Una geometría,... de cine

por

Alfonso Jesús Población Sáez, Universidad de Valladolid

1. Introducción

Las matemáticas, como todos sabemos, no gozan en general del beneplácito de la mayor parte de los alumnos de cualquier nivel educativo en ningún lugar del mundo, ni del de la sociedad en que vivimos, que las considera un mal necesario. Desde hace algún tiempo, algunos docentes se han propuesto que esta equivocada idea cambie, y puedan ser vistas de un modo más positivo e incluso despertar en sus alumnos la indudable sensación de placer que supone entenderlas bien, trabajar y avanzar con ellas. Para ello tratan de mostrarlas desde diferentes puntos de vista, echando mano de nuevas tecnologías y/o presentándolas a partir de aplicaciones a la vida real y cotidiana. El cine, potente medio de comunicación e información, además de entretener, puede ayudarnos a "enganchar" de un modo ameno a los más reticentes.

El texto que sigue a continuación trata de reflejar lo esencial de la charla que tuvo lugar el pasado 26 de abril en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco sobre una forma de poder utilizar este medio en alguna de nuestras clases. Uno puede sorprenderse del nivel de complejidad de los temas que puede llegar a tratar (no sin ciertas dosis de imaginación, todo hay que decirlo) a pesar de las limitadas referencias con que el cine nos ha obsequiado hasta el momento. En una primera parte hicimos un resumen precisamente de cómo las matemáticas han sido vistas por el cine a lo largo del tiempo, por diversas nacionalidades, según diferentes géneros, etc. El lector interesado puede consultar [5] o [6] para hacerse una idea. En lo que sigue nos centraremos únicamente en cómo plantear una actividad concreta a partir del visionado de dos o tres escenas de películas de no más de siete u ocho minutos de duración en total. Previamente los alumnos han leído un guión (descrito en el Apéndice) sobre el que trabajar durante y posteriormente a dicho visionado.

2. El Teorema del Espantapájaros

Comenzamos viendo, varias veces si fuera necesario, tres escenas de otras tantas películas de las que se nos adelanta que existe alguna relación de tipo matemático entre ellas. Se transcribe y describe lo fundamental de las mismas.

ESCENA 1.- El mago de Oz (*The Wizard of Oz*, Victor Fleming, EE. UU., 1939)

Hacia el final de la película los protagonistas (El Espantapájaros, el Hombre de Hojalata, el León Cobarde y Dorothy) encuentran por fin al Mago de Oz para pedirle lo que más desean. El Espantapájaros quiere un cerebro ya que todos se ríen de él por su simpleza. Esta es la secuencia:

Mago: *Es una ventaja muy vulgar. Toda pusilánime criatura que se arrastra por la tierra o escurre por los mares tiene cerebro. En mi tierra natal existen universidades, hogares del saber donde los hombres van a convertirse en eruditos. Al salir de allí piensan en cosas grandes, profundas, y su cerebro se iguala al tuyo, pero..., ellos tienen algo de lo que tú careces: Un diploma.* [Rebusca entonces en un cajón y saca un diploma. A continuación declama en tono solemne] *Así pues, en virtud de la autoridad que me ha conferido la Universitatus Comiteatus et Pluribus Unum, con este diploma te otorgo el título de doctor Honoris Causa.*

Espantapájaros: *¿Doctor en qué?*

Mago (saliendo del paso): *Quiere decir en eruditología*.

Espantapájaros (llevándose la mano a la cabeza, ver imagen): *La suma de la raíz cuadrada de cada uno de los lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del otro lado. ¡Oh, Victoria!¡Al fin!¡Tengo cerebro! ¿Podré agradecérselo como se merece?*

Mago: *No podrás nunca* (desentendiéndose de él).

ESCENA 2.- Springfield o cómo aprendí a amar el juego legalizado (*Springfield or how I learned to stop worrying and love legalized gambling*, episodio 10, Temporada 5ª de la Serie *The Simpsons*, emitido en EE. UU. el 16/12/1993)

Aparece Homer Simpson entrando en un cuarto de baño, canturreando. De repente se fija en algo que flota en un retrete.
Homer: *¡Eh! Esto es algo que no se ve en un retrete todos los días.* (Son las gafas de Henry Kissinger) *¿Alguien ha perdido unas gafas?* (En el lugar no parece que haya nadie). *Uno, dos y tres. ¡Yuju!*

