Teoría de juegos: ¿matemáticas o ciencia social? [1]

por

Federico Valenciano Llovera, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. El objeto de la teoría de juegos

Cuando hace meses acepté la invitación de Marta Macho a participar en este "Paseo por la Geometría" me explicó que el nombre de esta serie de charlas se debía a razones históricas, pero que su contenido temático se había ido ampliando de modo que hoy tiene cabida en él cualquier noticia de interés sobre lo que las matemáticas o los matemáticos hacen o hayan hecho por ahí, en el mundo. También el título de esta charla tiene explicación histórica. Marta me pidió un título hace tiempo y, sin tener aún muy claro cuál fuera finalmente su contenido, avancé éste. Hoy me parece inadecuado para una charla ante un auditorio que mayoritariamente desconoce qué cosa sea la teoría de juegos. En todo caso la respuesta a la pregunta que le da título es análoga a la que cualquier persona en este auditorio daría sin dudar a la pregunta de si la física es matemática o ciencia de la naturaleza.

La teoría de juegos es una ciencia social cuyo objetivo es entender mejor las "situaciones de juego". Es decir, situaciones en las que dos o más individuos interactúan cada uno buscando sus objetivos. De modo que el resultado final, es decir, lo que pase, depende de lo que todos y cada uno de los agentes haga. En tales contextos decir qué cosa es lo óptimo o más racional que cabe hacer no es obvio en general. Como en la física, el material de construcción de los modelos de la

[1] Parte del material para esta charla está tomado de Valenciano (2002).

teoría de juegos es matemático.

Podría seguir hablando en términos abstractos y generales sobre la teoría de juegos, pero creo que será más interesante si hablamos también un poco de aquéllos que la han hecho. Cuando yo era estudiante siempre me presentaron las matemáticas como una misteriosa creación anónima. Sí, Cauchy, Riemann, Lebesgue, Abel, Bolzano, Galois y unos pocos más aparecían dando nombre a teoremas u objetos matemáticos, pero nadie se paraba a contarnos algo de estos misteriosos personajes. La teoría de juegos es muy joven, de modo que incluso algunos de sus primeros actores aun viven, lo que me permitirá centrarme en esta charla en uno de ellos: John F. Nash, y en su trabajo. Esta elección no es arbitraria, pues se trata de un matemático cuya contribución a la teoría de juegos es crucial y paradigmática. Por otro lado, la película de R. Howard en la que Russel Crowe encarna al dramático personaje, "Una mente maravillosa" , basada en la biografía del mismo título por S. Nasar, ha llevado su figura hasta el gran público de modo que seguramente casi todos habreis oido algo de él.

En 1994, junto a Harsanyi y Selten, recibe el Premio Nobel de Economía por unos trabajos publicados a principios de los 50, cuando tenía poco más de 20 años. En la nota de prensa en la que la Real Academia Sueca de Ciencias anunciaba la concesión del galardón se le reconoce como introductor de la noción que con el tiempo sería conocida como "equilibrio de Nash", y de la distinción entre juegos cooperativos, en los que son posibles los acuerdos vinculantes, y juegos no cooperativos, donde esta posibilidad no existe.

Del mismo modo que el concepto de equilibrio es la noción focal en el terreno no cooperativo, en el terreno cooperativo proporciona el paradigma más influyente con su solución al problema de negociación. En esta charla comentaré brevemente la noción de equilibrio, para concentrarme con más detalle en esta segunda contribución, menos conocida.

2. El equilibrio de Nash

La noción de equilibrio es en realidad un condición necesaria de consistencia para una teoría del comportamiento racional en situaciones de juego. Tanto si buscamos una teoría que prediga lo que resultará de tal interacción en determinada situación de juego, como si buscamos una teoría que nos recomiende un curso de acción para cada jugador, en ambos casos el resultado (estos es, la predicción o la n-tupla de recomendaciones, esto es, una para cada jugador) debería ser un equilibrio, es decir, una n-tupla de estrategias tal que cada una de ellas es óptima frente a la elegida por los otros. Si no fuera así es que alguien no habría hecho lo mejor que podía hacer, lo que entra en contradicción sea con la predicción sea con la recomendación.

