnología... ¡Del que son unos de los iniciadores!

1

El proyecto europeo Galileo

Galileo será comparable con el sistema estadounidense GPS, pero con una vocación exclusivamente civil (por ahora), y más eficaz, especialmente en términos de precisión de posicionamiento. Será operativo en 2010, y estará basado en una constelación de 30 satélites situados a una distancia de 24.000 Km de la Tierra. Concebido para que las señales del sistema Galileo sean distintas de las del GPS, desgraciadamente será necesario comprar nuevos receptores. El proyecto Galileo, al romper el monopolio estadounidense, obligó al GPS a mejorar la oferta dirigida a los civiles a partir del año 2000. (De hecho, obligó a desconectar la denominada *disponibilidad selectiva* o degradación intencionada de la precisión del reloj de los satélites para los usuarios civiles.) Por ejemplo, la precisión de navegación –o posicionamiento instantáneo– habitualmente ofrecida por GPS pasó de 20 m a 3 m y no deja de mejorar. ¡Viva la competencia!

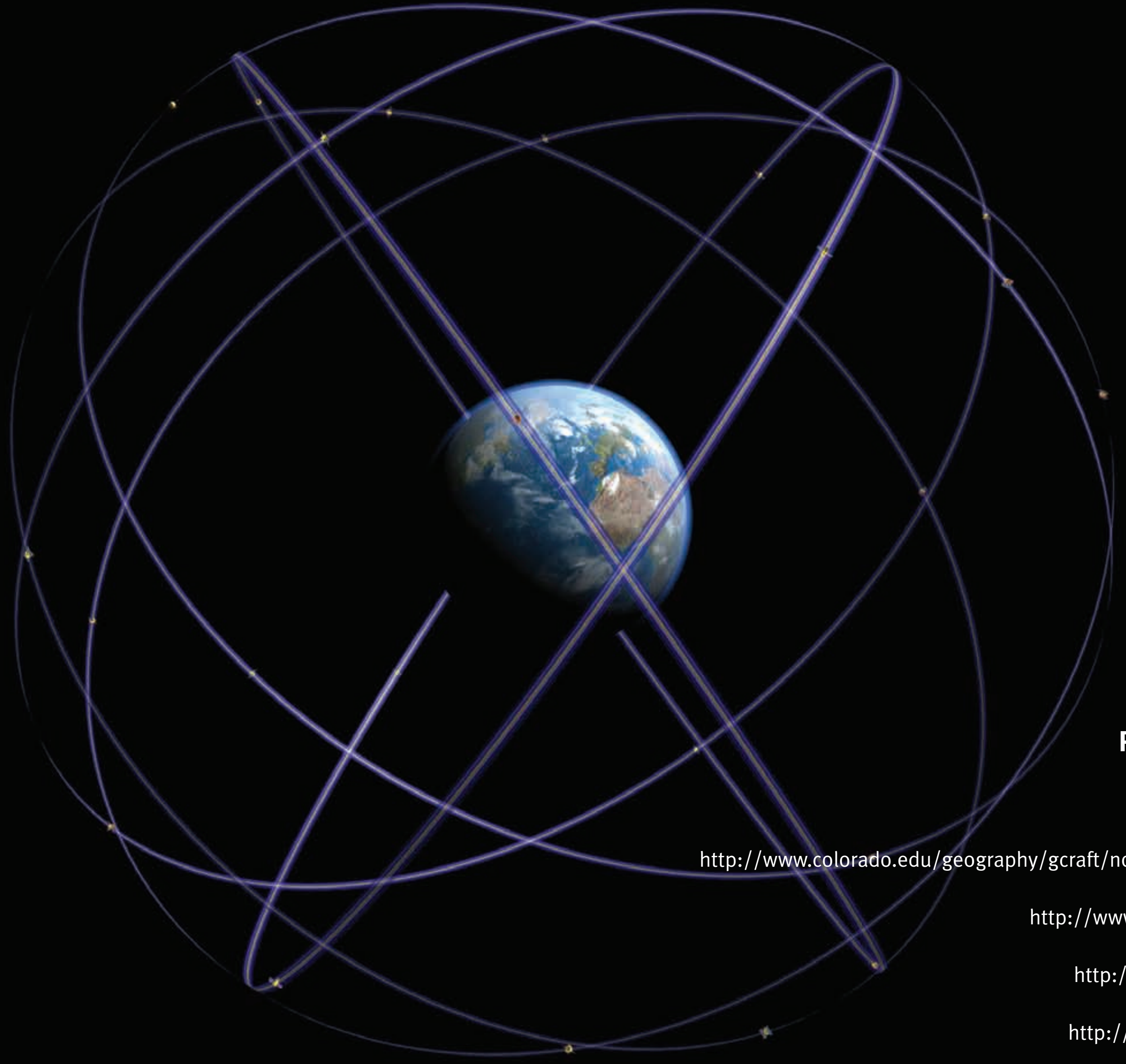


Mapas altimétricos
El Niño / La Niña bajo la mirada de Topex/Poseidón. (Yves Menard – Cnes)
Al este del Pacífico Ecuatorial: se observa una anomalía positiva del nivel del mar de más de 20 cm en 1997 (El Niño alcanza su máximo) y una anomalía negativa de 20 cm en 2000 (La Niña alcanza su máximo).

2

¡Ya llega el autobús!

Gracias al GPS, los usuarios de ciertas líneas de autobús parisinas y madrileñas esperan, felices, que pase el próximo vehículo. Desde hace pocos años, dirigen sus miradas hacia unas pantallas luminosas colocadas en las paradas en las que pueden visualizar, en tiempo real, los minutos que tienen que esperar antes de que pase el próximo autobús. En 2004, en París se habían probado 41 líneas de las 59 existentes, es decir, 2.400 paradas. Una localización mediante satélites de GPS calcula la velocidad del autobús y la hora de llegada tanto a la parada como a la terminal. Un “regulador” o una “reguladora” observa, desde cada terminal, el desplazamiento de los vehículos de la línea. En caso de mal funcionamiento, los conductores están obligados a ralentizar o acelerar para cumplir los horarios previstos, incluso de desviarse de su trayecto para evitar un embotellamiento. Pero la vigilancia mediante la utilización de satélites no ha hecho desaparecer los radioteléfonos... ¡ni su voz humana!



Vista artística de la constelación GALILEO © ESA – J. Huart

Para saber más

En Internet

http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html

http://www.esa.int/navigation

http://www.galileoju.com

http://www.gpsworld.com

http://www.insidegnss.com

http://www.mundogps.com

http://www.navcen.uscg.gov/gps

http://tycho.usno.navy.mil/gpsinfo.html

http://www.phys.lsu.edu/mog/mog9/node9.html

Las naranjas del frutero

3 – Llenar el espacio

Apilar naranjas: Resulta evidente para el frutero, pero es un auténtico rompecabezas para los matemáticos. La forma más densa posible de apilar esferas idénticas es en realidad la más simple. Este problema ya lo planteó Kepler en 1610. Aparentemente anodino, tiene aplicaciones en el estudio de los cristales o en la teoría de la codificación de los datos informáticos. Los matemáticos han tardado cuatro siglos en demostrarlo.

¿Por qué perder sus curvas?

¿Habéis observado que actualmente cada vez hay más tomates con forma de esfera aplanada? Si los agrónomos encargados de mejorarlos se interesan tanto por su forma es, simplemente, para dar respuesta a las exigencias de los transportistas. Porque, al perder sus curvas, resulta más fácil colocarlos de forma más compacta en las cajas.

Y, ¿sabéis? Los ferroviarios ejercen una profesión tan útil como desconocida: ¡afilan piedras! En efecto, los trenes de alta velocidad pulen las piedras apiladas en el balasto cada vez que pasan. Al ir redondeándose las piedras, la densidad de su apilamiento disminuye. Lo cual, por cierto, puede hacer que la vía se debilite.

La conjetura de Kepler al fin demostrada

¿Cómo llenar una caja con el mayor número posible de naranjas? ¿Cómo apilar naranjas (o cualquier otro objeto esférico) para obtener una pila lo más compacta posible? ¡Elemental!, responderéis. Y de forma casi mecánica empezaréis a colocarlas en la mesa, de forma que cada una de ellas esté rodeada por otras seis y formen un hexágono regular. Salvo en los bordes, evidentemente. A continuación, repetís la operación en la capa superior, colocando las naranjas en los “agujeros” dejados por las naranjas de la capa anterior. Tenéis la impresión de que las naranjas se colocan solas. Pero si sois buenos observadores, habréis constatado que uno de cada tres agujeros queda libre. Por lo tanto, la tercera capa puede tener dos posibles configuraciones, dependiendo de si se superpone a la primera o no. Para los puristas, el empaquetamiento recibe en el primer caso la denominación de hexagonal compacto y en el segundo de cúbico centrado en las caras (o cúbico compacto). Pero la densidad del empaquetamiento, o sea, el porcentaje de espacio ocupado por las naranjas, es el mismo en ambos casos: el 74,05%. A modo de comparación, el empaquetamiento “cúbico simple” (el de los átomos de la sal común) consigue ocupar sólo el 52,36% del espacio.

Intuitivamente, resulta difícil pensar en otro método para apilar naranjas (o cualesquiera objetos esféricos idénticos) dejando menos espacio vacío. Y con razón, ya que efectivamente se trata del mejor método. Pero para un matemático eso hay que demostrarlo y, en este punto, el asunto se complica.

Ya en 1610, el célebre matemático y astrónomo Kepler, en su correspondencia con su colega Harriot, formuló una conjetura sobre esta cuestión. Afirmó que si se procedía de este modo, “el ensamblaje será el más prieto posible, de modo que ninguna otra disposición permitirá apilar un mayor número de glóbulos en el mismo recipiente.” Aseveración anodina para un problema que no lo es tanto. Durante casi cuatro siglos, numerosos matemáticos fracasaron en sus intentos de demostrarlo. En 1901, el matemático David Hilbert incluye esta cuestión, al igual que la conjetura de Fermat o la hipótesis de Riemann, entre su célebre lista de grandes cuestiones por resolver y a las que los matemáticos se consagrarán durante el siglo XX. Hasta tal punto llegó la cosa que en 1976 John Milnor, uno de los mayores geómetras del siglo XX, que recibió la prestigiosa Medalla Fields en 1962, escribió: “Es una situación escandalosa, puesto que la solución (presumiblemente) correcta se conoce desde hace siglos. Lo único que falta es una demostración”. Habrá que esperar hasta el año 1998, para que los trabajos de Thomas Hales proporcionen por fin una demostración rigurosa. Pero, ¿por qué resulta tan difícil demostrar matemáticamente algo que parece ser de puro sentido común? En realidad, si analizamos la manera de plantear matemáticamente el problema, acertaremos a vislumbrar donde se encuentran algunas de las dificultades.

En primer lugar, hemos pensado en apilar las naranjas en una caja. ¡Es mucho más práctico, ya que así el montón no se derrumba como un castillo de naipes cuando un listillo decide probar una naranja situada en la capa de abajo! Pero, ¿qué sabemos de la forma y del tamaño de la caja? La densidad del empaquetamiento depende de cuál sea la caja. Por ejemplo, si queremos apilar naranjas de diámetro unidad en una caja cúbica de lado dos, lo mejor es colocar cuatro en el fondo y cuatro encima, de modo que los centros de las naranjas estén situados en los vértices de un cubo. Esta es la única manera de meter ocho naranjas en esta caja concreta, pero con ella sólo se obtiene la densidad del empaquetamiento cúbico simple. Advertencia a los aficionados: la cuestión del empaquetamiento óptimo en una caja con una forma cualquiera sigue sin resolver. Pero lo que pregunta Kepler no hace referencia a una caja concreta, sino a un empaquetamiento de un número “suficientemente grande” de naranjas. Dicho matemáticamente, nos preguntamos por la “densidad asintótica” de un “empaquetamiento de infinitas naranjas”.

Por otra parte, incluso olvidándonos de la caja, en el caso de una cantidad muy pequeña de naranjas, por ejemplo cuatro, todos sabemos realizar un empaquetamiento más denso que el de la conjetura de Kepler. Si colocamos tres naranjas en la mesa tocándose entre sí y la cuarta sobre el hueco que dejan las tres primeras, apoyada sobre las tres, los centros de las naranjas están en los vértices de un tetraedro regular. El porcentaje del volumen del tetraedro que resulta ocupado por naranja es del 77,96%, ligeramente mayor que el del empaquetamiento compacto. Por tanto, un empaquetamiento realizado, totalmente o en gran parte, de este modo, desmentiría la conjetura de Kepler. Una de las piedras angulares del trabajo de Thomas Hales fue, de hecho, demostrar que este tipo de empaquetamientos no existe. En cuanto se aumenta el número de esferas, éstas se “molestan” entre sí y el ahorro de espacio desaparece. Dicho de otro modo, el espacio no se puede teselar con tetraedros regulares, ni “muy parecidos a regulares”.

Thomas Hales, profesor de matemáticas en la universidad de Michigan trabajó durante diez años para conseguir la prueba de la conjetura de Kepler, reduciendo el problema al análisis de “tan sólo” 5.094 tipos de empaquetamientos (en vez de un número infinito, ése es el mérito de Hales). Con tal cantidad no es sorprendente que los cálculos generados sean titánicos, habiendo sido necesario recurrir a ordenadores extraordinariamente potentes y programas altamente sofisticados. No esperéis poder “reproducir” la prueba completa en vuestro ordenador personal. Los códigos informáticos junto con los datos necesarios ocupan cerca de tres gigabytes de memoria. La redacción formal, omitiendo los cálculos por ordenador, consta de aproximadamente 300 páginas, algunas de las cuales las escribió con su alumno de doctorado Samuel Ferguson.

Aunque hay que conceder también a László Fejes Tóth el mérito que le corresponde. El propio Hales lo hace, al dedicarle su artículo que da cuenta definitiva de la demostración, publicado en Noviembre de 2005 en la prestigiosa revista Annals of Mathematics de la Universidad de Princeton. En 1940, este matemático húngaro resolvió el mismo problema en el plano. La solución, es que el mejor empaquetamiento consiste en colocar monedas formando una red triangular, similar a la que forma cada capa del empaquetamiento compacto. Aunque es aún más obvia que la de dimensión tres, su demostracion rigurosa no había sido posible hasta esa fecha. En 1953 Laszlo Fejes Tóth da un paso más y se adentra en la tercera dimensión, consiguiendo demostrar, por primera vez, que el problema de Kepler se reduce a estudiar un número finito de tipos de empaquetamientos. Mediante astutas construcciones geométricas, plantea el problema como una cuestión de optimización de una función no lineal de cerca de ciento cincuenta variables, pero tropieza con un muro de cálculos imposibles. Thomas Hales se inspiró sin duda alguna en Tóth y utilizó construcciones geométricas similares. Pero su mérito no está sólo en el cálculo por ordenador, sino también en una simplificación del método. De hecho, la función de Fejes Tóth, en su forma original, es insoluble aún con los ordenadores de hoy en día.

En el empaquetamiento cúbico compacto, el espacio está cubierto con tetraedros regulares contiguos a octaedros regulares (sólidos de ocho caras equiláteras), sin dejar huecos y de modo que cada tetraedro es adyacente a cuatro octaedros y cada octaedro a cuatro tetraedros. El tetraedro regular está formado por los centros de tres esferas contiguas y en la misma capa formando un triángulo equilátero + una en el plano superior, sobre el hueco. El octaedro está formado por los centros de seis esferas: tres en un plano, igual que las anteriores, + tres en el plano inmediatamente superior, formado un segundo triángulo equilátero girado 60 grados con respecto al primero y de modo que su hueco queda justo encima del primero.

Al analizar sus 5.094 casos, Thomas Hales demostró que en la teselación óptima del espacio con esferas hay efectivamente ocho tetraedros junto a un octaedro, como en el empaquetamiento de Kepler.

Uno de los conceptos utilizados en la demostración de Hales es el de “celda de Voronoi”. La celda de Voronoi asociada a una esfera del empaquetamiento está constituida por el conjunto de puntos situados más cerca del centro de esa esfera que del centro de cualquier otra esfera. La celda de Voronoi incluye, por supuesto, a la propia esfera, pero incluye también parte del espacio no ocupado por ninguna esfera, que queda de ese modo repartido entre las distintas esferas.

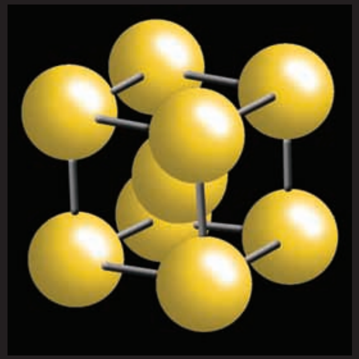
En el empaquetamiento de Kepler, la celda de Voronoi de cada esfera es un sólido limitado por doce rombos, un rombododecaedro, con el que la teselación del espacio se puede realizar sin dejar huecos. Una celda de Voronoi en forma de dodecaedro regular (formado por doce pentágonos regulares) sería más reducida y más densa. El problema es que, al igual que pasaba con el tetraedro regular, no permite teselar el espacio sin dejar huecos. Thomas Hales también estudió los poliedros formados por los centros de esferas cercanas.