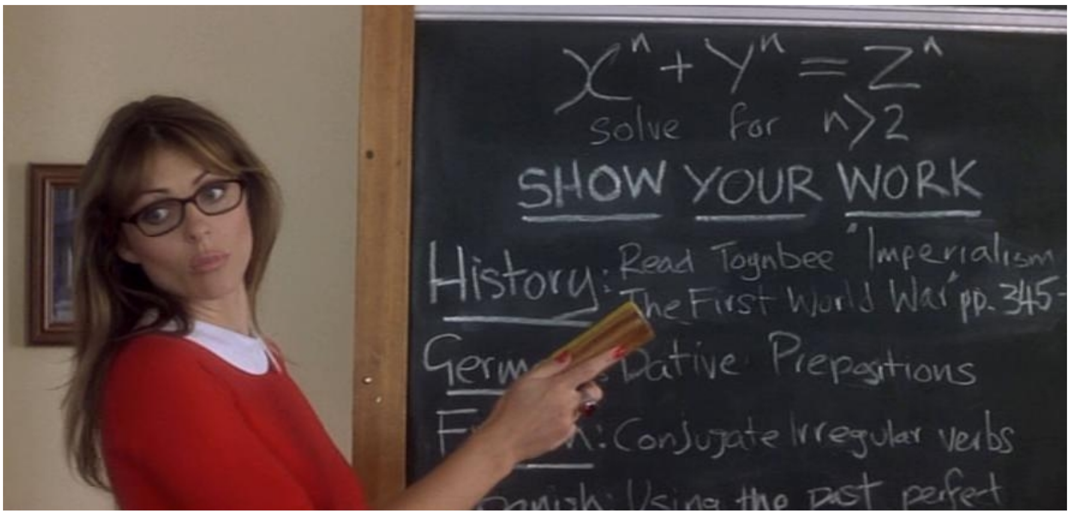
(Las coge, se acerca a un espejo y se las pone. Se lleva entonces la mano a la cabeza de modo similar a lo que hizo el espantapájaros en la anterior escena. Como es sabido en esta serie se hacen habitualmente homenajes a películas conocidas; veáse el propio título del capítulo respecto a una célebre película de Stanley Kubrick) *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos en un triángulo isósceles.* (en la versión original el enunciado es como en El mago de Oz)

Alguien dentro de un retrete: *En un triángulo rectángulo!*

ESCENA 3.- Al diablo con el diablo (*Bedazzled*, Harold Ramis, EE. UU., 2000)

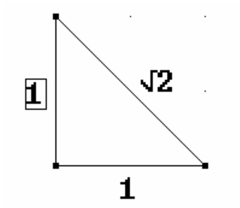
Se presenta una nueva profesora en un aula (en realidad es el Diablo). Elimina todos los deberes que los alumnos tenían asignados en una pizarra.

"Álgebra. X a la n más Y a la n es igual a Z a la n. (Se gira hacia los alumnos) *Esto no sirve para nada, ¿verdad?"* Y lo borra ante el regocijo de los estudiantes.



La primera cuestión que nos viene a la cabeza después de escuchar el resultado que enuncia el espantapájaros es si será cierto que en un triángulo isósceles se verifica la citada igualdad, similar en cuanto a su forma al conocido teorema de Pitágoras.

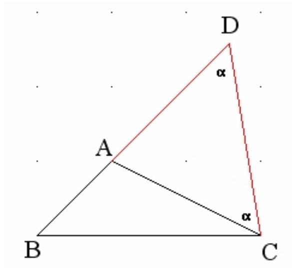
Precisamente este resultado nos basta para comprobar que desde luego no todos los triángulos isósceles la verifican, ya que tomando por ejemplo el caso del dibujo, se debería tener que 1 + 1 fuera igual a $\sqrt[4]{2}$, lo cual es evidentemente falso. Cabe entonces preguntarse si existirá algún triángulo isósceles que lo cumpla.



Para responder a esta pregunta recordemos el siguiente resultado de geometría elemental:

Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos

Su demostración es sencilla: Sea un triángulo cualquiera ABC. Si probamos que el lado mayor (BC, en el caso del dibujo) es menor que la suma de los otros dos, quedará probado también para los otros lados. Consideremos D sobre la prolongación del lado BA de tal modo que AD sea igual a AC. El triángulo ADC formado es un triángulo isósceles.



Llamemos α al ángulo $\angle ADC$ que por semejanza de triángulos es igual al ángulo $\angle DCA = \alpha$. Observando la amplitud de los ángulos $\angle DCA$ y $\angle BCD$, se sigue que $\alpha < \angle BCD$, por lo que $BC < BD = AB + AC$. Así pues, el asno tenía razón [1].

Una consecuencia del resultado anterior es que

En todo triángulo cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos.

La prueba es inmediata, restando en la última desigualdad del párrafo anterior, los lados AB y AC respectivamente:

$$BC < AB + AC \Rightarrow BC - AC < AB \text{ y } BC - AB < AC.$$

De lo todo lo dicho se desprende que para poder construir un triángulo con tres segmentos dados (en nuestro caso, no olvidemos, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$), es necesario que cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Ambas condiciones se cumplen si el lado mayor es menor que la suma de los otros dos. Supongamos entonces que algún triángulo isósceles verifica que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$. Dada la forma del triángulo, se podrían dar dos situaciones:

[1] Este comentario obedece a la historia atribuida a Euclides en la pág 126 de [4] según la cual un asno situado en un vértice de un campo triangular que observe un carro de heno en otro de los vértices nunca recorrerá la distancia que le separa del heno recorriendo sucesivamente dos de los lados, sino que irá directamente al vértice en cuestión a lo largo del lado correspondiente

1.- $\sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{c}$, es decir $2\sqrt{a} = \sqrt{c}$, de donde $c = 4a > 2a$, que nos lleva a una contradicción con el hecho de que un lado nunca es mayor que la suma de los otros dos.

2.- $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a}$, con lo que $b = 0$, quedándonos entonces sin triángulo.