Una vez formulada con claridad la idea[2] parece obvia: un ejemplo de "huevo de Colón". Pero, como el trabajo de los cincuenta años posteriores ha mostrado, esta sencilla noción estaba preñada de preguntas. Habiendo, como ocurre a menudo, no uno sino muchos y diversos equilibrios ¿cómo se llega a alguno de ellos, y por qué no a otros? ¿son todos los equilibrios igual de razonables? ¿cómo es que a veces no se llega a ninguno y sin embargo es así mejor para todos? ¿qué pasa con el tiempo, dejado fuera del modelo? ¿cuál es el papel de la información? ¿qué pasa si no todos los jugadores saben todo sobre la situación en la que están inmersos? Todas estas y otras preguntas han dado qué hacer todos estos años (entre otros a sus compañeros de Nobel, Harsanyi y Selten) y aún hoy día lo siguen dando.

3. El problema de negociación o regateo

Como resultado de su primer contacto con la teoría de juegos en Princeton, donde ésta estaba de moda, Nash[3] abordó y propuso un original tratamiento y "solución" al problema de negociación o regateo (" the bargaining problem"). Un ejemplo familiar de este tipo de situación es la de un comprador y vendedor discutiendo o "regateando" el precio de compra-venta de un objeto. Éste puede ser un cacharro de escaso valor en un mercadillo, un piso o una empresa. Si el precio que el comprador esta dispuesto a pagar es superior a aquél al que el vendedor estaría dispuesto a vender (sólo en este caso ambos se beneficiarían del trato), entonces cualquier precio intermedio beneficia a ambos. El conflicto está en sus preferencias contrarias: cuanto más alto mejor para el vendedor pero peor para el comprador, y viceversa. En situaciones de este tipo: ¿Cabe fundamentar teóricamente algún tipo de predicción o recomendación ?

En términos más generales una situación de regateo o negociación es una situación en la que dos agentes tienen a su alcance un conjunto de opciones o alternativas beneficiosas para ambos, y factibles siempre que se pongan de acuerdo sobre una de ellas. El problema abordado por Nash es el de determinar el resultado o "nivel de satisfacción" que dos individuos racionales pueden esperar en una situación de este tipo.

---

[2]En su tesis (Princeton, [5]), que consta de tan solo 27 páginas, presenta el concepto de equilibrio no cooperativo y prueba su existencia en la extensión mixta de un juego finito utilizando el teorema de punto fijo de Brower. Con pocas modificaciones aparece en *Annals of Mathematics* (Nash, [6]), aunque ya en 1950 había publicado una prueba más breve basada en el teorema de punto fijo de Kakutani en *Proceedings of the National Academy of Sciences* (Nash, [4]). Curiosamente este último trabajo junto al libro [9] de von Neumann y Morgenstern (1944) son las dos únicas referencias bibliográficas en la tesis de Nash, cuya reproducción facsímil puede verse en la recopilación de sus trabajos [1] editada por Khun y Nasar en 2002.

[3]Nash, [3] y [7].

Para ello, Nash ([3]) propone un modelo matemático muy simple que capta lo esencial de una situación de negociación por medio de una cierta idealización de la misma. Dos agentes, que llamaremos 1 y 2, buscan un acuerdo sobre qué alternativa llevar adelante de un conjunto de ellas. Se supone que ambos están de acuerdo en ampliar el conjunto de opciones posibles incluyendo como tales mezclas aleatorias de las alternativas de partida. Por ejemplo, si a y b son dos alternativas o acuerdos factibles, también lo sería cualquier combinación probabilística de ambas, esto es, cualquier "lotería" (el término hoy habitual) que da a con cierta probabilidad p, y b con probabilidad $(1 - p)$, con $0 \leq p \leq 1$[4]. Esto involucra el problema del comportamiento racional en situaciones de riesgo.