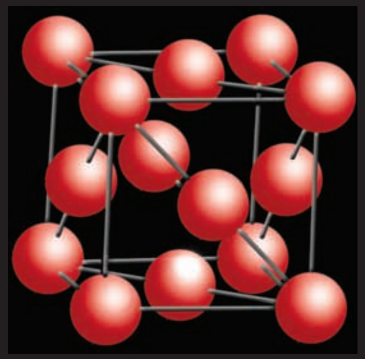
Mediante complejos métodos combinatorios, Thomas Hales consiguió convertir el problema no lineal de Tóth en una cuestión de optimización lineal, mucho más manejable en el ordenador. Eso, a pesar de que se trata de resolver unos 100.000 problemas, cada uno con unas 1.000 ó 2.000 ecuaciones y 100 ó 200 variables.

1

Empaquetamiento cúbico simple

Consideremos un cubo elemental de lado a.
Cada esfera de radio $r = a/2$, está a caballo en ocho cubos. Por lo tanto, cada cubo contiene ocho octavos de esferas, es decir el equivalente de una esfera de volumen $4\pi r^3/3 = \pi a^3/6$, lo que corresponde a una densidad de empaquetamiento de $\pi/6 = 0{,}5236$.





Empaquetamiento cúbico centrado en el cuerpo (1)

La densidad anterior mejora al espaciar las esferas de forma que se pueda añadir una esfera más en el centro de cada cubo. La diagonal grande del cubo, de longitud $a\sqrt{3}$, es igual a $4r$. Por lo tanto, $r = a\sqrt{3} / 4$. El cubo contiene 8 octavos de esferas + una esfera completa situada en su centro, es decir, 2 esferas de radio r, con volumen total $2 \times 4\pi r^3/3 = \sqrt{3}\,\pi a^3/ 8$. De ahí, la densidad del empaquetamiento es igual a, $\sqrt{3}\pi / 8 = 0{,}6802$.

Empaquetamiento cúbico de caras centradas (2)

En este caso, el cubo elemental contiene 6 medias esferas, centradas en el centro de cada cara, y 8 octavos de esferas centradas en los vértices, es decir, 4 esferas en total. El radio r de cada esfera, es decir, la distancia media entre un vértice y el centro de una superficie adyacente, es igual a $a\sqrt{2}/4$. La densidad, igual a $\pi/\sqrt{18} = 0{,}7405$, es máxima y corresponde al empaquetamiento de Kepler.

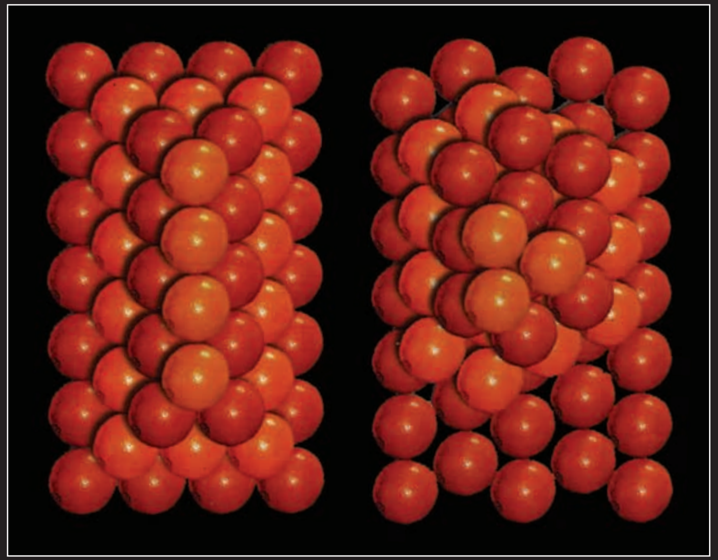
Empaquetamiento hexagonal compacto

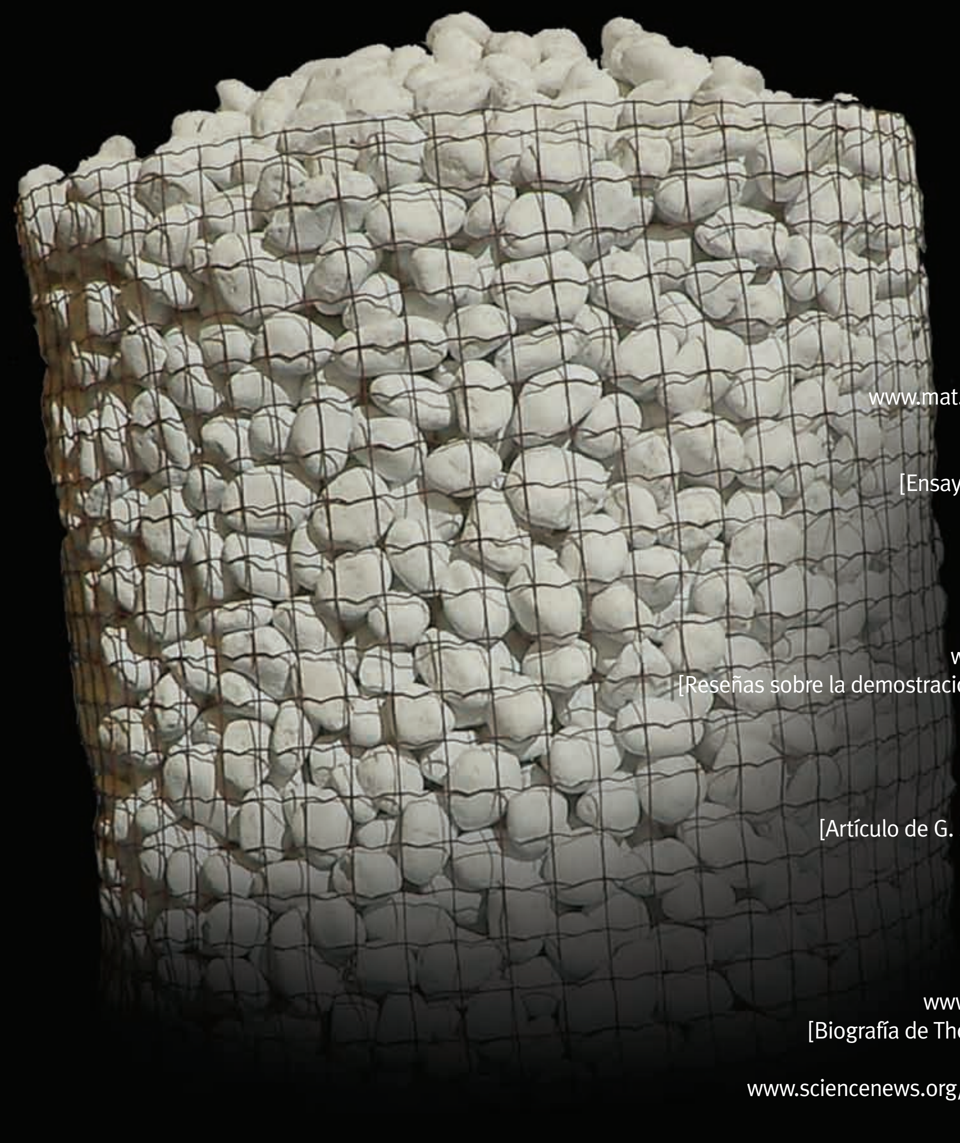
Se apilan capas de esferas colocadas hexagonalmente, presentando cada una de las capas un desfase respecto a sus capas adyacentes. Una vez más, la densidad es máxima, siendo ésta igual a $\pi/\sqrt{18} = 0{,}7405$.

2

De la pila de naranjas a las codificaciones informáticas

Los empaquetamientos de esferas también sirven para elaborar códigos eficaces de transmisión y reproducción de datos informáticos. Un código informático es una sucesión de ceros y unos, de longitud n, que permite detectar, e incluso a veces corregir, un error de transmisión. Cuando se produce un error, un código válido se vuelve inválido, lo que permite localizar el error. Si, con un poco de suerte, sólo existe un único código válido lo suficientemente similar al código inválido recibido, se puede encontrar su valor correcto sin necesidad de volver a transmitir los datos. Por lo tanto, estas codificaciones informáticas resultan altamente útiles en el sector de las telecomunicaciones.
Si nos situamos en un espacio de n dimensiones $[0,1]^n$, escribir el código informático correcto equivale a encontrar puntos en este espacio lo suficientemente alejados entre sí. Es en este punto cuando los empaquetamientos de esferas son de gran ayuda.
De hecho, una sucesión de puntos en un espacio de n dimensiones cuyas coordenadas son siempre 0 ó 1, se puede asociar a una familia infinita de puntos alejados entre sí mediante el procedimiento de periodización. Consiste en asociarles todos los puntos cuyas coordenadas difieren en un factor 2. Colocando esferas lo más grandes posible en el centro de todos estos puntos, se obtiene un empaquetamiento. Por norma general, el empaquetamiento de las esferas será más denso, cuanto más eficaz sea la codificación.





Para saber más

En Internet

www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/griffithsgaceta/griffithsgac.html

www.esi2.us.es/~mbilbao/mathmill.htm
[Ensayo de P. Griffiths “Las Matemáticas ante el cambio de milenio”]

www.elpais.es/articulo/elpfutpor/20060104elpepifut_1/Tes

www.divulgamat.net/berriak/berriakdetailea.asp?Id=35

www.iescarrus.com/edumat/prensa/art2003/art2003_04.htm
[Reseñas sobre la demostración de la conjetura de Kepler, publicadas en "El País" y "ABC"]

www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/
[la web de Thomas Hales dedicada a la conjetura]
plus.maths.org/issue23/features/kissing/
[Artículo de G. Szpiro sobre la conjetura de Kepler y problemas relacionados]
mathworld.wolfram.com/KeplerConjecture.html

www.ams.org/notices/200004/fea-hales.pdf
[Artículo divulgativo de Hales en "Notices of the AMS"]

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Harriot.html
[Biografía de Thomas Harriot. Explica cómo se interesó Kepler en el problema]

www.sciencenews.org/articles/20040214/fob7.asp [Empaquetamiento de lacasitos]

En libros y revistas

Empaquetamiento de Esferas, N. J. A. Sloane, en Investigación y Ciencia, Marzo 1984, 88-99.

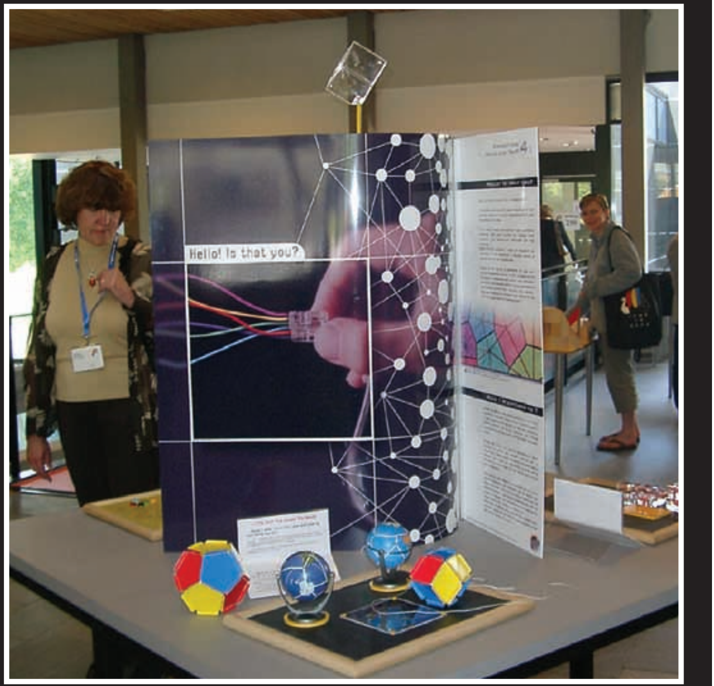
Johannes Kepler, Empaquetamientos de esferas y el concepto matemático de demostración,
T. Recio y F. Santos, Fotografiando las matemáticas. Ed. Carroggio. Barcelona. 2000.

Kepler's Conjecture, George G. Szpiro, John Wiley & Sons, 2003.

Cannonballs and Honeycombs, T. Hales, Notices Amer. Math. Soc. 47, 440-449, 2000.

El teléfono fijo: la red es lo que importa

4 – Unir mediante una línea



Lo realmente importante es la red. Por muy fantástica que sea, la invención del teléfono fijo habría caído en el olvido si no hubiera sido posible conectar los terminales entre sí, de un extremo al otro del mundo. Las redes telefónicas se han convertido en laberintos de aspecto inextricable y, sin embargo, operativos. La teoría de grafos, las probabilidades, la geometría y el cálculo informático, todos ellos diferentes campos de las matemáticas, se unen para construir y desenmarañar el laberinto.

Sí, ¿dígame?

Las matemáticas juegan a ser Ariadna para tejer y descifrar la telaraña de la enorme red que conecta todos los teléfonos fijos del planeta.

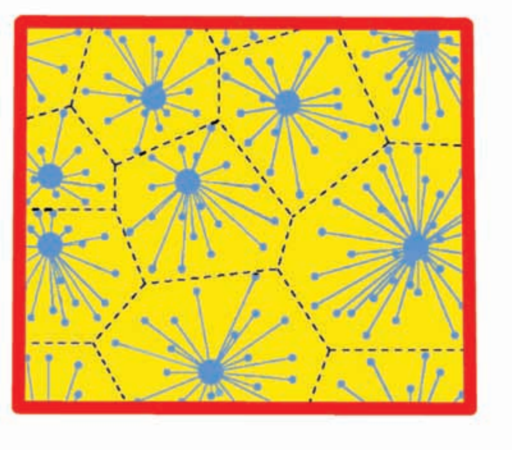
¿Tan sencillo como un telefonazo? No tanto. El uso del teléfono fijo se ha vuelto tan habitual que encubre la complejidad de la red que conecta a todos los usuarios del planeta. Y ya no sorprende a nadie que inmediatamente después de haber tecleado algunas cifras en su terminal, pueda oír contestar a su interlocutor o el mensaje de un contestador. Prácticamente, nos hemos olvidado que, hasta finales de los años setenta, en algunos lugares de España, las operadoras conectaban manualmente las llamadas de las personas que deseaban hablar a través de microteléfonos. Es a partir de esta fecha cuando la red telefónica española pasa a ser totalmente automática... y que el uso del teléfono se democratiza y, por fin, entra en la mayoría de los hogares. Las centralitas telefónicas de los hoteles, con sus pequeños cuadros conmutadores, o los actuales interfonos nos dan una idea de lo que eran las primeras redes de telefonía.

Las matemáticas dividen los cables

Al principio, el número de usuarios era lo suficientemente pequeño como para poder conectarles entre sí físicamente, mediante cables. Pero, cada nuevo usuario requiere instalar líneas hacia todos los demás. Y muy rápidamente, este procedimiento resultó impracticable.

La solución que se halló consiste en conectar a cada usuario, mediante una línea única, con un centro de conmutación, en el que las operadoras, escogidas en aquel entonces por su intachable moralidad, establecían las conexiones entre usuarios de una misma zona, o entre el usuario y la operadora de la zona de la que dependía la persona a la que se llamaba. Las diferentes centralitas estaban conectadas con cables, tal y como lo están actualmente, por otra parte. A modo de anécdota, cabe mencionar que en algunos países se organizaban concursos de eficacia para mejorar la calidad del servicio. El record se acercaba a 400 conexiones por hora, lo que supone una comunicación cada diez segundos... Afortunadamente, este trabajo tan repetitivo ya no existe. Las etapas de conexión son ahora automáticas, y se efectúan mediante conmutadores electrónicos, pero el principio es prácticamente el mismo.

(fig. 1) Diagrama de Voronoi



• Conmutadores
• Usuarios
_____ Cables
-------- Fronteras de las zonas de conexión

Hoy en día, cuando realizamos una llamada, nuestra solicitud se transmite a través de cables al conmutador telefónico más cercano a nuestro domicilio. Todos los conmutadores de la zona están conectados entre sí y se transmiten la información de conmutador en conmutador hasta llegar al más cercano al domicilio de nuestro interlocutor. Este último relevo va a “dar la orden” para que suene su teléfono.

Sin embargo, los operadores telefónicos se enfrentan a varios problemas. En primer lugar, un conmutador no puede procesar un número demasiado alto de llamadas simultáneas y resulta difícil determinar el número de hilos que contienen los cables interurbanos que conectan los centros de conmutación. La modelización matemática de la red y la utilización de estadísticas y previsiones del tráfico permiten a los operadores de telecomunicaciones llevar a cabo su misión... aunque, de vez en cuando, una voz suave repite sin cesar, *“por sobrecarga en la red, no es posible realizar su llamada”*.

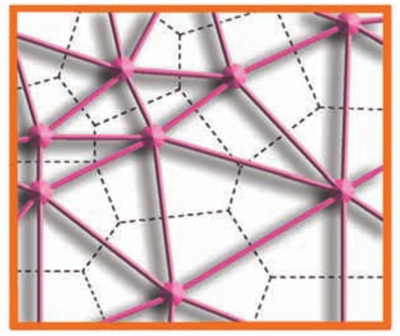
A la hora de construir la red y determinar el número de hilos de los cables, se da prioridad a las comunicaciones locales. De hecho, los usuarios llaman sobre todo a usuarios geográficamente próximos, y a usuarios de otra localidad del mismo país. En último lugar, se encuentran las llamadas internacionales. El sistema que consiste en conectar dos terminales mediante un circuito compuesto por varias porciones de hilos se denomina *conmutación de circuitos*. Y durante una conversación, aunque permanezcamos callados como un muerto, movilizamos un circuito entero. El operador debe hacer previsiones para que sus circuitos se gestionen de forma óptima y que la red disponga de una geometría variable, con el fin de poder hacer frente a las futuras necesidades. Si fuese necesario añadir conmutadores, ¿cuántos y dónde los colocaría? El campo matemático que permite construir una red así se llama la teoría de grafos (véase el texto página 22).