¿Y si el triángulo no fuera isósceles? Quizá el espantapájaros haya confundido la forma del triángulo. Volvamos a la expresión original, $\sqrt{a}+ \sqrt{b} = \sqrt{c}$. Elevando al cuadrado la igualdad, se tiene que $c = a + b + 2\sqrt{ab}$, de donde nuevamente tendríamos que $c > a + b$, en contra otra vez del resultado indicado al principio.

Entonces, ¿por qué este enunciado? El espectador medio, más o menos lógico, concluiría que dado el contexto (película de fantasía basada en un cuento para niños) el guionista simplemente ha tratado de, parafraseando el conocido teorema de Pitágoras, mostrar que el cerebro del espantapájaros sigue siendo una ilusión (atentos a la sarcástica puntilla del mago de Oz: *"ellos tienen algo de lo que tú careces: Un diploma"*). Los fanáticos de esta película de culto no se sienten a gusto con esta interpretación argumentando que se podría haber elegido un enunciado, basado incluso en el mismo teorema, pero en el que fuera evidente a simple vista el disparate. Incluso conocidas las tensiones y dificultades del rodaje de la película, hay quien argumenta que el actor que encarna al espantapájaros, para mostrar su disgusto, cambia por su cuenta el enunciado del verdadero teorema de Pitágoras que sería el que iría en el guión original; en este caso, serían sorprendentes sus conocimientos matemáticos respecto al americano medio de la época. La explicación más convincente para todos es que en Oz las cosas no son como en la Tierra (incluso hay color, recuérdese el resto de la película). ¿Por qué el teorema de Pitágoras iba a ser una excepción? Esto nos permite a los profesores de matemáticas dar una nueva vuelta de tuerca y preguntarnos ¿habrá una Geometría en la que el resultado sea cierto? ¿Qué tipo de Geometría rige la existencia de Oz?

3. Geometrías No Euclídeas

El alumno de la Secundaria actual nunca ha oído hablar de este tipo de Geometrías, es más, seguro que ni se ha planteado la posibilidad de que existan otras diferentes a la euclídea clásica. Puede ser un buen momento de hacer un poco de historia y comentar que Euclides en su obra Los Elementos trató de ordenar de forma rigurosa todo el conocimiento geométrico conocido. Para ello trató de basarse en los mínimos conceptos posibles, de los que deduciría los demás. Utilizó 23 definiciones, 8 nociones comunes y 5 postulados, verdades estas últimas que no se pueden probar pero que de tan evidentes como son, cualquiera las daría por ciertas sin mayores objeciones. Así tenemos que

I.- Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.

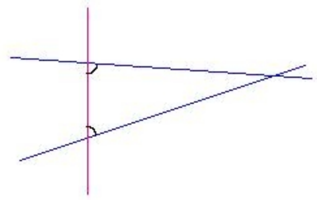
II.- Es posible prolongar de forma continua una recta cualquiera en línea recta.

III.- Es posible trazar un círculo con cualquier centro y radio dados.

IV.- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Pero llegamos al V Postulado, conocido como “ el de las paralelas”:

V.- Si una línea recta corta a otras dos formando con ellas ángulos interiores a un mismo lado menores que dos rectos, dichas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que están situados esos ángulos menores que dos rectos.



A los contemporáneos de Euclides tal postulado les pareció demasiado complejo (obsérvese que es una proposición condicional) como para que no se pudiera deducir de los otros cuatro (y de las definiciones y nociones comunes), más sencillos en cuanto a su descripción. El caso es que siglos después, muchos matemáticos siguieron tratando de probar esa dependencia, y nadie lo conseguía. Aparecieron formulaciones que podrían sustituirlo, con enunciados más sintéticos, pero ninguna pudo probarse sin recurrir a ese quinto postulado, utilizando exclusivamente los otros cuatro. Algunas de las más conocidas son:

- Los tres ángulos de un triángulo suman dos rectos.
- Las rectas paralelas son equidistantes.
- Existen triángulos semejantes no congruentes.
- Por tres puntos distintos no alineados puede trazarse una única circunferencia.
- Es posible construir un triángulo de superficie mayor que otra dada.

En 1795 el físico y matemático escocés John Playfair realizó una edición de *Los Elementos* en la que sustituyó, sin aclaración alguna, el V postulado por el siguiente enunciado:

Por un punto exterior a una recta es posible trazar una única paralela a la dada.

A esta formulación, que como las anteriores no puede probarse sin el V postulado, y viceversa, para probar el V postulado se necesitaría suponer que éste es cierto, se le conoce, en la literatura matemática anglosajona fundamentalmente, como *axioma de Playfair*, a pesar de que ya el griego Proclo en el siglo V. a.C. lo utiliza por su mayor simplicidad en la descripción. Hoy día muchos textos lo proponen incluso como quinto postulado de Euclides. Sin embargo tampoco le han faltado detractores. Lewis Carroll, por ejemplo, afirmaba que matemáticamente provoca más confusión que el postulado original y para justificar su afirmación realiza "demostraciones" como la de que *Todo triángulo es isósceles* desafiando al lector a encontrar el error, error que no se produce empleando el postulado original de Euclides. En el capítulo 6 de [2] titulado *Falacias Geométricas*, pp. 55 - 63, pueden verse más detalles al respecto.