Nash supone las preferencias de ambos agentes consistentes con el modelo de conducta racional en situaciones de riesgo introducido por von Neumann y Moregenstern en su obra fundacional de 1944. Es decir, que las preferencias de ambos agentes pueden representarse del siguiente modo. Para cada uno de ellos existe una función u_i que asigna a cada alternativa a de las de partida un número real $u_i(a)$, de modo que:

(i) $u_i(a) > u_i(b)$ si y sólo si a es preferido a b por i (esto es, u_i es una función (de "utilidad") que representa las preferencias de i sobre el conjunto de alternativas de partida), y

(ii) la función ("de utilidad esperada"), que también denotaremos u_i, que asigna a cada lotería el valor esperado de u_i (por ejemplo, si l es la lotería que da a con probabilidad $1/3$ y b con probabilidad $2/3$, entonces la utilidad esperada de l es $u_i(l) = 1/3u_i(a) + 2/3u_i(b)$), representa las preferencias de i sobre el conjunto así ampliado de opciones. Es decir, se evalúan las loterías en términos de su utilidad esperada.

Como es fácil comprobar, de existir tal función u_i sobre el conjunto de alternativas de partida, ésta no es única: también cumplirá estas mismas condiciones $au_i + b$, para cualquier par de números reales a y b, siempre que $a > 0$. De otro modo, estas funciones, para uno y otro agente, están determinadas salvo el cero u origen y la unidad de escala para cada una de ellas.

Elegido así un par de funciones u_1 y u_2 para expresar las preferencias de uno y otro agente, es posible describir sumariamente la situación a la que ambos se enfrentan representando gráficamente en el plano todos los "vectores de utilidades" $(u_1(l), u_2(l))$ asociados a todas las posibles opciones, incluyendo las mezclas aleatorias. Es decir, haciendo abstracción de los acuerdos en sí y reteniendo sólo el conjunto S de los vectores de utilidad asociados factibles. Un punto distinguido en este conjunto, que denotamos $d = (d_1, d_2)$, es el de los niveles de

[4]En términos precisos y más generales una lotería sobre un conjunto A es una medida de probabilidad sobre A con soporte finito.

utilidad correspondiente al caso de desacuerdo o *status quo,* esto es, la situación de partida a la que revertirían en caso de no llegar a ningún acuerdo. El conjunto así obtenido es convexo, puesto que cualquier punto intermedio del segmento que une dos cualesquiera del mismo es el vector de utilidades que se obtiene para la lotería apropiada entre los dos acuerdos correspondientes a esos dos puntos. Nash supone asimismo que este conjunto es compacto (una condición suficiente para ello es que el conjunto de acuerdos deterministas de partida sea finito). Y también que S contiene algún punto de coordenadas estrictamente mayores que las de d, es decir, supone que entre la opciones factibles alguna es preferida por ambos al status quo. Naturalmente, distintos acuerdos alternativos pueden proyectarse sobre un mismo punto de S siempre que sean vistos como indiferentes por ambos agentes, pero si es así pueden verse como acuerdos equivalentes. De este modo, este gráfico, el del par (S, d), aunque determinado sólo salvo un cambio de escala, puede tomarse como una representación sumaria de la situación en términos de utilidades: cualquier punto en S es factible, d es el punto de partida; 1 desea un punto cuya primera coordenada sea lo más grande posible, mientras que 2 desea que la segunda coordenada sea lo más grande posible.

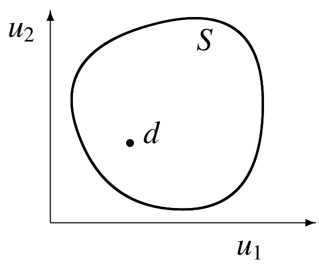

Figura 1: Un problema de negociación (S, d)

Resumida de este modo la situación, se entiende por "solución" del problema un punto de S, realizable por tanto mediante el acuerdo apropiado, que pueda justificarse o interpretarse como expectativa *racional* compartida por ambos agentes, que se reconocen mutuamente como tales y comparten la información recogida en (S, d). Se trata de fundamentar una "solución" $\Phi(S, d)$ para cada problema de este tipo de modo que sea interpretable como expectativa de acuerdo razonable. Dos condiciones parecen obvias:

a) la solución debe ser *factible*, es decir, $\Phi(S, d) \in S$;

b) y debe proporcionar a ambos al menos lo que (sin más que rechazar el acuerdo) pueden garantizarse, es decir, $\Phi_i(S, d) \geq d_i$ para $i = 1, 2$ (condición de *racionalidad individual* [5]).