Tomemos el caso de una ciudad, ya que las llamadas locales son más numerosas y consideremos un modelo realista de la misma, en este caso su plano. Se decide situar al azar los conmutadores telefónicos en el mapa. De hecho, si hubiéramos optado por colocarlos de un modo determinado, respetando la topología preexistente de las calles, nos encontraríamos ante un número tan elevado de parámetros que no podríamos realizar ningún cálculo en el modelo obtenido. Paradójicamente, en matemáticas, resulta a veces más fácil realizar cálculos con un conjunto de puntos repartidos aleatoriamente, siempre y cuando impongamos determinadas reglas. Las que aparecen a continuación permiten determinar el ”modelo matemático” de la red en la que los operadores telefónicos van a poder operar.

¿Cuáles son estas reglas? Se supone que todos los usuarios pueden llamar a cualquier otro usuario, en cualquier momento. Por lo tanto, independientemente de su localización en la ciudad, todos los usuarios deberían tener las mismas posibilidades de tener un conmutador en un radio de 100 metros, por ejemplo. En una calle cualquiera, el número medio de conmutadores es proporcional a la longitud de la misma. Por último, vivir cerca de un conmutador no significa que un amigo que viva cerca tenga menos posibilidades de tener también un conmutador junto a su casa.

Ahora, pasemos a repartir a los usuarios de las líneas. En un momento t, no podemos saber donde se encuentran todas las personas que están llamando. Por lo tanto, vamos a colocarlas a ellas también al azar en el mapa de la ciudad, imponiéndoles las mismas condiciones, a nivel aleatorio, que a los conmutadores. Además, suponemos que las posiciones de las personas son independientes de las posiciones de los conmutadores.

(fig. 2) Triangulación de Delaunay



• Conmutadores
_____ Red de conmutadores
------ Fronteras de las zonas de conexión

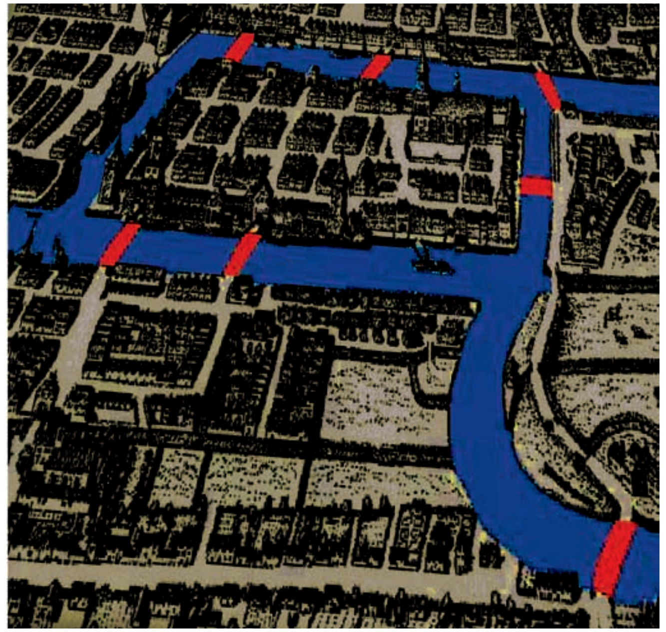
El reparto anterior de conmutadores y usuarios genera dos subdivisiones geométricas diferentes del mapa de la ciudad, y proporciona, en una primera aproximación, la red telefónica de la aglomeración.

Así, cada conmutador da servicio a una zona determinada de la ciudad en la que todos los usuarios se encuentran más cerca de ese conmutador que de cualquier otro. Esta zona, llamada zona de “conexión”, está delimitada por las mediatrices de los segmentos que Interconectan dicho conmutador con los demás. Por consiguiente, cada zona está asociada a un polígono convexo. El conjunto de los mismos proporciona una teselación del plano de la ciudad, denominada diagrama de Voronoi (fig. 1).

Por otro lado, si unimos todos los conmutadores vecinos, la teselación del plano que se obtiene es un mosaico diferente que recibe el nombre de triangulación de Delaunay (fig. 2). Cuando realizamos una llamada, ésta se transmite al conmutador que gestiona la zona de conexión en la que nos encontramos. Las dos subdivisiones anteriores optimizan el recorrido que debe seguir la llamada hasta llegar a su destinatario. La conexión de los conmutadores se realiza a través de los cables representados por la triangulación de Delaunay hasta que el mensaje llegue a la zona en la que se encuentre el destinatario de la llamada.

Actualmente, con el fin de satisfacer, entre otras cosas, las necesidades de la telefonía móvil, algunos matemáticos están estudiando modelos de grafos más complejos en los que las teselaciones de Voronoi y la triangulación de Delaunay varían aleatoriamente. Las matemáticas siguen jugando a ser Ariadna para que llamar por teléfono resulte tan fácil como apretar un botón.

Los 7 puentes de Königsberg

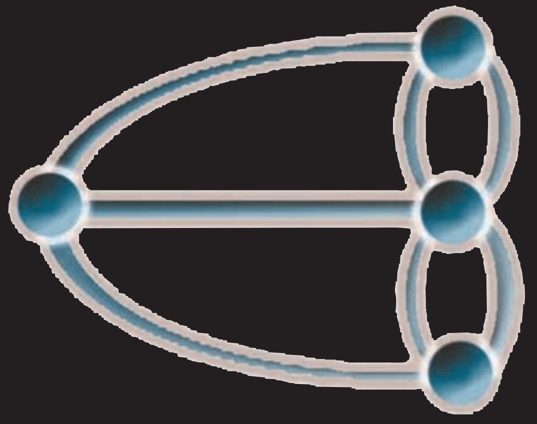


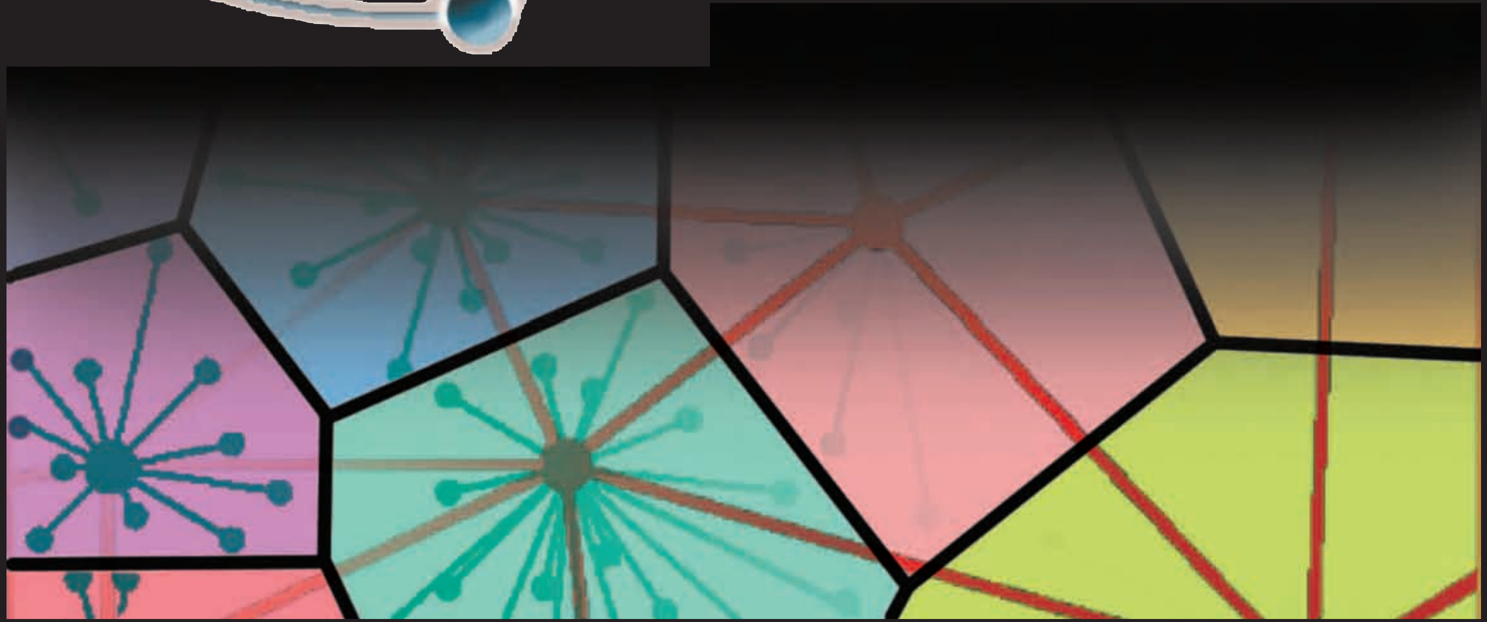
1

Siete puentes: el nacimiento de una teoría

Hacia el año 1700, los habitantes de Königsberg, ciudad portuaria de Prusia oriental situada aproximadamente a 250 Km al norte de Varsovia, se planteaban extrañas cuestiones.
Se preguntaban si un paseante podía recorrer la ciudad, la actual Kaliningrado, en Rusia, pasando una vez, y sólo una vez, por cada uno de sus puentes, y volviendo al punto de partida. Königsberg tenía en aquella época siete puentes, que unían las cuatro zonas de la ciudad delimitadas por el recorrido de su río. Sus habitantes desgastaron las suelas de sus zapatos en vano, hasta que el gran matemático suizo Euler se adueñó del acertijo.

La respuesta es negativa: es imposible realizar un circuito así. Este recorrido sólo existe si a cada uno de los puntos llega un número par de caminos. Un paseante que llegue a un vértice deberá seguir por un puente que no sea el mismo por el que haya llegado. En el grafo, esto se traduce en el hecho de que a un vértice se debe asociar un número par de aristas. Sin embargo, la configuración de los puentes de Königsberg no cumplía esta condición. La resolución de este problema dio origen a una nueva disciplina matemática, la teoría de grafos cuya importancia no ha dejado de crecer.
Esta teoría no interesa únicamente a los matemáticos puros. Nuestra vida cotidiana está inmersa en los grafos que permiten, por ejemplo, representar circuitos electrónicos, gestionar de forma óptima el tráfico rodado, las fases de un proceso de fabricación o la organización de la red telefónica o la de Internet.





Para saber más

En internet

www.ucm.es/info/hcontemp/leoc/telefono.htm
[historia del teléfono]

www.telephonymuseum.com/history.htm
[Museo de telefonía]

En los libros

Introducción a la Teoría de Grafos, Robin G. Wilson, Alianza, 1983.

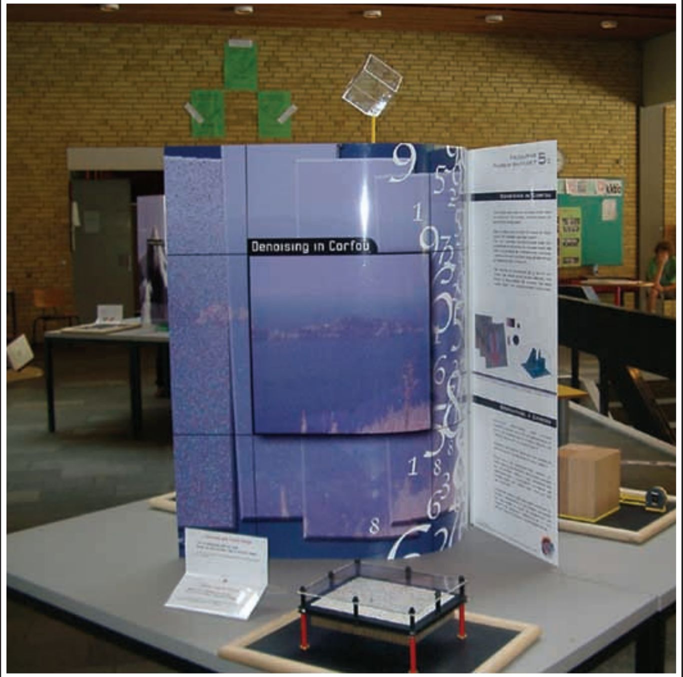
Matemática discreta, Norman L. Biggs, Vicens Vives, 1994.

Computational Geometry - Algorithms and Applications, Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Schwarzkopf, Springer-Verlag, 1997.

Handbook of Regular Patterns: An Introduction to Symmetry in Two Dimensions, Peter S. Stevens, MIT Press, 1992.

Imágenes muy calculadas

5 – ¿Por qué calcular?



Vivimos en un mundo sumergido en imágenes digitales. Pero el recorrido entre la imagen real y la imagen reproducida está lleno de obstáculos. Las imágenes son objeto de numerosos tratamientos matemáticos antes de tener un buen aspecto, frecuentemente sin que el usuario lo perciba. El tratamiento digital de las imágenes y de la información en el sentido más amplio (por ejemplo, los sonidos) es un campo de investigación cuya importancia crece continuamente, con un amplio abanico de ecuaciones matemáticas, de hábiles representaciones de la imagen en forma de líneas de nivel y de teorías recientes, como la teoría de las ondículas.

Eliminación de ruido en Corfú

¿Quién hubiera podido imaginar que una imagen hiciera ruido? ¿Qué el más mínimo de sus pequeños defectos, manchas o desenfoques se elevara como si de un sonido se tratara?

Para volverla silenciosa, dicho de otra manera, dejarla suave como una imagen, la tratamos aplicando ecuaciones en derivadas parciales, como la ecuación del calor.

Para una imagen en blanco y negro, esto se reduce a considerar que todos los puntos son interdependientes. Entonces, el nivel de gris de cada punto es una media ponderada de los niveles de gris de los puntos vecinos. Asimismo, este método se extiende fácilmente a las imágenes en color. Sin embargo, los bordes y los contornos constituyen el talón de Aquiles de este método, ya que se desenfocan aún más. Se remedia mediante técnicas de suavizado que no utilizan todos los puntos vecinos.

Del desenfoque al suavizado: ecuaciones para un lifting

Vivimos bajo el dominio de las imágenes, del mundo digital y de las telecomunicaciones. Pero sin un tratamiento matemático apropiado, una gran parte de las imágenes reproducidas o transmitidas sería de pésima calidad.

Una sonda envía imágenes perfectas y emocionantes del planeta Marte, que se pueden seguir en tiempo real, desde la Tierra, sentados frente a la pantalla de televisión. A través de webcams, algunos actores de reality show con falta de inspiración, comparten su vida soñada, sublimada segundo a segundo en el ordenador. Un malvado paparazzi, como tiene que ser, armado con su microcámara digital roba, a la velocidad del rayo, la foto de una estrella sorprendida en buena compañía en las islas Caimán o en Corfú.

Una imagen de Corfú sin ruido.

Se apresura a enviarla desde su teléfono móvil último modelo a la redacción de la revista para la que trabaja. Mañana será portada de todos los periódicos. Y podremos distinguir, de forma "muy nítida", la intensidad de las miradas e incluso el color de la laca de uñas...

Sin embargo, el recorrido entre la imagen "real" y la imagen "reproducida" está lleno de obstáculos. La mayoría de las veces, las imágenes deben soportar condiciones perturbadoras antes de alcanzar su aspecto final. Algunas viajan a través del espacio en condiciones extremas, bajo el bombardeo de los rayos cósmicos. Siguen estando sujetas a una posible negligencia por parte del fotógrafo que podría dejar que se acumulase polvo en el objetivo, así como a la mala calidad de la transmisión o recepción de los datos digitales que la componen a través de Internet...

A menudo se "comprimen", es decir, se transforman tras la digitalización para ocupar menos espacio antes de su transmisión. Tan sólo falta tratarlas tras su recepción para que recuperen su "frescura" inicial, e incluso mejorarlas.

Además de la compresión y la restitución de imágenes, el tratamiento atañe a la restauración de fotos, de películas antiguas o de cualquier imagen en la que una parte de la información se haya perdido o no esté disponible, al análisis de las fotos aéreas o por satélite, a la visión de los robots, a las imágenes médicas, al reconocimiento automático de la escritura, a la detección de defectos en los componentes industriales, etc.

Imagen en nivel de gris

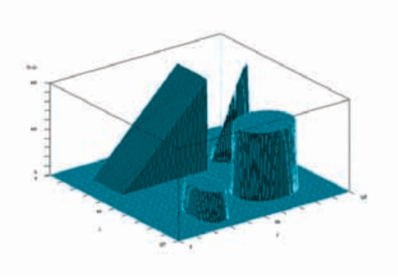
Volvamos ahora a nuestra "revista del corazón". El editor gráfico recibe la foto de la estrella en su ordenador, con el logotipo JPEG-2000. Históricamente, estas iniciales designan a un grupo de expertos internacionales, el *Joint Photographic Expert Group*, que estudió las normas de intercambio de archivos de imágenes. Al mismo tiempo, JPEG designa la norma de compresión de imágenes más habitual en Internet, sobre todo gracias a su última versión, la JPEG-2000, fruto de las investigaciones de matemáticos.