La idea que permitió zanjar el asunto del V postulado fue suponer cierta su negación y tratar de llegar a alguna contradicción. Negar este postulado (utilizando el axioma de Playfair) nos lleva a dos posibilidades. Dada una recta r y un punto $P \notin r$:

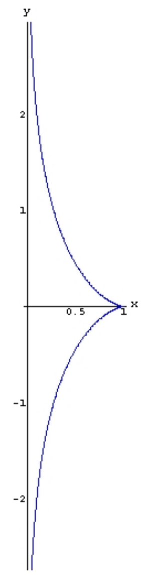
1.- No existe ninguna paralela a r por P, o bien,

2.- Existen al menos dos paralelas distintas a r por P.

En contra de lo que los matemáticos sospechaban no se llegó a contradicción alguna. Independientemente, el húngaro Janos Bolyai (1802-1860) y el ruso Nikolai Lobatchevski (1792-1856) probaron que geometrías con supuestos (1) y (2), respectivamente, no contenían contradicción lógica alguna, es decir, eran consistentes. C.F. Gauss ya había afirmado tal hecho pero no se atrevió a publicar nada al respecto. Como describe Jean Dieudonné (1906-1992) en [1] para la comunidad matemática de la época aquellos trabajos no eran sino *"fantasías extrañas"*.

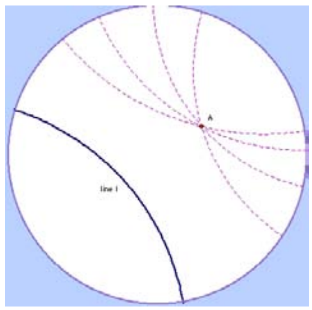
Utilizar el supuesto (1) nos lleva a la ***Geometría Esférica***, la utilizada por aviones y barcos en sus desplazamientos alrededor de la Tierra. Sobre una esfera, la distancia más corta entre dos puntos es la que une ambos mediante la línea geodésica que pasa por ellos, que resulta ser el círculo máximo que los contiene (es decir, la curva intersección de la esfera con el plano que pasa por los puntos y el centro de la esfera). Así podemos entender que la trayectoria de vuelo de los aviones comerciales entre Florida y las islas Filipinas, por ejemplo, sea a través de Alaska, a pesar de que las Filipinas están al Sur de Florida. Del hecho de ser círculos máximos se desprende que no existen geodésicas paralelas sobre la esfera. Otra de las propiedades más llamativas de esta geometría es que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor de 180º. Si utilizáramos el supuesto (2), la geometría a la que llegamos se denomina ***Hiperbólica***, y aquí la que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos. Esta geometría juega un papel importante en la teoría general de la Relatividad. Volviendo a nuestra cuestión, ¿será cierto el teorema del espantapájaros en alguna de estas Geometrías? Dicho de otro modo, ¿se regirá Oz por alguna de ellas?

Analicemos el caso de la Geometría Hiperbólica. Para entender cómo “funciona” el espacio hiperbólico tridimensional, un espacio que se curva al ir acercándonos al borde, se pueden utilizar varios modelos (Klein-Beltrami, Disco de Poincaré, Semiplano de Poincaré; comprenderlos no resulta demasiado complicado utilizando como apoyo el software Cabri Géomètre y unas modelizaciones adecuadas. En [7] pueden descargarse ficheros orientativos). Del mismo modo que para trabajar con la geometría esférica acudimos a una esfera, para manejarnos con la geometría hiperbólica utilizamos una superficie llamada ***seudoesfera***. La seudoesfera es la superficie de revolución obtenida a partir del giro de la tractriz alrededor de su asíntota (ver imágenes al pie de la tractriz y de la seudoesfera, respectivamente). Una esfera es “menor” que el plano, en el sentido de que la primera al estar acotada, es finita, mientras que el plano es infinito. La seudoesfera es también infinita pero “más intensamente” que el plano ya que parece contener mucho más espacio. Para trabajar con la seudoesfera se recurre a una modelización conocida como ***Disco de Poincaré***.



4. El Disco de Poincaré

Considérese un círculo fijo del plano euclídeo (sin pérdida de generalidad puede tomarse el círculo unidad). Dentro de dicho círculo, se definen los siguientes elementos:



- ***Punto hiperbólico***: cualquier punto del interior del disco (en la imagen, por ejemplo, el punto A).

- ***Rectas hiperbólicas***:

1.- Cualquier diámetro del disco

2.- Cualquier arco ortogonal al disco (dos circunferencias se dice que son ortogonales cuando las rectas tangentes a las mismas en los puntos de corte son perpendiculares; un arco ortogonal corresponde al trozo de circunferencia ortogonal que queda contenido en la otra).

Asimismo definimos distancia entre dos puntos P y Q del disco mediante

$$d(P, Q) = \ln \left| \frac{PA \cdot QB}{PB \cdot QA} \right|$$

siendo A y B los puntos de intersección de la recta que une P y Q con la circunferencia. Esta definición (debida a Cayley) verifica las propiedades de una métrica y modeliza perfectamente la idea de que la distancia aumenta cuanto más vaya acercándose uno de los puntos al borde del disco, siendo finalmente infinita la distancia de cualquier punto a dicho borde (por eso la utilización del logaritmo: al ir acercándose el cociente a cero, el logaritmo tiende a menos infinito, positivo gracias al valor absoluto).