El modo de proceder de Nash es proponer condiciones, una a una razonables y consistentes con el sentido de lo dicho hasta aquí, que cabría esperar de una solución entendida como una aplicación $(S, d) \mapsto \Phi(S, d)$, es decir, como una aplicación $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{B}$ denota el conjunto de todos los problemas de negociación, es decir, todos los pares (S, d) que cumplan las condiciones especificadas. Nash propone las condiciones siguientes:

1. Si (x_1, x_2) es un punto de S tal que existe otro $(y_1, y_2) \in S$ tal que $y_i > x_i$ (para $i = 1, 2$), entonces $(y_1, y_2) \neq \Phi(S, d)$. Esta condición (habitualmente denominada "eficiencia" u "optimalidad de Pareto") expresa que no aceptarán un acuerdo si hay otro factible y mejor para ambos.

2. Si el conjunto de opciones de partida se reduce, manteniéndose iguales el punto de desacuerdo y las preferencias (y funciones de utilidad que las representan) sobre las opciones que permanecen, así como sobre sus combinaciones probabilísticas, de modo que el nuevo conjunto de vectores de utilidades factibles se reduce a $T \subseteq S$, pero contiene a $\Phi(S, d)$, entonces $\Phi(T, d) = \Phi(S, d)$. Esta condición (después denominada de "independencia de alternativas irrelevantes") expresa la siguiente condición de racionalidad: si $\Phi(S, d)$ es considerado por ambos agentes el vector de utilidades asociado al mejor acuerdo posible en la situación de partida, y a continuación el conjunto de acuerdos factibles se reduce manteniéndose factible la opción antes considerada óptima, parece natural y razonable seguir considerando ésta óptima sobre un conjunto menor de posibilidades.

   Se dice que un problema (S, d) es *simétrico* si $d_1 = d_2$, y S es cerrado por permutaciones de sus coordenadas, es decir, el conjunto S es simétrico con respecto a la bisectriz $x_1 = x_2$.

3. Si (S, d) es simétrico, entonces $\Phi_1(S, d) = \Phi_2(S, d)$. Esta condición ("simetría") requiere que la solución trate exactamente igual a ambos jugadores cuando su situación es enteramente simétrica en lo que se refiere a la información incorporada en el modelo[6].

   Finalmente, dado el grado de indeterminación de las funciones de utilidad, la solución debe ser independiente de la elección de origen y escala para éstas.

---

[5] En realidad Nash no utiliza esta condición que puede ser deducida de las suyas, que a continuación describimos. Por tanto suponerla es redundante, pero nos permitirá simplificar la prueba.

[6] En Nash [7] esta condición es remplazada por la de "anonimidad", que requiere que la solución no dependa de la "etiqueta" (1 ó 2) que se asigne a cada agente. Más precisamente, la solución sólo debe depender de la descripción matemática de la situación, pero siendo irrelevante la etiqueta asignada a cada jugador, viniendo así a ser una condición de isomorfía.

4. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación afín positiva, es decir, $T(x_1, x_2) = (a_1x_1 + b_1, a_2u_2 + b_2)$ con $a_i > 0$ $(i = 1, 2)$, entonces $\Phi(T(S), T(d)) = T(\Phi(S, d))$. (Condición de "invariancia respecto de tranformaciones afines").

Pues bien, veamos que *estas cuatro condiciones, bajo los supuestos descritos, determinan de modo unívoco una solución para cada problema.*

Antes de seguir adelante nótese que bajo las condiciones de "racionalidad individual" e "independencia de alternativas irrelevantes" en un problema (S, d) sólo es relevante (en lo que a su solución respecta) la parte de S por encima de d, o más precisamente el conjunto

$$S_d = \{x \in S : x \geq d\}.$$

Es decir, si (T, d) es un problema tal que $T_d = S_d$, entonces $\Phi(T, d) = \Phi(S, d)$ (basta observar que las dos condiciones anteriores implican que para todo (S, d), se tiene $\Phi(S, d) = \Phi(S_d, d)$). Por tanto podemos restringir nuestra atención a problemas (S, d) en los que $S = S_d$.