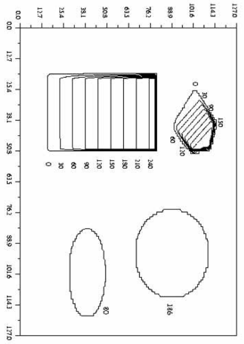
Consideremos una imagen digitalizada. Se compone de 512x512 puntos (píxeles), cuyos niveles de gris pueden variar entre 0 (negro) y 255 (blanco). (En el caso de las imágenes en color, se asocian tres valores a cada punto que corresponden al nivel de rojo, de verde y de azul). Cada uno de los 256 niveles posibles de gris se puede representar por un octeto, es decir, un número binario de 8 bits (0 ó 1). Codificar esta imagen requiere 512x512x8 = 2.097.152 bits, lo que es enorme. Este número se puede dividir por 8, con dos únicos valores para el nivel de gris, blancos o negros, codificados en forma de 0 ó 1. La imagen resultante está degradada en grado sumo. Sin embargo, con JPEG-2000 (software integrado en el ordenador), la imagen se codifica 32 veces menos, pero con un nivel de degradación imperceptible. En lugar de reducir la precisión, se trastoca el modo de "jerarquización" de la información visual. La idea clave de este procedimiento es que la información visual está "jerarquizada mediante las escalas". Un ejemplo sencillo: partiendo de una imagen digital, se pueden distribuir los niveles de gris en cuadrados de 2x2 píxeles, luego de 4x4 píxeles, luego de 8x8 píxeles y así sucesivamente. Para cada imagen "aproximada" obtenida de ese modo, la de nivel dos veces más fino se deduce del nivel inmediatamente inferior. Por lo tanto, se puede reconstruir la imagen "paso a paso" hasta llegar total o prácticamente a la imagen inicial.

En los años 70, las necesidades de la prospección petrolífera francesa desembocaron en descomposiciones de este tipo. Un ingeniero geofísico muy ingenioso, Jean Morlet, desarrolló un método matemático, “la transformada de ondículas” para estudiar el subsuelo. En los años 80, Yves Meyer se apropia de este método y lo mejora para satisfacer las necesidades de la conformación de imágenes, aunque pronto se vio superado por una multitud de investigadores, entre los que se encuentran Stéphane Mallat e Ingrid Daubechies.

Sus trabajos desembocaron en el estándar JPEG-2000. Por lo tanto, detrás de la mayoría de las imágenes que viajan por Internet, viaja un poco de la investigación matemática.

El grafo de I en 3D y en líneas de nivel





Volvamos, una vez más, al editor gráfico de la “revista del corazón”. Ha recibido la foto en formato JPEG-2000, pero no se puede utilizar porque está borrosa localmente y llena de pequeñas manchas. Estas pequeñas imperfecciones de una imagen digital reciben el nombre de ruido. El fotógrafo tiene buenas excusas: hizo la foto muy deprisa mientras el personaje famoso le lanzaba su vaso (de agua) al objetivo. El editor gráfico no pierde los nervios. Pone en marcha un software muy común en el mercado y “elimina el ruido de la imagen” en un instante, a lo sumo algunos segundos. Tras borrar las imperfecciones y suavizar la imagen, ésta recupera su nitidez y se puede utilizar. ¿Cómo ha sido posible?

Varios métodos de filtrado de imágenes son posibles. Por ejemplo, se puede modelizar la imagen que se vaya a tratar, es decir, describirla de otro modo, de una forma propicia a su posterior tratamiento. Es decir, en lugar de asociar a cada punto (x,y) de la imagen, su nivel de gris I(x,y), se dibuja el gráfico de la función de dos variables (x,y). Esto supone asociar a cada punto “la altitud” de su nivel de gris. De este modo, la imagen digital se transforma en un conjunto de líneas de nivel y adopta el aspecto de una superficie parecida a un relieve de montañas. Los cartógrafos utilizan este tipo de representaciones para realizar mapas topográficos. Esta representación permite obtener fácilmente algoritmos de tratamiento eficaces.

La imagen digital a tratar, eventualmente transformada en líneas de nivel, se considera como una función I_0 que asocia a cada punto (x,y) de la imagen, la altura de su nivel de gris. Eliminar el ruido consiste en encontrar una función I a partir de la función I_0, que represente una imagen más nítida.

Por lo tanto, se supone que la función I depende de tres variables, x e y (como I_0) y de una tercera variable que expresa el nivel de suavizado t. En el caso de la imagen inicial t = 0.

En una primera aproximación, se puede considerar que el nivel de gris de cada punto es una media ponderada de los niveles de gris vecinos. Es el modo de suavizado más sencillo, calcado sobre la ecuación de difusión del calor. Del mismo modo que en un material, el calor se difunde progresivamente de un punto a otro, y tiende a repartirse uniformemente, se puede imaginar la “difusión” gradual de los niveles de gris. De esta forma, se reducen las grandes diferencias de niveles de gris y el nivel global de gris es más uniforme, como si se hubiesen borrado las pequeñas imperfecciones de la imagen.

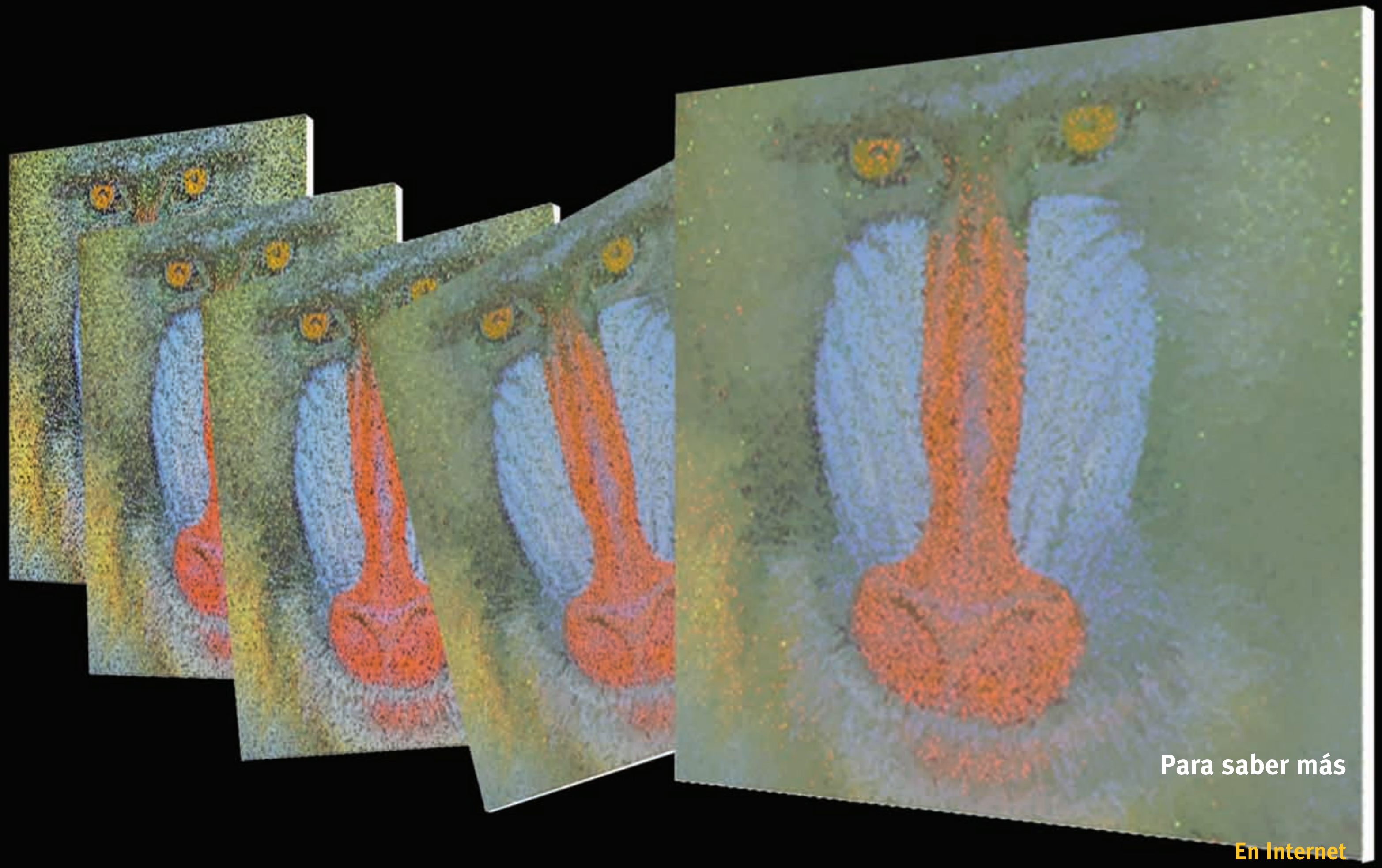
Pero, al igual que en el caso de la compresión de imágenes, (véase el texto en página 27), los bordes constituyen el problema principal. El método de suavizado anteriormente descrito hace que los bordes y los contornos se difuminen. Por ello, los matemáticos modificaron uno de los términos de la ecuación del calor para que no se produzca la difusión a nivel de los contornos. Sustituyeron uno de sus términos por una expresión en la que interviene el gradiente de la función I, que mide su nivel de variación y su dirección (el gradiente es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de I con respecto a las variables x e y). El resultado que se busca es una difusión anisótropa, es decir, que no se produce del mismo modo en todas las direcciones. Las imágenes sometidas a este “lifting”, no tienen prácticamente ningún “ruido”, y se han vuelto “matemágicas”.

Marte©Nasa-Esa

1

De las “ondículas” a las “bandículas”

Cuatro jóvenes matemáticos procedentes del Centro de matemáticas aplicadas de la École polytechnique francesa han elaborado recientemente la “teoría de las bandículas”, base del nuevo formato de compresión Let It Wave. El método consiste en comparar series de imágenes y utilizar estructuras geométricas que se repiten, como por ejemplo, el contorno de los ojos. La mayor parte de la información se encuentra en estrechas “bandículas”, situadas alrededor de los contornos. Una fotografía de identidad codificada con sólo 500 octetos está nítida con el formato Let It Wave y borrosa con JPEG-2000. En un futuro cercano, la foto de identidad podrá guardarse en un chip o en un código de barras. Próximamente, van a proliferar sus aplicaciones: desde la comprobación de los documentos de identidad hasta las tarjetas de acceso a los aeropuertos.



Para saber más

En Internet

www letitwave.fr/ (Nuevos trabajos sobre las ondículas, en inglés)

En los libros

Stéphane Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes,* Éditions de l'Écale polytechnique. París, 2000.

Yves Meyer, *Ondelettes et algorithmes récurrents,* Ed. Hermann. París.1992.

Nonlinear subdivisions schemes: applications to image processing, A.Cohen y B. Mattei, Tutorial on multiresolution in geometric modelling, A. Iske, E.Quack and M. Floater Ed., Springer, 2002.

Total Variation Minimization for Scalar & Vector Image Régularisation, F. Dibos, G. Koepfler y Pascal Mollasse, in Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics, Ed. S. Osher et N. Paragios, Springer Verlag, 2003.

La curva de las autopistas

6 – Construir

Nadie se asombra de que cuando un tren de alta velocidad toma una curva no sintamos mariposas en el estómago. No sentimos las sacudidas de un lado a otro del tren bajo el efecto de una aceleración intempestiva. Incluso, podemos leer este catálogo sin ningún problema. El tren se desliza sobre los raíles sin derrapar descontroladamente. No se deforma. No se estrella contra el suelo.

Del mismo modo, un conductor puede abandonar la autopista sin sobresaltos, con una fluidez digna de un conductor profesional, sin aferrase al volante o luchar contra la fuerza centrífuga que lógicamente debería afectarle.

Estos desplazamientos se han convertido en "largos ríos tranquilos" gracias a una hermosa espiral: la espiral de Cornu o clotoide.

Entradas y salidas nada "estrafalarias"

Cuando un automovilista desea abandonar la autopista, debe reducir su velocidad progresivamente y modificar su dirección. La solución más cómoda para el piloto consiste en proponerle una curva que pueda tomar a velocidad constante girando el volante a velocidad constante: describe así una espiral incompleta. Al contrario, cuando el automóvil entra en la autopista, sale de una espiral cuya curvatura disminuye gradualmente hasta seguir una trayectoria en línea recta. Entonces se incorpora "sin estrés" a la marea de coches.

La Clotoide o la espiral de la tranquilidad

Para reducir los accidentes, ¿qué curvas utilizar en la construcción de las autopistas, de los ramales de conexión, de las vías de ferrocarril o de las pistas de algunos deportes sobre hielo? Recientemente, la espiral de Cornu, también llamada clotoide, ha dado con la solución.

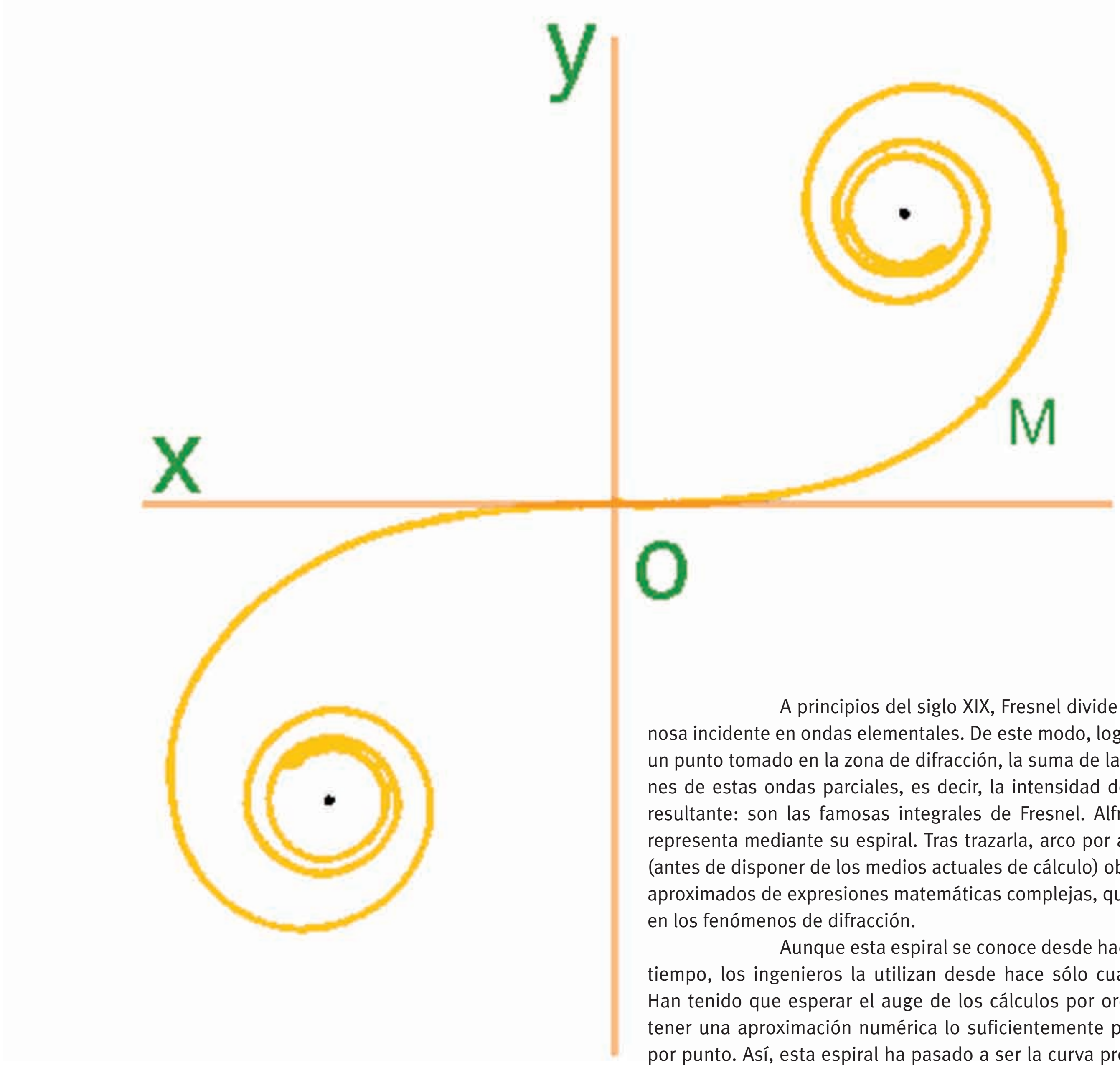
Contrariamente a las ideas preconcebidas, las curvas utilizadas para construir las autopistas y las líneas de trenes de alta velocidad no sólo se componen de rectas y arcos de círculos. Supongamos, en efecto, que la carretera esté mal diseñada, y que tras un tramo en línea recta aparezca súbitamente un arco de círculo de radio r. La aceleración del vehículo que se desplaza a una velocidad constante v pasaría bruscamente de un valor nulo al valor v^2/r. Los pasajeros sufrirían fuertes sacudidas, la carrocería estaría sometida a peligrosos esfuerzos, y el número de accidentes sería mayor.

En la forma ideal, cuando un vehículo aborda una curva, debería poder seguir desplazándose a la misma velocidad sin que el conductor tenga que luchar con el volante. Éste gira el volante a velocidad constante. La única trayectoria que proporciona esta tan buscada "constancia" es una espiral, la clotoide.