Como consecuencia, los objetos van pareciendo más pequeños respecto del punto de vista del espectador situado en el centro del disco al ir acercándose al borde del disco. Esta idea la plasmó M.C. Escher en varios de sus grabados, uno de los cuales, *Límite circular III* puede verse en la imagen adjunta. Se trata de una teselación (un recubrimiento del plano mediante figuras congruentes que no se superpongan ni dejen huecos) del plano hiperbólico.

Volviendo a la imagen previa del disco de Poincaré, de lo dicho anteriormente se sigue que todas las rectas dibujadas son infinitas y la recta azul es paralela a las rectas punteadas que pasan por A (ya que no se corta con ninguna de ellas).

El modelo del disco de Poincaré es geométricamente equivalente a la seudoesfera, por lo que cualquier resultado que probemos en uno queda también demostrado en la otra.

Cabe en este momento hacer una pequeña reflexión sobre la conveniencia de introducir a los alumnos de Secundaria en este tipo de Geometrías. En Matemáticas el concepto de "definición" tiene un significado diferente al del lenguaje común. Las malas interpretaciones sobre este concepto son probablemente una de las causas de las dificultades de los alumnos en la comprensión de resultados y demostraciones. Lo chocante y no intuitivo de las geometrías no euclídeas enseñan a percibir las diferencias entre definiciones y resultados. Cuando una persona desconoce el significado de una palabra recurre a un diccionario en donde encuentra una definición lo más ajustada posible a la realidad. Al leerla muchas veces uno es capaz de identificar o imaginarse el objeto en cuestión. En geometría, en matemáticas, la definición no es a posteriori del objeto (que además es un ente abstracto) sino que va en primer lugar. No comprender todos los matices de dicha definición nos llevará irremediablemente a la confusión o al error.

Pongamos un ejemplo: el concepto de paralelismo en las geometrías no euclídeas nos ayuda a entender este concepto también en la geometría euclídea. Desde niños pensamos en las rectas paralelas con la imagen de las vías de un tren, o la de dos segmentos paralelos, ideas intuitivas pero tremendamente simplificadas, ya que por definición una recta debe ser **infinita**. Además si hablamos del espacio tridimensional, para que dos rectas sean paralelas **deben estar en el mismo plano** (sino simplemente se cruzan). El analizar la situación del plano hiperbólico en el que las rectas parecen arcos finitos (no tanto sobre la seudoesfera) pero que no lo son en virtud de la métrica definida y comprobar que por un punto exterior se pueden trazar infinitas paralelas, hace que nos replanteemos los conceptos. Asimismo darse cuenta de que sobre la Tierra no existen en realidad rectas paralelas, nos permite descubrir lo falaz del ejemplo de los raíles del tren. Las cuestiones planteadas en la hoja de actividades van asimismo encaminadas a reforzar otros conceptos de la geometría plana tradicional en contraste con lo que ocurre en estas geometrías.

Después de reflexionar sobre tales cuestiones es el momento de responder a la que motivó esta incursión por estas geometrías. Lo único que las diferencia es el quinto postulado, es decir, que cualquier resultado, cualquier demostración realizados en la geometría euclídea que no utilice el axioma de las paralelas, sigue siendo válido en la hiperbólica (y en la esférica). Para probar cual es la suma de los ángulos de un triángulo se necesita ese postulado; por eso en cada geometría es diferente. Sin embargo en la demostración hecha anteriormente de que un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos no se ha utilizado ese postulado por lo que es cierto en cualquiera de las tres geometrías. Así pues, sintiéndolo mucho, el espantapájaros, a pesar de su diploma, sigue sin tener su cerebro a punto, al menos para este tipo de menesteres.

En la actualidad la Geometría utiliza métodos distintos al sintético (establecer una serie de axiomas y deducir de ellos las propiedades geométricas del objeto a estudiar), sustituidos por métodos topológicos, analíticos y algebraicos. Cuando se estudia un espacio ya no resulta "interesante" saber si cumple o no el V postulado de Euclides (aunque normalmente es un resultado que se obtiene indirectamente como consecuencia del estudio de otras propiedades como la de calcular el **tensor curvatura del espacio** en cuestión). La discusión sobre el V postulado ha quedado relegada a un problema histórico que ha contribuido enormemente al desarrollo de la Geometría, pero que actualmente es tomada como una cuestión secundaria en el estudio de la geometría de un espacio.

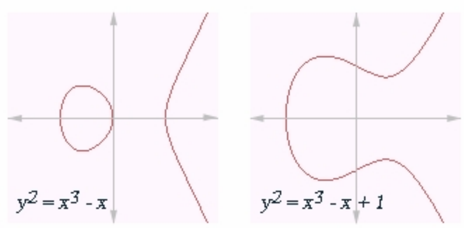
5. El último teorema de Fermat

En la tercera de las escenas presentadas aparece la generalización del teorema de Pitágoras para cualquier exponente natural, conocido como “último teorema de Fermat”, cuya leyenda es de sobra conocida. Aparece maliciosamente en la pizarra de los deberes de unos alumnos de Secundaria, tareas ante las que el diablo, encarnado en una atractiva profesora, argumenta su inutilidad. En realidad el único para el que no da ningún argumento en contra es para este resultado; simplemente afirma que *“no sirve para nada, ¿verdad?”*, coletilla esta última que viene a sustituir a “como es de todos sabido”. Pero, ¿es cierto que demostrar esta conjetura no ha servido para nada salvo dentro del abstracto mundillo la teoría de números? Invitemos nuevamente a que nuestros alumnos investiguen.