Para vencer este obstáculo, los ingenieros realizan las conexiones utilizando porciones de curvas, llamadas curvas de transición, que permiten pasar progresivamente de una curva con curvatura nula, es decir, una recta, a una curva con curvatura constante dada, un círculo, o a la inversa. Intuitivamente la curvatura es una función que nos mide cómo se "curva" nuestra curva en cada punto. La curvatura de una recta es, por supuesto, nula en todo punto, mientras que la curvatura de un círculo es la misma para todos sus puntos e igual a $1/r$, siendo r el radio de la misma. Esta noción se puede ampliar a una curva lisa cualquiera: dado un punto P de una curva, se consideran todos los círculos tangentes a la curva en dicho punto, algunos, con radios muy grandes, son tangentes exteriormente, y otros, con radios muy pequeños, son tangentes interiormente. Entre estas dos familias, existe un círculo tangente que es el más cercano a la curva en el punto P (el círculo osculador). Si el radio del círculo osculador en P es r, entonces la curvatura de la curva en ese punto es $1/r$ (o r es el radio de curvatura).

Volvamos a la construcción de la curva ideal para el conductor o el aficionado a deportes sobre hielo. La propiedad que define a la curva de transición como aquella que favorece la conducción, que nos permite circular de una recta a un círculo sin sufrir las consecuencias de la fuerza centrífuga, se convierte en la propiedad geométrica $s \cdot r = a^2$, donde s es la longitud de la curva, r el radio de curvatura y a es un parámetro de la clotoide. Esta propiedad, la curvatura de la curva crece proporcionalmente a la distancia recorrida, hace que la curva sea una doble espiral. Podemos observar su forma en las fotografías aéreas de intersecciones de autopistas. Vemos como describe una espiral de dos polos que se estrecha a medida que nos alejamos del origen, al igual que los resortes de un reloj mecánico. Otros ven la forma del hilo que se enrolla en una rueca. De ahí procede su nombre, ya que clotoide se deriva del griego *klothein* (hilar). Y con carácter anecdótico, de las tres Parcas, Cloto era la que hilaba el destino de los hombres con un hilo llamado tiempo. Aquí, uno de los polos se enrolla en un sentido mientras que el segundo se enrolla en sentido contrario... Toda una filosofía, la del tiempo que avanza y el tiempo que retrocede.

Las Tres Parcas. Marco Bigio. Palacio Barberini. Roma.



Históricamente, aparece con otros nombres, como la radioide de los arcos, la espiral de Euler o la espiral de Fresnel. Sin embargo, el primero que se dedicó de pleno a ella no le dio su nombre. Ya en 1705, Jacques Bernoulli la estudia para sus trabajos de óptica. Este gran amante de todo tipo de espirales declara su amor por estas curvas hasta en su tumba, decorada con una espiral logarítmica.

El físico francés Alfred Cornu (1841-1902) introduce la curva que lleva su nombre para representar las integrales de Fresnel con motivo de sus trabajos sobre la difracción de la luz.

A principios del siglo XIX, Fresnel divide la onda luminosa incidente en ondas elementales. De este modo, logra evaluar, en un punto tomado en la zona de difracción, la suma de las contribuciones de estas ondas parciales, es decir, la intensidad de la vibración resultante: son las famosas integrales de Fresnel. Alfred Cornu las representa mediante su espiral. Tras trazarla, arco por arco, permitía (antes de disponer de los medios actuales de cálculo) obtener valores aproximados de expresiones matemáticas complejas, que intervienen en los fenómenos de difracción.

Aunque esta espiral se conoce desde hace muchísimo tiempo, los ingenieros la utilizan desde hace sólo cuatro décadas. Han tenido que esperar el auge de los cálculos por ordenador para tener una aproximación numérica lo suficientemente precisa, punto por punto. Así, esta espiral ha pasado a ser la curva preferida de los ingenieros encargados de construir los caminos "de alta tecnología", así como la de los robots. La clotoide también interviene en el cálculo del camino más corto entre dos puntos. Un robot situado en un punto A, debe dirigirse a un punto B. Si está mirando en otra dirección, no da media vuelta. Sería demasiado peligroso para él. Su camino se construye mediante la yuxtaposición de pequeñas porciones de clotoides. Cuando está mirando hacia B, el asunto es más sencillo ya que hay tomar el segmento de recta AB. ¡La clotoide también les gusta a los robots...!

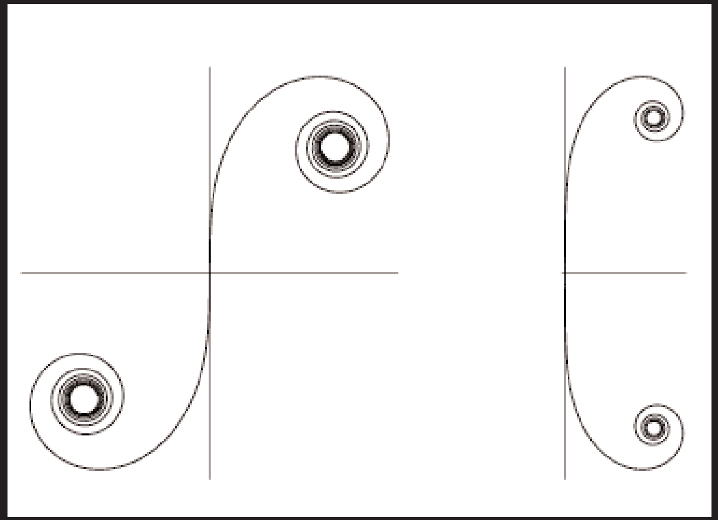
1

Ecuación para una curva admirable

Si se designa r el radio de curvatura en cada punto, esta curva tiene la propiedad característica de que su curvatura (1/r) es proporcional a la longitud del arco(s) desde el origen O. Es decir, el producto r • s es constante, lo que conduce a una curva parametrizada definida por las integrales de Fresnel en el intervalo (o,t), siendo t › o: la clotoide (o espiral de Cornu):

$$x(t) = a\sqrt{\pi}\int_0^t cos(\frac{\pi s^2}{2})ds, \quad y(t) = a\sqrt{\pi}\int_0^t sen(\frac{\pi s^2}{2})ds$$

Esta curva resulta muy difícil de trazar ya que se desconocen las primitivas de las funciones cos(t^2) y sen(t^2).



2

Tan sólo hay que cruzar el puente...

El puente más largo, el más alto, el más elegante, el más esbelto... Todos los países siempre han rivalizado por tener las obras más impresionantes. Pero, ¡no ha llovido desde los primeros puentes de troncos!... Para construirlos, todo el mundo, desde los primeros edificadores a los ingenieros de la época romana, desde el Renacimiento a la época actual, se ha basado en las curvas matemáticas, parábolas, elipses, clotoides o espirales de todo tipo. Actualmente, gracias al desarrollo de los materiales y métodos de análisis matemáticos, los puentes poseen mayores dimensiones y más belleza.

Entre ellos, podemos citar al Storebaelt East Bridge en Dinamarca. De los 6790 m de este puente, lo que representa la mayor travesía marítima por carretera y ferrocarril del mundo, casi 2.7 km toman la forma de puente colgante, cuyo vano central de 1624 m de luz es el segundo mayor del mundo. Además, con 254 m sobre el nivel del mar, las dos pilas del Storebaelt East Bridge son los puntos más altos de Dinamarca. Una altura espectacular que se ha visto superada por el Viaducto de Millau en Francia, cuyos pilares alcanzan los 343 metros.

Diseñado por el arquitecto inglés Sir Norman Foster, este puente multiarriostrado constituye el último eslabón de la autopista A75 Clermont-Ferrand - Béziers. Compuesto por finas pilastras, de esbeltas líneas, y un tablero muy ligero, roza el valle en tan sólo siete puntos. Una proeza técnica hecha realidad gracias a la realización de mediciones sofisticadas, particularmente vía satélite GPS, y... a la utilización de curvas matemáticas. Las siete pilastras de hormigón presentan una variación constante de su geometría con una sucesión de áreas oblicuas y ángulos que evolucionan de forma imperceptible, y adquieren un aspecto de un diapasón endiabladamente esbelto. Con una base de 200 m^2, la sección de cada una de las pilastras disminuye con la altura y se divide en dos ramas finales con una superficie de carga total de 30 m^2 en la parte superior. En ellas descansa el tablero, así como los pilotes metálicos de 90 m de altura. Los ingenieros han pensado en todo... Incluso en el hecho de que el suelo no se vea para evitar que los conductores sientan pánico o vértigo.

El viaducto de Millau©Eiffage&El Storebaelt East Bridge©Vagn Lundsgaard Hansen &Niels J.Gimsing

Para saber más

En Internet

www.mathcurve.com
(información sobre curvas en castellano)

www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html
(diccionario visual de curvas famosas, inglés)

www.fosterandpartners.com
(página del arquitecto Norman Foster, inglés)

www.greatbuildings.com
(exhaustiva página web sobre arquitectura, obras y arquitectos, inglés)

En los libros y artículos

Curvas en la historia (vol. 1 y 2), José Manuel Álvarez Pérez, Nivola, 2006.
[exhaustivo estudio de las curvas que se han hecho famosas a lo largo de la historia]

Gaudí. La busqueda de la forma, D. Giralt-Miracle (editor), Lunwerg Ed., 2002.
[curvas y superficies en la obra de Gaudí; ver exposición y catálogo en www.seacex.es]

El vientre del Arquitecto, Raúl Ibáñez, Un Paseo por la Geometría, UPV, 2004.
[curvas y superficies en Arquitectura, ver en la sección Textos-on-line de www.divulgamat.net]

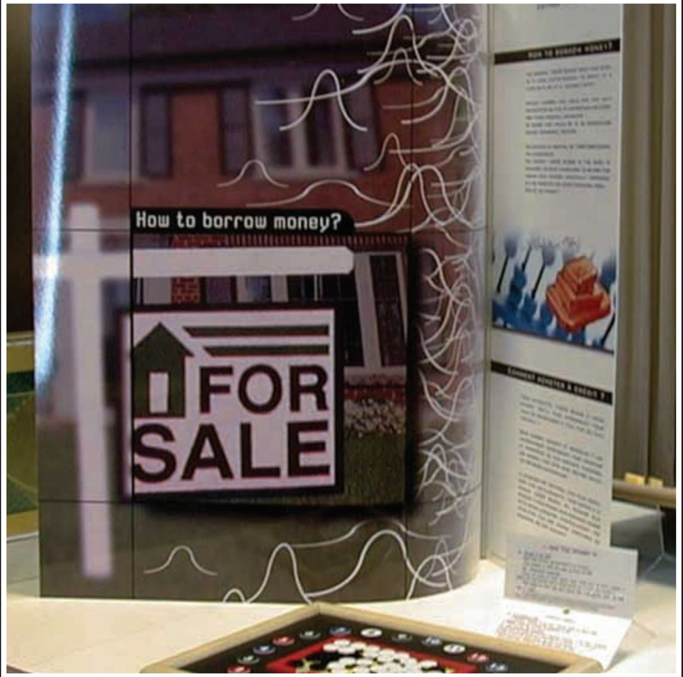
Architects+Engineers=Structures, Margolis, Wiley-Academy, 2002.

El libro de las curvas, P. Olalquiaga, A. Olalquiaga, Fundación Esteyco, 2006.
[libro visual sobre las curvas en las matemáticas, la naturaleza, la música, la ingeniería, la arquitectura, ver en www.esteyco.es]

Breve introducción a las estructuras y sus mecanismos resistentes, Florencio Regalado, CYPE Ingenieros, 1999.
[sencillo libro sobre estructuras geométricas para la arquitectura de puentes, arcos, cubiertas,...]

Matemáticas: una buena inversión

7 – Calculando



La fortuna de los banqueros, compañías de seguros y otros operadores financieros no tiene nada que ver con la suerte. Al contrario, se debe más bien a su capacidad para dominar el azar y cubrir los riesgos de pérdidas financieras. No lo consiguen con fórmulas mágicas sino que recurren de manera cada vez más explícita a las matemáticas punteras, como la teoría de procesos estocásticos y fórmulas sofisticadas. La fórmula de Black-Scholes y Merton reina desde principios de los años ochenta en el sector financiero y bancario. Incluso, se podría considerar como el origen del auge notable alcanzado por varias plazas financieras. Lo que demuestra, si aún es necesario hacerlo, el poder de las matemáticas y, sobre todo, su carácter actual.

Una cobertura muy suave

El sector aeroespacial vende sus aviones en dólares, pero paga a sus empleados en euros.

Aunque una empresa sepa que va a percibir 1.000 millones de dólares en octubre de 2005, no tiene ninguna certeza sobre el importe correspondiente en euros en dicha fecha.

Debe obligatoriamente cubrirse frente a los tipos de cambio dólar/euro.

Paradójicamente, no recurrir a ningún producto financiero supondría un riesgo considerable para la empresa...

Para protegerse, y gracias a determinadas fórmulas matemáticas, puede utilizar una opción de compra en euros que le garantiza un tipo de cambio mínimo.

La bolsa bajo la garantía de las matemáticas

Parece que ha terminado la época en la que un buen inversor podía contentarse con ser listo, tener buen olfato y sentido de los negocios... El inversor actual sueña con una “especulación asegurada” y deja sus asuntos financieros en manos de fórmulas matemáticas como la de Black-Scholes y Merton.

Cualquier inversor que se precie, hace malabarismos con términos como opción negociable, volatilidad de una acción, fluctuación del mercado o teoría del arbitraje, de forma que está aplicando matemáticas. Por lo que aplica matemáticas difíciles, como si del señor Jourdain, aquel personaje de Moliere, se tratara, que escribía en prosa sin saberlo... o casi.

De hecho, todos los programas informáticos financieros utilizan desarrollos matemáticos relativamente recientes, como la fórmula de *Black-Scholes y Merton*, elaborada en 1973 por el dúo Fisher Black y Myron Scholes, por una parte, y Robert Merton, por la otra. Hoy en día, es más conocida en las plazas bursátiles que el propio teorema de Pitágoras, y supuso el premio Nobel de Economía de 1997 a Scholes y Merton (Black había fallecido). Pero, ¿cuántos entendidos saben que esta fórmula se deriva de un cálculo con ecuaciones diferenciales estocásticas? ¿Que la volatilidad, término que utilizan varias veces al día, designa el coeficiente que describe la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones de una cotización respecto a su valor medio en esta misma ecuación?

Esta ecuación ha permitido a los financieros ofrecer una serie de productos atractivos como, por ejemplo, las opciones de compra o de venta, que han despertado la vena bursátil en mucha gente. ¡Cómo resistirnos a la llamada de nuestro banquero cuando nos promete el oro y el moro! Es decir, cuando nos ofrecen un fondo de inversión garantizado con el que aparentemente, nunca se puede perder dinero.

Sin embargo, todo el mundo sabe que los banqueros no son filántropos... Obviamente, esta garantía de ingresos no es gratuita, pero ¿cómo determinar su precio? Es necesario tener en cuenta los riesgos y las fluctuaciones de las cotizaciones, en un mercado cada vez más amplio e inextricable debido a la mundialización. No es sencillo, y aquí es donde intervienen la fórmula de *Black-Scholes* y *Merton* y sus derivadas, ya que son ellas las que fijan este precio.

En primer lugar, tomemos el ejemplo, algo prosaico, del agricultor. Sus ingresos son aleatorios y están sometidos a múltiples imprevistos. El hecho de que la cosecha sea demasiado buena, no resulta tan bueno para sus negocios: las cotizaciones se derrumban y tiene que vender por debajo del precio de producción. Está a merced de las variaciones climáticas, de diferentes disturbios socioeconómicos como las huelgas o las crisis sanitarias imprevistas. La crisis de las vacas locas demostró que la cotización de la carne de vacuno puede caer un 80% en algunos meses. Para no correr el riesgo de arruinarse, tiene interés en firmar una opción de venta con un operador del mercado.

Este último se compromete, con varios meses de antelación, a comprarle la producción en un momento T, a un precio mínimo C, que se fija en el contrato de opción. Pero el agricultor es libre de vender o no. ¿Puede imaginar un sistema mejor?

Llegado el momento T, dos casos son posibles.

Sea C’ el precio de mercado en el momento de la venta. Evidentemente, el agricultor ejercerá la opción únicamente si le resulta favorable, es decir:

Si C’‹ C, ejerce su opción y vende al precio C fijado en el contrato, realizando un beneficio, la plusvalía, que es igual a C-C’.

Si C‹ C’, no ejerce su opción y vende al precio de mercado. Por lo tanto, la opción de venta es una especie de contrato de garantía frente a la caída de las cotizaciones.

Y al revés, la opción de compra es una garantía frente a la subida de las cotizaciones.

Es necesario precisar que el operador del mercado se compromete a pagar los flujos de caja estipulados en la opción, tanto si se ejerce como si no en el instante T.

El principio de la opción es tan antiguo como el “mundo”... del comercio. Aristóteles cuenta la historia de la fortuna de Tales, sí, el del famoso teorema... Los malpensados veían en su pobreza la prueba de la inutilidad de la filosofía y de las matemáticas. Con el fin de refutar sus argumentos, se lanzó a los negocios y, basándose en oscuras predicciones astrológicas, declaró que la siguiente cosecha sería buena. Nadie le creyó. Por lo tanto, alquiló con antelación, todas las prensas de la región, abonando una señal mínima. La cosecha fue abundante y las subarrendó al precio que quiso, por lo que se enriqueció. Tales estaba en situación, al igual que el comprador de una opción, de ganar mucho dinero sin correr el riesgo de perder mucho. En cualquier caso, demostró que los matemáticos se pueden enriquecer fácilmente si así lo desean y no son tan sólo espíritus puros.