Quizá entonces descubran que gracias a su demostración se han relacionado y desarrollado dos campos aparentemente inconexos dentro de la matemática: las curvas elípticas y la teoría de curvas modulares. ¿Qué es esto? ¿Para qué sirve?

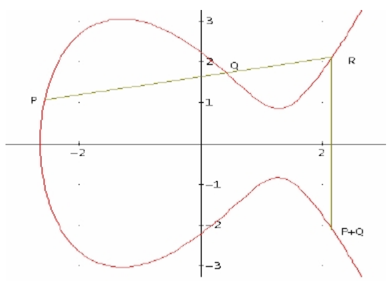
A grandes rasgos, digamos que una curva elíptica es la definida por una expresión del tipo $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
Este tipo de curvas aparecieron en el cálculo del perímetro de una elipse (de ahí su nombre), por lo que, buscando alguna utilidad aplicada, se encuentran en el cálculo de la longitud de las órbitas planetarias. Sin embargo su aplicabilidad también aparece en asuntos más mundanos, como la seguridad en las transacciones bancarias o de la invulnerabilidad de los mensajes privados por correo electrónico.

Las curvas elípticas pueden definirse sobre cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ (en la imagen pueden verse los dos tipos de curvas elípticas que aparecen si el cuerpo sobre el que se definen es el de los números reales).



Dependiendo de la característica del cuerpo pueden eliminarse algunos de los sumandos de la expresión general anterior sin pérdida de generalidad. A partir de una curva elíptica E y una recta que la corte, se puede definir en la curva una ley de grupo con el punto del infinito como elemento neutro:

dados P y Q de E, si R es un tercer punto de intersección con E (por ejemplo tómese en la segunda de las gráficas anteriores la recta $y = x + 1$), $P + Q$ se define como el simétrico de R respecto al eje OX (ver gráfica).



Con esta operación la curva constituye una variedad abeliana. Si el cuerpo $\mathbb{K}$ subyacente es el de los racionales o el cuerpo primo finito $\mathbb{Z}/(p)$, entonces el grupo de puntos racionales sobre $\mathbb{K}$ está finitamente generado (teorema de Mordell-Weil). Trabajando sobre cuerpos finitos, a veces no es posible definir una suma que sea compatible con las leyes de grupo en cada uno de los espacios cocientes $E/\mathbb{Z}/(p)$. Cuando no es posible, existe un *algoritmo* llamado de *adición* que proporciona un divisor del número n. El *algoritmo de Lenstra*, llamado también de la curva elíptica (1987) es una modificación del de adición para calcular $R = P + \ldots + P = kP$. Los datos iniciales son n (el número a factorizar), $P = (1, 1) \text{mód}\, n$ (para formar kP), el coeficiente a de la curva elíptica elegida, y s y t dos cotas sobre el tamaño de los factores primos de los posibles divisores. Si el algoritmo tiene éxito, nos da el punto R; si no, nos da un divisor no trivial de n.

Evidentemente el último párrafo sobrepasa con creces el nivel del alumnado de Secundaria, incluso el universitario de primer ciclo. No obstante todos ellos conocen la dificultad que existe en la factorización de números de muchas cifras. Con la ayuda del programa de cálculo simbólico DERIVE 6 y la rutina ECM creada por el experto programador y especialista en teoría de números Johann Wiesenbauer (ver [8]), podemos comprobar la aplicabilidad de este algoritmo con el siguiente ejemplo. Pierre de Fermat conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n}+1, n \in \mathbb{N}$, eran números primos. En 1732 Leonhard Euler probó que para $n = 5$ y $n = 6$ no es cierto. Si pedimos a DERIVE que simplifique $2^{2^7} + 1$, nos devuelve el valor

$$340282366920938463463374607431768211457$$

un número de treinta y nueve cifras. Tradicionalmente el procedimiento para saber si es primo o compuesto consiste en ir dividiendo este número por todos los números primos hasta llegar al menos a su raíz cuadrada, trabajo obviamente poco grato. Si le pedimos a DERIVE que lo factorice tampoco obtenemos una respuesta satisfactoria. Sin embargo si aplicamos el algoritmo de la curva elíptica mediante

$$\text{ECM}(2\text{^}2\text{^}7 + 1, [1, 1], 139, 10\text{^}4, 10\text{^}5)$$

([1,1] es como se indicó anteriormente el punto P, 139 al valor del coeficiente a de la curva elíptica y 10^4, 10^5 las cotas s y t), en 15.5 segundos obtenemos el valor

$$59649589127497217$$

que es en efecto un divisor no trivial de n:

$$2^{2^7} + 1 = 5704689200685129054721 \times 59649589127497217$$

es decir el séptimo primo de Fermat resulta ser un número compuesto de dos factores de 22 y 17 cifras, respectivamente. No sabemos cuanto tiempo llevó a

Fermat tratar de factorizar este número, ni siquiera si lo intentó (probablemente no), pero seguramente se quedaría encantado de poder aplicar el algoritmo de Lenstra (aunque no nos engañemos, encontrar el valor de a que factoriza a n tampoco es una tarea trivial). La factorización de números en producto de dos primos grandes es una de las claves de la criptografia que nos permite manejar, como se dijo antes, información confidencial (números de tarjetas de crédito, mensajes, etc.) con cierta seguridad.

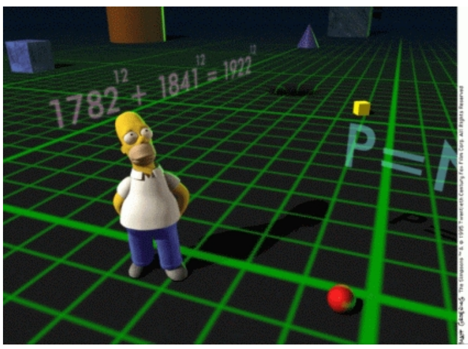
Las formas modulares son un concepto un tanto más complicado de resumir en pocas palabras. Simplemente digamos que son objetos definidos en el espacio complejo (cada punto queda determinado por cuatro coordenadas) con un número ilimitado de simetrías. Como ya se comentó, gracias a la búsqueda de una prueba del teorema de Fermat se ha profundizado en ambos campos, e inesperadamente, se logró encontrar una estrecha relación entre los mismos: *“Toda curva elíptica definida sobre el cuerpo de los números racionales es un factor del jacobiano de un cuerpo de formas modulares”* (conjetura y posterior teorema de Taniyama-Shimura). Volviendo a la secuencia de esa horrenda película, es muy probable que en efecto, al diablo, en caso de que existiera, no le haría demasiada gracia que le comieran terreno respecto a lo desconocido. Podríamos superarlo.

La charla concluyó con el visionado de una selección de otras escenas de películas con trasfondo geométrico. En otro capítulo de ***Los Simpson*** (varios de los guionistas de la serie han sido matemáticos y físicos, por lo que hay muchas referencias a estas disciplinas a lo largo de la serie) en el que Homer pasa de ser un dibujo plano para adentrarse en la tercera dimensión, puede verse que

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}.$$

Se puede proponer a los alumnos que con la ayuda de la calculadora traten de verificarlo (de ser cierto, Homer habría encontrado un contraejemplo al último teorema de Fermat).

Sorprendentemente la calculadora e incluso los programas de cálculo simbólico confirman la igualdad. ¿Qué es lo que falla? Quizá una pista venga bien: fijémonos en el último dígito de cada uno de los tres términos que componen la suma. El último dígito del primer sumando es 2^{12}, igual que el del número al otro lado de la igualdad.



Y entremedias tenemos 1^{12} que es igual a 1 que está sumándose al anterior. Es claro entonces que esa igualdad es falsa. La explicación está en que la calculadora no puede mostrarnos más de ocho o nueve dígitos; si las cantidades los exceden, utilizan el modo científico que nuevamente sólo muestra ese número de cifras. Y las expresiones de ambos términos empiezan a diferir en el décimo dígito. Con DERIVE nuevamente, en modo exacto, vemos que dichos números son

$$1782^{12} + 1841^{12} = 2541210258614589176288669958142428526657$$

mientras que

$$1922^{12} = 2541210259314801410819278649643651567616.$$

Pero por supuesto Homer Simpson, al igual que muchas personas, creen ciegamente en lo que su calculadora (u ordenador) les indica sin pararse un poco a reflexionar sobre el resultado. Y claro así nos (les) va. Las Nuevas Tecnologías pueden aportarnos mucho a la hora de aprender, enseñar y estudiar, pero previamente hay que saber manejarlas, y sobre todo, hay que ser críticos y cuestionar cada afirmación que se nos dé, venga de donde venga. En realidad las matemáticas consisten en eso. Quizá sea la razón por la que se nos atraviesan tanto, porque preferimos la comodidad de Homer Simpson.

6. Apéndice

A continuación se presentan algunas cuestiones sobre las que trabajar acerca de las escenas presentadas. La mayor parte han sido respondidas en el texto previo. Prácticamente ninguna es original, sólo han sido adaptadas para la ocasión. Aunque el cine permite abarcar disciplinas diversas, y bajo mi punto de vista, es ésta la manera de aprovechar plenamente su potencial riqueza educativa, describiremos sólo cuestiones relacionadas con el quehacer matemático.

I.- Lee las siguientes cuestiones **antes de ver las escenas de las películas**. Posteriormente, trata de responderlas:

a) ¿Has visto algún aspecto relacionado con las matemáticas?

b) ¿Aparece descrito algún resultado matemático en esas escenas, alguna fórmula o expresión matemática, algún concepto matemático conocido? En caso afirmativo trata de escribirlo en lenguaje matemático.

c) ¿Ves alguna relación entre estas escenas o responden a ideas y conceptos diferentes?

d) ¿Te ha llamado la atención algún otro comentario o actitud en relación con las matemáticas? Explícalo brevemente.