Ni que decir tiene que las opciones de hoy en día se encuentran en un contexto mucho más sofisticado, pero su filosofía sigue siendo la misma: “arriesgar poco para ganar a veces mucho”. Ya que, como todo el mundo sabe, quien no se arriesga no pasa la mar y no se puede ganar dinero de forma segura sin invertir. En la jerga de los matemáticos especializados en finanzas, esta afirmación de puro sentido común se denomina ausencia de oportunidades de arbitraje. Históricamente, la Bolsa siempre ha asignado una “ prima de riesgo” a las acciones, un modo de inversión particularmente aleatorio, pero a la larga muy rentable. Así, 1 dólar invertido en la Bolsa estadounidense en 1802 hubiese tenido en 1997 un valor de 7,5 millones de dólares si se hubiese invertido en acciones; un valor de 10.744 dólares, si se hubiese invertido en obligaciones; 3.679 dólares, si se hubiese invertido en bonos del Tesoro, y tan sólo 11,17 dólares, si se hubiese invertido en oro. Este ejemplo demuestra que, a largo plazo, el rendimiento corresponde al riesgo que asume el inversor. Con las acciones, corre más riesgos que con las opciones. Una opción, como ya hemos visto anteriormente, “transfiere” el riesgo (a un banco o a otro inversor). En cierto modo, la opción pretende eliminar en parte los imprevistos y el azar que, sin embargo, son inherentes a los mercados bursátiles y al comercio en el sentido más amplio de la palabra.

La evolución en el tiempo del precio de una mercancía y de la cotización de una acción depende de un número tan elevado de factores que resulta imprevisible y “desordenada”, al igual que el “movimiento browniano”. A modo anecdótico, al botánico escocés Robert Brown le gustaba contemplar a través del microscopio, partículas de polen inmersas en agua. Estas incontables partículas chocan entre sí y con las moléculas del líquido en el que están inmersas que, a su vez, están sometidas a agitación térmica. En 1827, dio su nombre a dicho movimiento totalmente aleatorio de las moléculas.

Debido a las innumerables transacciones efectuadas por un elevado número de operadores, la cotización de una acción negociada en Bolsa fluctúa, en una primera aproximación, análogamente al movimiento browniano. En 1900, el matemático francés Louis Bachelier tiene la idea de asociar las fluctuaciones de la Bolsa con el movimiento browniano, mucho antes de que Einstein elabore su ecuación del calor. En aquella época Louis Bachelier fue considerado como un “loco encantador” y sus trabajos cayeron en el olvido: a veces resulta difícil tener razón antes que los demás...

La fórmula de *Black-Scholes y Merton,* tan habitual hoy en día en el sector financiero, se deriva de herramientas matemáticas recientes, en concreto, del cálculo estocástico desarrollado hacia 1945 por el japonés Kiyosi Itô, desarrolladas para estudiar el movimiento browniano y la ecuación del calor de Einstein.

A este nivel, cabe precisar, aún a riesgo de complicarlo más, que la fórmula de *Black-Scholes y Merton* no proporciona, de forma tan precisa, el precio de la opción. Es el mercado el que dicta su ley. Se aplica junto a otra fórmula matemática, llamada fórmula de cobertura, que permite crear una cartera de acciones apropiada para disponer, al vencimiento, del importe correspondiente a la prima a abonar.

Además, el movimiento browniano, por muy complejo que sea, sólo describe de manera aproximada las fluctuaciones del mundo bursátil.

Los matemáticos investigan, por lo tanto, otros modelos, menos simplificadores. En particular, el modelo *Black-Scholes* y *Merton* parte de los supuestos de tipos de interés, de niveles de riesgos o de tasas medias de rendimiento, constantes en el tiempo. Durante estos últimos años, dicho modelo se ha beneficiado de las aportaciones de la teoría fractal o de nuevas herramientas como las “ecuaciones diferenciales estocásticas retrógradas”. Y, sorprendentemente, estas herramientas desarrolladas para las necesidades del sector financiero, aportan luz a complejas cuestiones de geometría como las de las fronteras libres que, por ejemplo, aparecen en la deformación de un cubo de hielo cuando se funde. Ya no se sabe si las matemáticas son dinero o al revés.

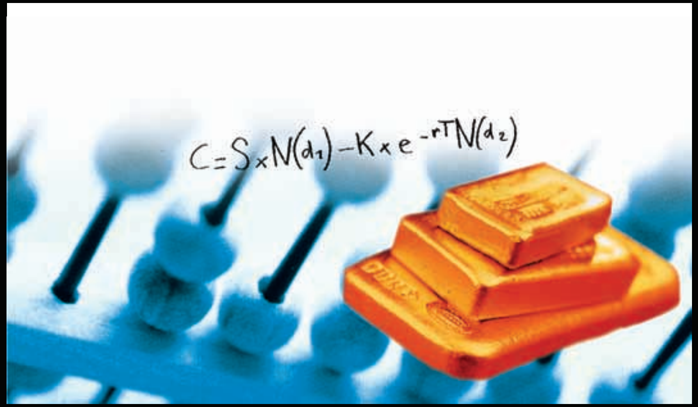
1

El modelo de Black-Scholes y Merton

Supongamos que queremos fijar el precio de una opción relativa a una determinada mercancía o a una determinada acción bursátil cuya cotización en el momento t es igual a S_t. El modelo de Black-Scholes, utilizado para evaluar el precio de la opción, parte de la hipótesis de que, entre el momento t y el momento t + dt, la cotización S_t experimenta una variación relativa $[S_{t+dt} - S_t]/S_t$ igual a la suma de dos términos: µdt, que es un incremento no aleatorio que representa la “tendencia” general del mercado; y, $S[B_{t+dt} - B_t]$, que corresponde a una fluctuación aleatoria e imprevisible de tipo browniano (B_t representa un proceso browniano, es decir, una magnitud análoga a la de la posición, en el momento t, de una partícula que experimenta un movimiento browniano a lo largo de una línea recta).
Siendo la ecuación obtenida la siguiente:

$$dS_t/S_t = \mu dt + s dB_t$$

donde, µ y s son constantes. Si tomamos dt infinitamente pequeño, esta expresión corresponde a una ecuación diferencial cuya “incógnita” es la cotización S_t. De hecho, se trata de una “ecuación diferencial estocástica”, ya que interviene un proceso aleatorio o “estocástico”, el proceso browniano B_t.



Para saber más

En los libros

Options, futures and other derivatives, John Hull, sexta edición, 2006, Prentice Hall [edición castellana: Introducción a los mercados de futuros y opciones, P.H., 2002]

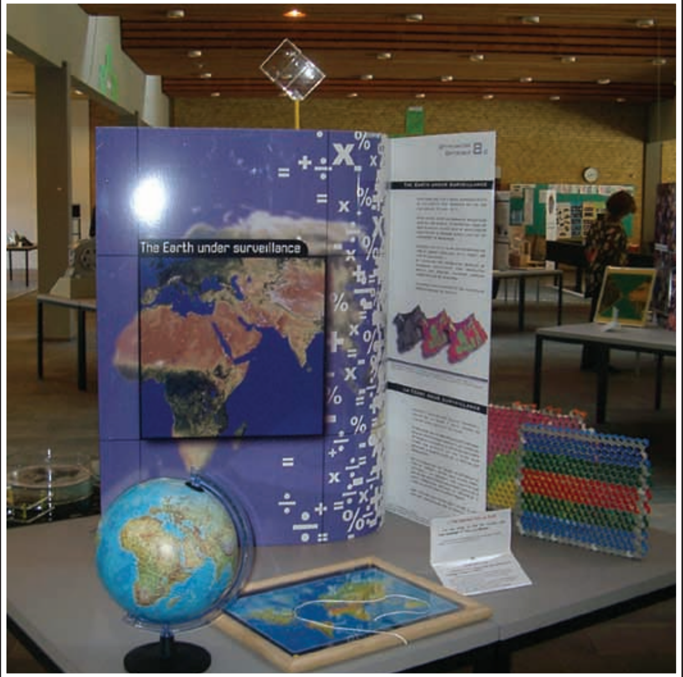
Les marchés fractals, Jacques Lévy-Véhel, Christian Walter, PUF, París 2002.

Martingales et marchés financiers, Nicolas Bouleau, Ed. Odile Jacob, París 1998

Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering, Paul Wilmott, John Wiley & Sons Inc. 1998.

¿Por qué nos mienten los mapas?

8 – Optimización



A lo largo de la Historia de la Humanidad, esta ha sentido la necesidad de representar la Tierra (o parte de ella) en una superficie plana, un mapa. Sin embargo, los cartógrafos se encontraron con un problema, ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra? Tras varios siglos de historia, los matemáticos encontraron la respuesta (Euler 1775): no se puede representar la Tierra en una superficie plana de forma correcta, es decir, no existe ningún mapa que nos permita medir distancias, áreas, ángulos, que nos muestre el camino más corto entre dos puntos y que preserve las formas de los territorios. Cuando diseñamos un mapa hay parte de la información que se pierde y sólo parte de la información (ángulos, áreas, caminos más cortos,...) puede mantenerse. ¿Y cuál es el mejor mapa? Ninguno...cada mapa preserva ciertas propiedades que lo hacen útil para unas actividades y no para otras.

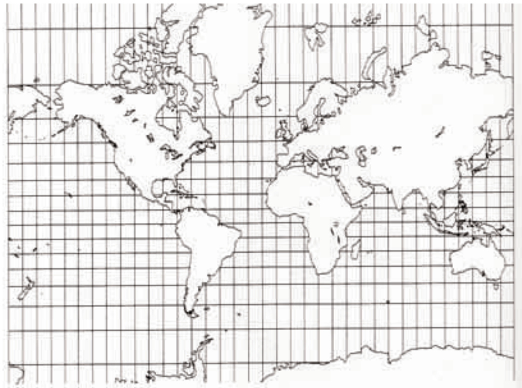
No utilicemos mapas sino globos terráqueos...

Mientras que no es posible diseñar mapas de la Tierra (o de parte de ella) de una forma fiable, el globo terráqueo constituye el modelo reducido ideal. En él se preservan, salvo el factor de tamaño, es decir, la escala, todas las propiedades métricas mencionadas (ángulos, áreas, caminos más cortos, formas, distancias,...). Entonces, ¿por qué no utilizamos los globos terráqueos en las actividades de la vida cotidiana? Importantes e insalvables desventajas descartan su utilización: I) su producción es muy compleja y cara, especialmente a grandes tamaños; II) frágil, abultado, de difícil manejo, transporte y almacenamiento; III) complicado de manipular para tomar medidas y ángulos, y nada práctico para mostrar detalles; IV) completamente impracticable para hacer reproducciones por medio de impresión o electrónicamente...

La verdad de los mapas

Los mapas son objetos familiares que forman parte de nuestra vida cotidiana. Los encontramos a diario en periódicos, revistas, libros, noticiarios, programas culturales o divulgativos de la televisión, películas, anuncios publicitarios, medios de transporte y están también muy presentes en muchos de nuestros trabajos. Hay mapas políticos, urbanos, topográficos, morfológicos, científicos de diferentes clases (botánicos, geológicos, climatológicos, geográficos,...), económicos y estadísticos, artísticos, catastrales, para la navegación marítima o aérea, de comunicaciones (ferrocarril, carretera,...), y muchos más. Sin embargo, se produce la paradoja de que son objetos cotidianos pero desconocidos para la mayoría de las personas de nuestra sociedad, incluidos los propios matemáticos.

(fig. 1)

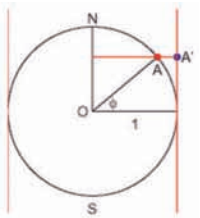


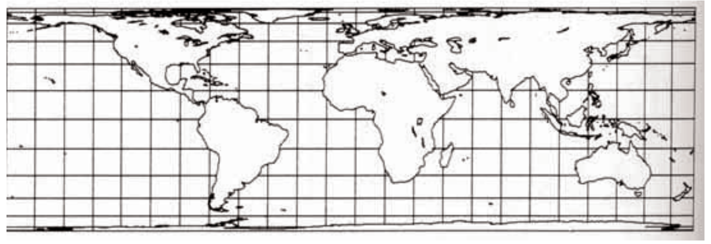
Tomemos un mapamundi, por ejemplo el más conocido (ver figura 1), que se obtiene con la proyección de Mercator. ¿Qué camino han de seguir los aviones transcontinentales para viajar de Washington D.C. a Madrid (o Baku)?. Como todo el mundo sabe que el camino más corto entre dos puntos del plano es la recta, la respuesta que obtendremos es viajar hacia el este a lo largo del paralelo 40, sin embargo, en la esfera el camino más corto entre dos puntos cualesquiera es el círculo máximo que pasa por dichos puntos (recordemos que los círculos máximos de la esfera se obtienen como la intersección de esta con los planos que pasan por su centro) y en este caso, su imagen en el plano no es el paralelo 40. Por este motivo, los aviones suben hacia el norte y después descienden hacia el sur siguiendo el círculo máximo.

Por otra parte, ¿Cuál es la distancia entre dos puntos cualesquiera de la Tierra?. En estos casos, medimos la distancia en el mapa y utilizamos la escala indicada en el mapa para obtener la supuesta medida. Sin embargo, por lo comentado anteriormente, tendríamos que medir en el plano la longitud de la curva imagen del círculo máximo y no la de la recta. Aun así, el resultado que se obtendría seguiría siendo incorrecto, y esto se debe a que nuestro mapa no preserva las longitudes de las curvas, no preserva las distancias, y en realidad, no se puede hablar de la escala como algo uniforme a lo largo de todo el mapa. Cuestionemos ahora si el área es preservada en la proyección de Mercator. Como es bien conocido Groenlandia aparece en este mapa demasiado grande, mostrándose incluso un poco más grande que África, sin embargo, la realidad es que Groenlandia tiene una extensión de 2.175.600 km^2 y África de 29.800.000 km^2, luego se produce una distorsión muy fuerte en el área. Finalmente, preguntemos si los mapas preservan los rumbos, las direcciones, en definitiva, los ángulos. Este mapa sí lo hace, ese es uno de sus valores, pero existen otros que no, como por ejemplo, el que se obtiene con la proyección ortográfica, es decir, la imagen de la tierra desde el cielo infinito.

Como vemos los mapas son falaces, pero es más, existe un gran número de representaciones planas diferentes. J. Snyder en su libro “Flattening the Earth” menciona unas 265 proyecciones distintas.

Mapas que preservan el área. En 1772 el matemático J.H. Lambert diseña el mapa isoareal, que se obtiene al proyectar la superficie de la Tierra sobre el cilindro tangente a esta en el ecuador haciendo uso de la proyección de Arquímedes (ver figura 2), y luego se despliega el cilindro en un plano. Este mapa tiene las siguientes propiedades: I) es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas; II) los meridianos y los paralelos son rectas que se intersecan ortogonalmente; III) preserva las áreas, pero no preserva ni los ángulos ni las geodésicas (esto se debe a que la distorsión que produce esta proyección lo que hace es estirar los paralelos y de forma inversa encoger los meridianos); IV) la distorsión en las formas, ángulos y distancias, es muy pequeña cerca del ecuador, pero mayor según nos acercamos a los polos.

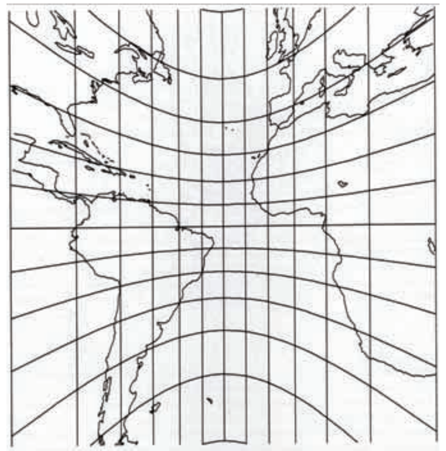




(fig. 2)

La propiedad de preservación de las áreas es normalmente la propiedad prioritaria para mapas con información basada en áreas de territorios y también en mapas de interés general, ya que los mapas son un instrumento para transmitir información “de un vistazo”, de forma más rápida y precisa que una tabla de números, y en este sentido es importante tener mapas que mantengan las proporciones de las áreas de los territorios. En general, nos encontramos este tipo de mapas en divulgación científica, en la educación o en los medios de comunicación, aunque desafortunadamente en muchas ocasiones se utilizan los mapas sin ningún criterio objetivo. También, este tipo de mapas suelen ser utilizados en pósteres de mapamundis para colgar en las paredes. Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers, la de Mollweide, la ortográfica de Gall-Peters, la de Eckert IV, la proyección azimutal isoareal de Lambert o la proyección de Sanson-Flamsteed.

Mapas que preservan los caminos más cortos, las geodésicas. Haciendo uso de la proyección central que proyecta la Tierra desde su centro y sobre el plano tangente a un punto de la misma, por ejemplo el norte, se puede diseñar un mapa (ver figura 3) cuyas características son: I) su imagen es circular y solamente cubre una parte de uno de los hemisferios; II) esta proyección es la única que preserva las geodésicas, pero no distancias, ángulos o áreas; III) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.



(fig. 3)

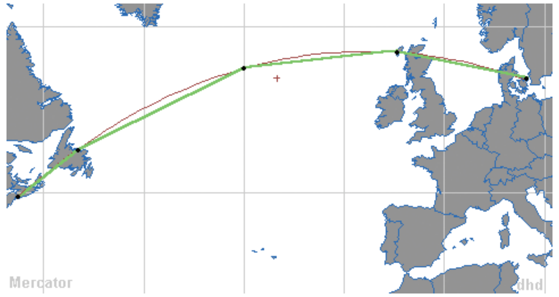
Esta proyección es claramente útil en navegación, aérea o marítima, y suele usarse en combinación con la proyección de Mercator. También es útil en meteorología o cristalografía. La proyección central ha sido utilizada para diseñar mapas tipo estrella y también mapas sobre superficies poliédricas.

Mapas conformes. Para que una proyección preserve los ángulos la distorsión que se produce en la dirección de los meridianos y de los paralelos debe de ser la misma. Por este motivo si estiramos el mapa de Lambert en la dirección norte-sur de forma que la distorsión en la dirección de los meridianos sea la misma que tenía este mapa en la dirección de los paralelos obtendremos un mapa conforme, el mapa de Mercator (ver figura 1).

El mapa de Mercator es sin lugar a dudas el mapa más familiar para todos nosotros. Este fue diseñado por el cartógrafo flamenco Gerhard Kremer (Gerhardus Mercator es su nombre latinizado), 1512-1594, y publicado en 1569 bajo el título "Una nueva disposición de los meridianos con referencia a los paralelos". El mérito de Mercator fue construir un mapa útil en la navegación marítima (en parte heredero de los antiguos portulanos) donde los instrumentos utilizados eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y, por supuesto, la brújula. No hemos de olvidar que era una época de grandes viajes, de descubrimientos, y los navegantes y viajeros necesitaban mapas para sus desplazamientos. Los mapas medievales, realizados por los propios navegantes y por otras gentes sin formación matemática, ni científica, no eran fiables en lo que se refiere a la navegación y, en general, no se podía realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en muchas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas del destino marcado o incluso a lugares desconocidos. Mercator diseñó este mapa en una época en que las herramientas matemáticas que hoy necesitamos para entender esa proyección (logaritmos, cálculo, geometría diferencial) no eran conocidas.

Sus propiedades: I) es un mapa de forma rectangular; II) los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan en ángulo recto; III) es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, ángulos o formas; IV) las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo se transforman en rectas; V) la distorsión de áreas, formas y distancias es pequeña cerca del ecuador, pero muy fuerte según nos acercamos a los polos. Esta propiedad la hace muy conveniente para regiones cercanas al ecuador.

Las loxodrómicas, o líneas de rumbo fijo, se trasforman en rectas en el plano de Mercator. Por consiguiente, si un navegante quiere ir de un punto A a un punto B de la Tierra, sólo necesita trazar en el plano la recta que une ambos puntos y tomar el rumbo marcado por la misma. Sin embargo, las loxodrómicas no son geodésicas y por lo tanto, no nos dan el camino más corto entre esos dos puntos, aunque sí el más sencillo de seguir, por ser de rumbo constante (nos basta la brújula). Cualquier otra curva entre esos puntos requiere de continuos cambios de rumbo. Normalmente en la navegación se toma una solución intermedia. Para realizar su travesía del Atlántico, en 1927, el aviador Charles Lindbergh decidió cambiar de rumbo cada 1.000 kilómetros y seguir una sucesión de curvas loxodrómicas que se aproxima al círculo máximo ideal.



Otras proyecciones conformes son la proyección estereográfica, la aplicación cónica conforme de Lambert o la aplicación cónica conforme bipolar oblicua.

1

¡No existen mapas perfectos!

Aunque a lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir mapas ideales de la tierra, tampoco pudieron demostrar que no fuese posible, hasta que Leonhard Euler (1707-1783) lo probó en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*. La demostración es sencilla: supongamos que existiese una proyección de la esfera en el plano que preserve todas las propiedades métricas (isometría) y tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por un arco de círculo máximo entre el norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de 90° con el anterior y el arco del ecuador que conecta los dos anteriores, que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90°. Entonces, la imagen de dicho triángulo geodésico de la esfera será un triángulo sobre el plano (ya que se preservan las geodésicas) con ángulos de 90° (ya que se preservan los ángulos), pero esto es absurdo porque, como bien sabemos de la geometría clásica, la suma de los ángulos de un triángulo en el plano es de 180° y no de 270°. Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo los ángulos y las geodésicas. Es decir, no existen mapas perfectos, todos los mapas son falaces en algún sentido.

Un par de experimentos que ponen de manifiesto el resultado de Euler son los siguientes. Consideremos una pelota de plástico, cortémosla por la mitad e intentemos colocarla completamente plana sobre la mesa. Podemos comprobar que en nuestro intento de aplanar la pelota, esta se deformará o se rasgará, modificándose así las distancias entre los diferentes puntos de la superficie. Incluso si realizamos algunos cortes radiales para facilitar el aplanamiento seguiremos teniendo el mismo problema. Lo mismo ocurre en sentido contrario: al pegar un sello de grandes dimensiones en la naranja, se formará un gran número de pliegues.

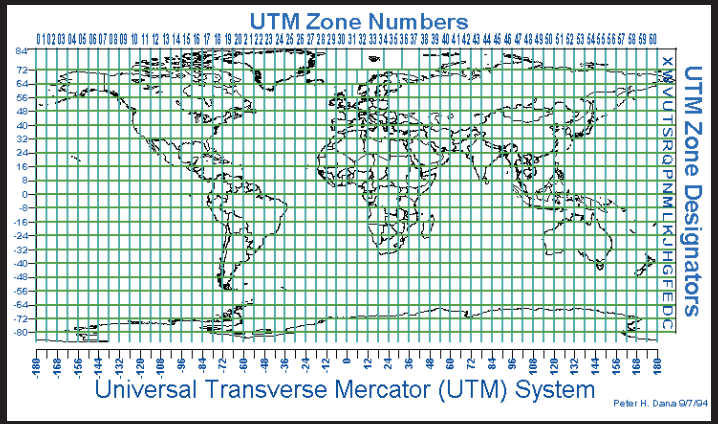
El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de utilizar mapas, realizados con diferentes proyecciones, de diferentes regiones de la tierra o también mapamundis, es considerar para cada situación concreta los mapas que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades. A la hora de utilizar un mapa en nuestro trabajo o en nuestra vida cotidiana no debemos dejarnos guiar por la fama de un mapa, su nombre o por ser el mapa oficial de alguna agencia internacional, sino que la elección debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en el mapa y una posterior elección dentro de la gran variedad de mapas existentes.

2

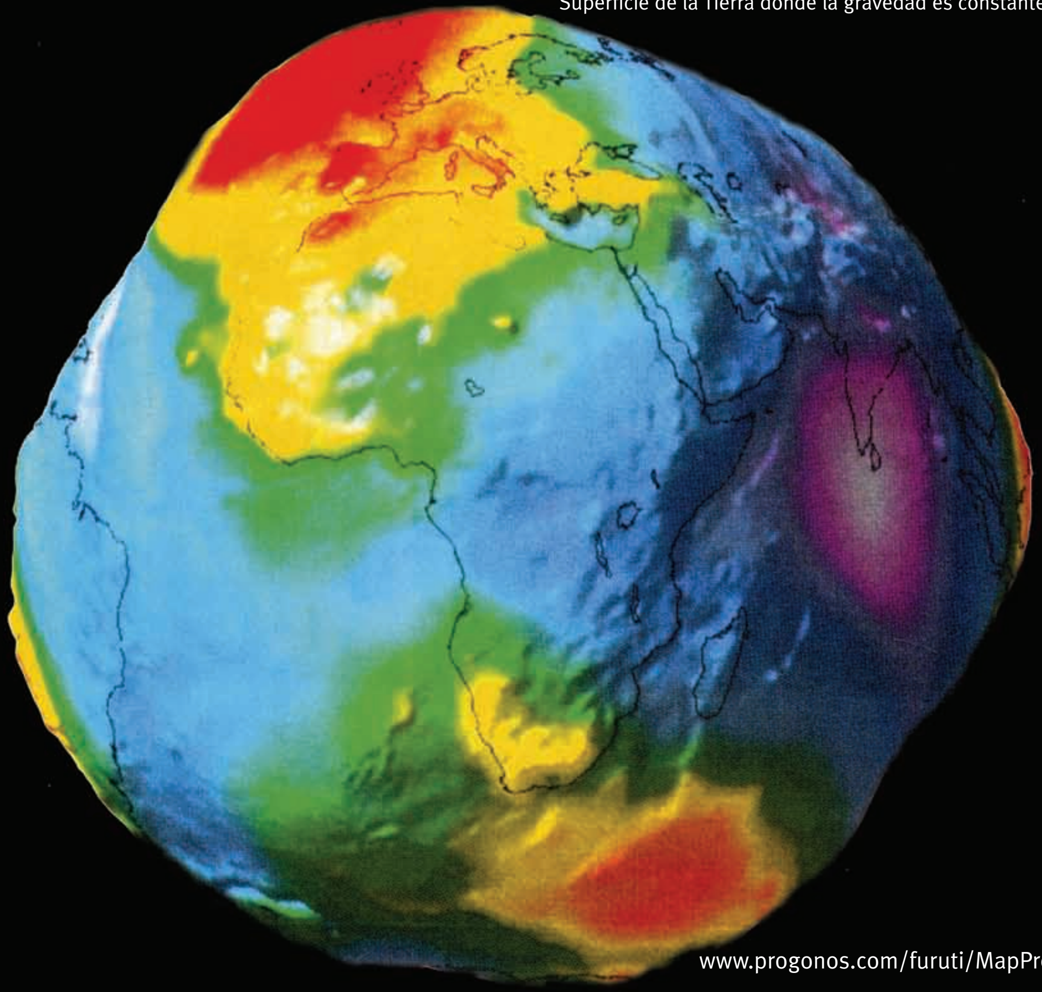
UTM: la proyección Universal Transversal de Mercator

Si en lugar de considerar el ecuador como curva tangente al cilindro en el diseño del mapa de Mercator, tomamos uno de los meridianos de la Tierra, obtendremos la proyección de Mercator transversal, centrada en ese meridiano. Las propiedades de esta proyección: I) los meridianos y paralelos y, en general, las loxodrómicas, no son rectas; II) es una aplicación conforme, preserva los ángulos; III) la distorsión cerca del meridiano de tangencia es muy pequeña y va aumentando según nos alejamos de este. Esta propiedad hace que esta proyección sea muy importante para mapas, no de todo el globo terráqueo, sino de zonas más pequeñas.

La familia de proyecciones transversales de Mercator que se obtienen al variar el meridiano de tangencia es la base de la UTM (Universal Transversal Mercator) que, junto a la UPS (Universal Polar Stereographic) para los polos, es la proyección universal utilizada para la realización de todo tipo de mapas (temáticos, de carreteras, topográficos,...) de un cierto tamaño. La UTM consiste en dividir el globo terráqueo en zonas de 6 grados de longitud y utilizar en cada zona la proyección transversal de Mercator de su meridiano central. Por ejemplo, el Mapa Topográfico Nacional utiliza la UTM, así como muchas de las agencias geográficas, topográficas, militares,... de muchísimos países. Si usted trabaja diseñando mapas seguro que, aunque no sea consciente de ello, esta utilizando la UTM es su programa.



Superficie de la Tierra donde la gravedad es constante (Geoide) © Legos-Grgs/Cnes



Para saber más

En internet

www.progonos.com/furuti/MapProj/CartIndex/cartIndex.html

math.rice.edu/~polking/cartography

www.gis.psu.edu/projection

En libros y artículos

Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps, Timothy G. Feeman, Mathematical World 18, AMS, 2002.

Muerte de un cartógrafo, Raúl Ibáñez, Un Paseo por la Geometría, UPV, 2002 (ver en la sección Textos-on-line de www.divulgamat.net)

Lo que Euler le dijo al cartógrafo, Raúl Ibáñez, SIGMA Revista de Matemáticas, no. 27, 2005.

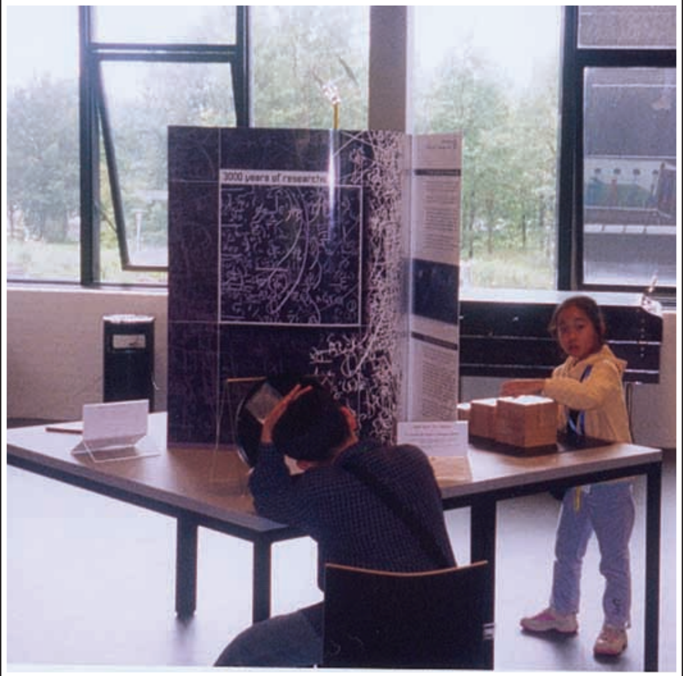
Mapas Antiguos del Mundo, F. Romero, R. Benavides, Edimat Libros, 1998.

An Album of Map Projections, John P. Snyder, Philip M. Voxland, USGS Professional Paper 1453, 1989.

Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections, John P. Snyder, The University of Chicago Press, 1993.

La prueba de la prueba

9 – Demostrando



En términos generales, una demostración de un enunciado es una prueba mediante la cual un matemático debe convencer a sus homólogos de lo bien fundado de sus intuiciones. Pero dicha prueba no puede descansar en la capacidad de persuasión de su autor: precisa ser incontestable, en virtud de un rigor lógico completo en toda su argumentación, en cada uno de los pasos que partiendo de las hipótesis conducen a las conclusiones.

Un punto crítico es que una prueba es escrita por y para seres humanos. Por ello, la ciencia y la comunidad científica no sólo suponen sino que de hecho exigen la total honestidad y transparencia de aquellas personas cuyo trabajo y creatividad aporta avances en matemáticas. Podemos decir que, una vez sometidas a comprobación y aceptadas por la comunidad, las demostraciones matemáticas se consideran garantía de validez de las afirmaciones, y, por ello certificados de calidad de las mismas.

Ahora bien, puesto que las matemáticas son mucho más que una manufactura de demostraciones, en la práctica ante la presentación de una prueba se actúa con racionalidad. En efecto, normalmente la prueba no puede incluir todos los pasos del razonamiento, hasta el más elemental, ya que entonces cada prueba pudiera resultar exageradamente enciclopédica. Las demostraciones, por otro lado, no son sólo una peculiaridad del método matemático, sino un exponente cualificado que satisface todos los principios de la creatividad científica. La comunicación de la prueba consistirá entonces, fundamentalmente, en proporcionar datos suficientes para la deducción universal de su completo rigor lógico, poniendo de relieve todos aquellos elementos originales, creativos e imaginativos relacionados con ella.

En la actualidad está extendida la idea de que la llamada prueba formal, cuando se puede desarrollar, es la única demostración que recurre a la lógica matemática, que excluye cualquier controversia y que proporciona su validación real. Sin embargo, las pruebas no formales que se apoyan rigurosamente en ciencia creada y validada con anterioridad son tan certificables matemáticamente como las formales. Frecuentemente sucede incluso que esta validación sea simultánea o posterior a la presentación de la prueba matemática no formal, permaneciendo ésta mientras tanto pendiente de su certificación. La comunicación de este último tipo de pruebas no sólo es conveniente sino aún más estimulante para el buen desarrollo de la ciencia matemática y de sus aplicaciones.

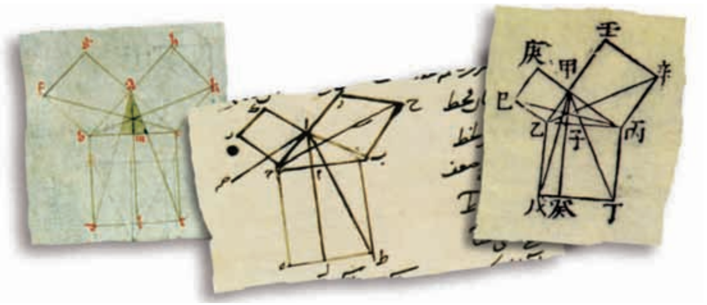
La prueba era casi perfecta

Contrariamente a las ideas preconcebidas, demostrar no es un objetivo en sí para el matemático. Su trabajo consiste más bien en "hacer conjeturas" e imaginar nuevas pistas. Por lo tanto, un buen matemático posee, ante todo, una gran imaginación.

De Pitágoras a Wiles

Detrás de la noción de “prueba” se perfila una cuestión esencial, al menos para el matemático: ¿qué es hacer matemáticas? Algunos piensan, demasiado rápido, que el matemático se dedica en cuerpo y alma a demostrar teoremas, es decir que, a partir de axiomas, razona y encuentra teoremas. Pero, ¿quién enuncia estos axiomas?