II.- Para trabajar en casa. Para trabajar en grupos o individualmente a elección del profesor.

a) Busca y resume lo que te parezca más importante sobre los siguientes conceptos y personajes: triángulo isósceles, Euclides, rectas paralelas, teorema de Pitágoras, geometrías no euclideas, último teorema de Fermat, Andrew Wiles, criptografía.

b) ¿Ves alguna relación entre tus averiguaciones y las escenas de las películas?

III.- Para trabajar en clase:

a) El espantapájaros de *El mago de Oz* ha propuesto un resultado matemático. Descríbelo. ¿Es cierto? Justifica tu respuesta.

b) Presentación y explicación por parte del profesor de los resultados necesarios para poder decidir cuando es posible construir un triángulo cualquiera a partir de tres longitudes dadas (ver artículo).

c) ¿Podemos construir un triángulo isósceles con longitudes de lados $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$? ¿Se verifica el resultado que enuncia el espantapájaros para algún tipo de triángulo?

d) Presentación y explicación por parte del profesor de qué son las geometrías no euclídeas. Descripción de la *Geometría Hiperbólica*, disco de Poincaré y de fichero de CABRI sobre disco de Poincaré. Explicar cómo se mide un ángulo hiperbólico y mostrar ejemplos con CABRI.

IV.- Para trabajar por el alumno (en clase o en casa) con ordenador. Trata de responder a las siguientes cuestiones:

a) Como sabes, *los ángulos adyacentes que se forman al cortarse dos rectas suman 180º* (son suplementarios). Prueba si este resultado es cierto con varios pares de rectas que elijas dentro del disco de Poincaré.

b) Triángulos Hiperbólicos. Las siguientes afirmaciones, ciertas en la geometría euclídea, ¿lo son en la geometría hiperbólica? Trata de justificar tus conclusiones.

b.1.- El lado mayor de un triángulo es el opuesto al mayor ángulo.

b.2.- Las alturas (medianas, mediatrices, bisectrices, respectivamente) de un triángulo se cortan en un punto.

b.3.- La suma de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

b.4.- La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

b.5.- El área de un triángulo es (base $\times$ altura)/2.

b.6.- Es posible construir un triángulo equilátero.

b.7.- Los tres ángulos de un triángulo equilátero miden lo mismo, 60º.

b.8.- Es posible construir un triángulo rectángulo.

b.9.- En un triángulo rectángulo se verifica el teorema de Pitágoras.

b.10.- Trata de construir dos triángulos hiperbólicos semejantes.

c) Otros polígonos hiperbólicos.

c.1.- Se puede construir un rectángulo hiperbólico. Y un cuadrado.

c.2.- Si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, el cuarto debe ser agudo.

c.3.- Es posible construir un cuadrilátero regular.

c.4.- Las diagonales de un cuadrilátero regular son perpendiculares.

c.5.- Es posible construir un paralelogramo.

c.6.- Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud. ¿Y los ángulos la misma amplitud?

c.7.- ¿Qué polígonos hiperbólicos regulares pueden construirse?

d) Comentar y explicar algunos grabados de Escher relacionados con la Geometría Hiperbólica (*Cielo e Infierno*, los de la serie *Límite circular*, etc.).

V.- Último teorema de Fermat.

a) ¿Crees, como la maestra de la película, que el último teorema de Fermat no sirve para nada?

b) Explicar que es la criptografia, la dificultad en la factorización de números grandes, las curvas elípticas, etc., con cuestiones similares a las presentadas en el texto precedente.

NOTA: Evidentemente el profesor decide el interés o el tiempo que quiere dedicar a una actividad como ésta, ya que como se puede deducir con sólo leer el guión previo, estas actividades pueden alargarse *ad infinitum*.

Bibliografía

[1] J. Dieudonné, *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Editorial, 1998.

[2] M. Gardner, *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*, Labor, 1988.
[3] A. Millán Gasca, *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*, Nivola, 2004.
[4] D. Pedoe, *La geometría en el arte*, Gustavo Gili, 1982
[5] A.J. Población Sáez, *Las matemáticas en el cine*, Proyecto Sur de Ediciones-RSME, 2006.

Páginas web

[6] Sección Cine y Matemáticas, portal DivulgaMAT. Reseña de Marzo de 2005.
http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/CineMate/AlfonsoJ/index.asp
[7] Introducción a los modelos hiperbólicos (en francés)
http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GeoHyper/HIntro/HIntro1.htm
[8] En ***http://www.austromath.at/dug/dnl53.php*** pueden descargarse gratuitamente las Derive Newsletters números 53 al 62, publicaciones del *Internacional Derive User Group*. En el número 58 de junio de 2005 (dnl58.pdf), pp. 40 - 51, aparecen los detalles de la programación de los algoritmos de adición y de Lenstra. Los ficheros se encuentran en mth58.zip. El correspondiente a este artículo es titbit30.

Alfonso Jesús Población Sáez
Universidad de Valladolid
Escuela Tecnica Superior de Informatica
Departamento de Matemática Aplicada
Campus Miguel Delibes, 47011 Valladolid
e-mail: ***alfonso@mat.uva.es***
http://www.gauss.mat.eup.uva.es/ alfonso/