Consideremos el famoso Teorema de Pitágoras. Se conocen más de un centenar de demostraciones de este teorema, más o menos largas o elegantes.



Sin embargo, la ausencia de demostración no implica que no se utilice. Así, el teorema de Pitágoras era conocido mucho antes de su estipulación. Encontramos el rastro de lo que se podría considerar como las primeras tablas trigonométricas, más de 2.000 años antes de J.C., bajo los Babilonios, en particular, la Tablilla de Plimpton 322, que se encuentra en la Universidad de Columbia, en los Estados Unidos. Este conmovedor objeto incluye 15 triángulos rectángulos y, quizás, se utilizase para la parcelación. Y demuestra, en particular, que en el origen de las matemáticas están presentes seres humanos en sociedad.

Y cuando la sociedad evoluciona, las matemáticas también se transforman. Se puede constatar que la noción de prueba surge con la llegada de la Democracia, en Grecia. El matemático debe entonces exponer suficientes argumentos como para convencer a sus conciudadanos de lo bien fundado de sus enunciados. Dicho de otro modo, tiene que aportar la prueba.

Pero encontrar una prueba no siempre es posible, a veces incluso se ignora si ello podrá ser posible alguna vez o esperar mucho tiempo para obtenerla. Los matemáticos formulan a menudo conjeturas, es decir, enunciados que esperan sean ciertos, sin poder demostrarlos. En 1998, Thomas Hales consiguió desentrañar la conjetura de Kepler que, desde hacía ya casi 400 años, venía dando mucho que hacer a los matemáticos. (Véase “Las naranjas del frutero”).

En el universo matemático, cuando se presenta una demostración, su verificación corre a cargo de matemáticos expertos. Y casi nunca resulta fácil. La prueba de Thomas Hales es tan larga como complicada. El conjunto de datos y códigos informáticos que se requieren para la demostración ocupan nada menos que tres gigabytes de memoria. Thomas Hales tuvo que resolver más de 100.000 problemas lineales en los que cada uno incluía entre 100 y 200 variables y de 1.000 a 2.000 restricciones. A título indicativo, en los colegios e institutos, los alumnos se limitan a estudiar la resolución de dos o tres ecuaciones lineales con dos o tres variables, como mucho. Con el fin de comprobar la prueba de Hales, la famosa revista *Annals of Mathematics*, encargó esta tarea a un equipo de 12 matemáticos. Tras más de cuatro años de trabajo, emitieron su veredicto: la prueba es válida en un 99%... Los expertos se declararon incompetentes a la hora de comprobar determinados detalles y cálculos realizados con la herramienta informática. Herido en su amor propio, Thomas Hales lanzó el proyecto Flyspeck. Hace un llamamiento a todos los matemáticos e informáticos interesados en este reto para que unan sus fuerzas... mentales, con el fin de encontrar una prueba formal de la conjetura de Kepler. Dicha prueba, establecida mediante proposiciones lógicas, sería entonces “inapelable”, eliminando de golpe cualquier tergiversación.

Antes de los avances de la lógica, a principios del siglo XX, existían graves discrepancias en torno a determinadas pruebas cuya “veracidad” resultaba muy difícil de demostrar. Ese fue el caso del descubrimiento del cálculo diferencial, a finales del siglo XVII, ya que la noción de límite aún no estaba perfectamente asentada (Cauchy, 1789-1857, y posteriormente Weierstrass, 1815-1897, precisaron dicha noción).

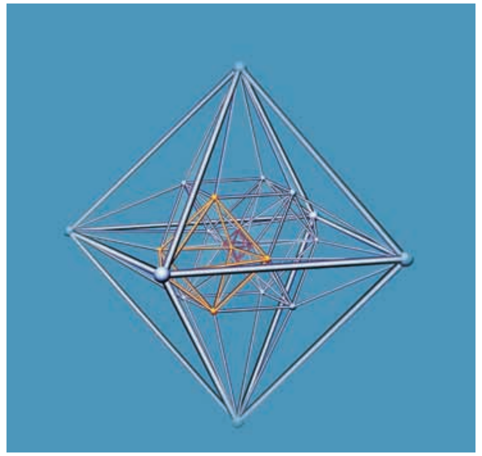


Imagen en 3D de un politopo autodual en 4D.
Fernando da Cunha

Más recientemente, el miércoles 23 de junio de 1993, en la última conferencia de un simposium de tres días, Andrew Wiles ofreció al auditorio la demostración de la famosa conjetura de Fermat. Recordemos que este jurista francés anotó al margen de un libro de matemáticas, en la primera mitad del siglo XVII, las siguientes palabras: “Es imposible descomponer un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, y en general, cualquier potencia más alta que el cuadrado en suma de dos potencias de mismo exponente”. Esta breve anotación se convirtió enseguida en la “conjetura-rompecabezas” más famosa entre los matemáticos, hasta dicho 23 de junio de 1993.

Volvamos a Andrew Wiles, enfrentándose a sus jueces matemáticos. En el mismo momento, nadie pudo comprobar su demostración, de la que sólo había expuesto las grandes líneas. Un comité compuesto por seis expertos tuvo que trabajar durante meses para validar una demostración de doscientas páginas. En varias ocasiones, dudaron, e incluso detectaron un error en la demostración, procedente de la utilización de un procedimiento aplicado de manera un tanto apresurada por Andrew Wiles. Fueron necesarios más de dos años para corregir el error y llegar, finalmente, a una demostración completa y aceptada por los expertos. Con una prueba formal, estas tergiversaciones no hubieran existido y su aceptación no hubiese sido más que un trámite.

Sin embargo, quien aporta la prueba no se puede considerar receptor de la verdad. Hasta principios del siglo XX, los matemáticos estaban convencidos de que se podían demostrar todas las verdades matemáticas por deducción. En 1931, Kurt Gödel, genio de la lógica, rompió el espejismo de la verdad matemática. Mediante su famoso teorema de incompletitud, establece que existen verdades matemáticas imposibles de demostrar en el marco axiomático en el que se sitúan. Aquellos que vieron en el rigor formal del razonamiento una garantía de su fiabilidad, tuvieron que reconocer que, incluso si todas las afirmaciones de un razonamiento se deducen de las anteriores mediante reglas muy precisas, nada garantiza que dichas reglas constituyan una teoría coherente y, por lo tanto, que las afirmaciones demostradas sean ciertas. Por consiguiente, el razonamiento demostró sus limitaciones. Por lo tanto, será necesario olvidar el sueño de unas matemáticas totalmente deducibles de la veracidad de sus primeros principios, un ideal que se remonta a Aristóteles y que la mayoría de los matemáticos tiene en algún rincón de su cabeza. Finalmente, lo que sabemos hoy en día es que no sabemos apenas nada. Pero resulta que sólo los que más saben pueden ser tan humildes...

La pizarra de los Shadocks y de Gödel © Jacques Rouxel & Centre.Sciences

1

Casi demostrado, o la íntima convicción de la prueba

Un número perfecto es un entero que es igual a la suma de los divisores propios menores que él mismo. Por ejemplo, el entero 6, que es divisible por 1, 2, 3, es un número perfecto, ya que 6 = 1 + 2 + 3. Es el número perfecto más pequeño, siendo los tres siguientes 28, 496, 8128. Pero, ¿existen números perfectos impares? La cuestión se planteó hace dos milenios. Pero, aunque no se haya encontrado ninguno, nadie ha demostrado que no existan. A pesar de la falta de demostración, todo el mundo está actualmente convencido de que no existen números perfectos impares, más aún si tenemos en cuenta que, respetando en este caso las buenas prácticas de la prueba formal, se han demostrado un gran número de propiedades que debería tener dicho número perfecto impar N, en el caso de que existiese.

¿Imagen de matemáticos en pleno trabajo?

2

Divertido pero muy desesperante: El problema 3n + 1 o de Siracusa

¡Todos a calcular! Se trata de una secuencia de operaciones con enteros muy sencilla cuyo resultado siempre es igual a 1. Sea n un entero, si es par, lo dividimos por 2, y si es impar lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1 (3n+1). Repetimos la misma operación con los resultados obtenidos. El entero obtenido durante las sucesivas operaciones varía, alcanzado a veces valores insospechados, pero el resultado final siempre es 1. Aunque aparentemente sencilla, esta conjetura aún no se ha demostrado. Sin embargo, se ha demostrado hasta $n = 10^{16}$.

3

Los siete enigmas del milenio

El Clay Mathematics Institute ofrece un millón de dólares a la persona que resuelva uno de los siguientes siete enigmas matemáticos. Aunque su enunciado es sencillo, su contenido resulta inaccesible para el alumno profano, que deberá estudiar “muchas matemáticas para poder optar al premio”.

La Hipótesis de Riemann

Trata de la distribución de los números primos entre los números enteros. Estos números, que sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad, son esenciales para la criptografía.

La Conjetura de Poincaré

Si trazamos una curva cerrada que no se corte a sí misma en la superficie de un balón que se recorta siguiendo dicha curva, obtenemos dos partes diferentes. Según la conjetura de Poincaré, esto sigue siendo cierto si pasamos de las superficies de dos dimensiones a los espacios de tres dimensiones.

La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

El problema consiste en encontrar soluciones a las ecuaciones de tipo

$$x^2+y^2=z^2$$

El Problema P versus NP

O por qué la búsqueda de la solución requiere más tiempo que la comprobación de la exactitud de la misma.

Las Ecuaciones de Navier-Stokes

Estas ecuaciones, que rigen la mecánica de los fluidos y datan del siglo XIX, aún no están resueltas. Se trata de demostrar que el problema está bien planteado, es decir que, si conocemos el movimiento del fluido en un momento inicial, el problema posee una solución única en todo momento posterior.

La Conjeture de Hodge

Sugiere que determinados objetos matemáticos se interpretan como una combinación de formas geométricas de origen algebraico.

Las Ecuaciones de Yang-Mills

Las predicciones de sus ecuaciones, que datan de los años 50, se comprueban diariamente en los aceleradores de partículas. Pero no existe ninguna prueba matemática que demuestre la existencia de los campos cuánticos que están regidos por estas ecuaciones.

Para saber más

En Internet

www.math.pitt.edu/~thales
(Para unirse al proyecto Flyspeck lanzado por Thomas Hales)

www.divulgamat.net
(biografías de matemáticos/as y otros aspectos de la historia de las matemáticas)

www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history
(Biografías de matemáticos/as, en inglés)

www.claymath.org/millennium
(Los siete problemas del milenio)

En libros

El libro de las demostraciones, M. Aigner, G. M. Ziegler, Nivola, 2005.

Experiencia Matemática, Ph. J. Davis, R. Hersh, Labor-MEC, 1989.

Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo, Michael Guillen, Temas de Debate, 2002.

El reto de Hilbert, Jeremy Gray, Crítica (Drakontos), 2003.

Los Lógicos, Jesús Mosterín, Espasa-Calpe, 2000.

Ciencia e Hipótesis, Henri Poincaré, Espasa-Calpe, 2002.

El enigma de Fermat, Simon Singh, Planeta, 1998.

¿Por qué las Matemáticas?

¿Una exposición de matemáticas?
Pero, ¿qué podemos incluir? ¿Cómo hacerlo?

Este es el reto que se propuso el equipo formado por la UNESCO...
El merito corresponde a Minella Alarcon la cual, preocupada por el compromiso con las ciencias de la UNESCO, reunió a matemáticos y matemáticas de varios países: Japón, Filipinas y Francia, con el fin de compartir y armonizar las diferentes experiencias, en el ámbito de la popularización de las matemáticas.

La exposición "¿Por qué las Matemáticas? surgió de los debates realizados conjuntamente con el Centro de Ciencias de Orleáns (CCSTI de la región Centro).
La realización concreta de la exposición ha estado marcada por dinámicas confrontaciones dentro del grupo de trabajo en las que se decidieron los temas, el contenido y la estructura de la exposición que se presentó por primera vez en julio de 2004 en Dinamarca.

Esperamos que los visitantes perciban el entusiasmo que nos movía y que la belleza de la exposición despierte su sensibilidad.

Aprovechamos la ocasión para agradecer desde aquí a todos los matemáticos que han contribuido desinteresadamente redactando textos en base a los cuales se ha montado la exposición. Gracias a ellos, mostramos al público algunos recientes descubrimientos matemáticos y sus aplicaciones al mundo real.

Después de Copenhague, París y Orleáns, la exposición (dos copias) ha visitado diferentes ciudades del Africa "Austral" (Sudáfrica, Mozambique, Namibia), de Atenas a Pekín, de Bangkok a Lyon. Le seguirá un periplo que incluye Oriente Medio (Líbano primer trimestre de 2007) y países del sudeste asiático.

Deseamos que la exposición se enriquezca con las diferentes culturas con las que se va a encontrar y que el público disfrute tanto como nosotros a la hora de concebirla.

En nombre de todo el equipo
Mireille Chaleyat-Maurel

01 – Leer la naturaleza

Miguel Bello Mora – Ingeniería y Análisis de misión, GMV, España

02 – Teselaciones y Simetrías

André Brack – Cbm - Cnrs – Orleáns
Jin Akiyama – RIED, Universidad de Tokai – Japón

03 – Llenar el espacio

Marcel Berger – Ihes

04 – Unir mediante una línea

Andreas Frommer – Universidad de Wuppertal – Alemania
Pierre Calka – Map5 – Universidad de París 5

05 – ¿Por qué calcular?

Jean-François Colonna – Lactamme. Escuela Politécnica, París
Jean-Paul Delahaye – Universidad de Lille 1
Françoise Dibos – Ceremade-Universidad de París 9
Georges Koepfler – Map5 – Universidad de París 5

06 – Construir

Jin Akiyama – RIED, Universidad de Tokai – Japón
Vagn Lundsgaard Hansen & Niels J.Gimsing, Universidad Técnica de Dinamarca, Copenhague

07 – Calculando

Bernard Bru – Universidad de París 5
Bernard Lapeyre – ENPC-Escuela Politécnica de París
Gilles Pages – Universidad de París 6

08 – Optimización

Michele Emmer. Universidad de Roma "La Sapienza"
Roger Trias Sanz – Instituto Geográfico Nacional de París
Jin Akiyama - RIED, Universidad de Tokai – Japón

09 – Demostrando

Bernard R. Hodgson – Universidad de Laval – Québec

Ayuntamiento de Madrid

Alberto Ruiz-Gallardón
ALCALDE DE MADRID
Alicia Moreno
CONCEJALA DE GOBIERNO DEL ÁREA DE LAS ARTES
Carlos Baztán
COORDINADOR GENERAL DEL ÁREA DE LAS ARTES
Juan José Echeverría
DIRECTOR GENERAL DE PATRIMONIO CULTURAL
Juan Carrete
DIRECTOR DEL CENTRO CULTURAL CONDE DUQUE

CENTRO CULTURAL CONDE DUQUE
Exposición
Comisarios:
Raúl Ibáñez (UPV, Bilbao)
Antonio Pérez (IES S. Dalí, Madrid)
Coordinación:
Alicia Navarro
María Josefa Pastor
Proyecto de montaje y maquetación
Manuel Martínez Muñiz
Encargado de montajes del C.C.C.D.
Fernando Arias
Administración
Fernando Rodríguez
Mª Ángeles Fernández
Juan Burruezo
Carmen Fuentes
Mª Luisa de la Paz
Coordinación de gestión
Paula Criado Poblete
Prensa
Javier Monzón
Isabel Cisneros
Jon Mateo
Jefe de Publicidad
Roberto Leiceaga
Equipo de Publicidad
Jesús Araque
Alicia San Mateo
Catálogo
Impresión
Gráficas Almudena

ISBN:
D.L.:

Una exposición internacional
realizada a iniciativa de la UNESCO
por el Centro de Ciencias,
CCSTI de la región Centro (Orleáns-Francia)
junto a
la Universidad Tokai, Tokyo (Japón)
y
la Universidad Ateneo de Manila (Filipinas)

COMITÉ CIENTÍFICO
Jin Akiyama, Universidad Tokai
Minella Alarcon, UNESCO
Michèle Artigue, ICMI
Jean Brette, Palais de la découverte, París
Mireille Chaleyat-Maurel, Universidad de París 5
Michel Darche, Centro de las Ciencias
Mari-Jo Ruiz, Universidad Ateneo de Manila
Gérard Tronel, WYM 2000

Colaboradores
UNESCO
Unión Matemática Internacional (IMU)
Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI)
Sociedad Matemática Europea (EMS)
Ministerio Japonés de Educación (MONBUSHO)
Universidad Tokai de Tokio (Japón)
Universidad Ateneo de Manila (Filipinas)
Universidades de París 5, París 6 y París 7
Universidades de Orleáns y de Tours
Universidad del País Vasco
Sociedad Matemática de Francia
Sociedad de Matemáticas Aplicadas e Industriales

Exposición
Experiencias y modelos
Centro de las Ciencias y Universidad de Tokai
Escenografía
Centro de las Ciencias y Samuel Roux
Grafismo
Samuel Roux, Orleáns
Maquetas y manipulaciones
Carpintería Berge, Fleury-les-Aubrais
BCF, Jouy-le-Potier, Concept volume, Orleáns
Impresiones digitales
API, Saint Denis en Val