Consideremos en primer lugar el problema $(\Delta, 0)$ en el que Δ es el triángulo compacto de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, y el punto de desacuerdo es $(0, 0)$. Por la condición de "eficiencia" $\Phi(\Delta, 0)$ debe ser un punto del segmento $\overline{(1, 0)(0, 1)}$, y por la de simetría debe ser $\Phi_1(\Delta, 0) = \Phi_2(\Delta, 0)$. Por tanto, $\Phi(\Delta, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Consideremos ahora cualquier problema "triangular" de la forma (Υ, d) en el que Υ es un triángulo compacto con catetos paralelos a los ejes cuyo vértice común es d. Evidentemente existe una transformación afín positiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(\Delta, 0) = (\Upsilon, d)$. Y por la condición de invariancia debe ser

$$\Phi(\Upsilon, d) = \Phi(T(\Delta, 0)) = T(\Phi(\Delta, 0)) = T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

que es precisamente el punto medio de la hipotenusa de Υ. Tenemos así determinada la "solución" de cualquier problema de la forma "triangular".

Veamos finalmente que esto, junto a la condición que aún no hemos utilizado, determina de modo unívoco la solución de cualquier problema. Sea un problema arbitrario (S, d) (sin pérdida de generalidad podemos suponer $S = S_d$). Es fácil comprobar (veáse Figura 2) que existirá una recta y sólo una que intersecte el conjunto S dejándolo debajo, y tal que el punto medio del segmento que une las intersecciones de esta recta con las paralelas a los ejes que pasan por d pertenezca a S. Denotemos x^* a este punto. Sea (Υ, d) el problema "triangular" en el que Υ es el triángulo compacto delimitado por las dos rectas y el segmento mencionados. Según hemos visto la solución de este problema es $\Phi(\Upsilon, d) = x^*$. Y como $S \subseteq \Upsilon$, y $x^* \in S$ concluimos en virtud de la condición de "independencia de alternativas irrelevantes" que $\Phi(S, d) = x^*$.

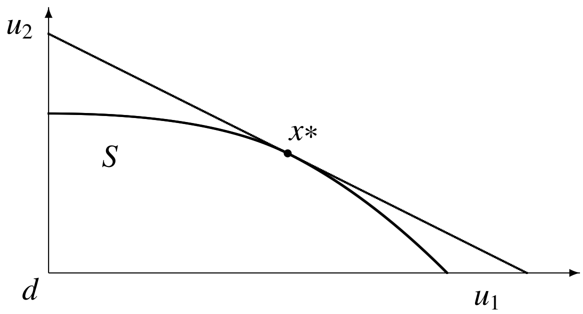

Figura 2: La solución de Nash

Por tanto las condiciones anteriores determinan unívocamente la solución de cualquier problema. Además es fácil comprobar que éste punto x^* es el punto de S en el que se maximiza el producto $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$. Es decir, en general se tiene que la única solución que satisface las condiciones especificadas viene dada para un problema arbitario por

$$\Phi(S, d) = \arg \max_{x \in S_d} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2).$$

Esta es la solución de Nash al "bargaining problem". ¿Qué valor tiene? ¿Qué tiene que ver con lo que ocurre en el mundo real? En el modelo de Nash se supone información completa (como esos extraterrestres que se comunican por telepatía, ambos negociadores son mutuamente transparentes sin más que mirarse a los ojos) y no hay demora para el acuerdo, aunque no se sabe como se llega a él: ¿se supone que, compartiendo toda la información, un relámpago de perfecta racionalidad, que también se sabe compartida, les lleva allí limpiamente? Es claro que estas condiciones no son las de las numerosas situaciones de negociación que encontramos en el mundo real, en las que ni las preferencias de los agentes son tan precisas, ni la racionalidad es tan perfecta, ni la información es completa. Pero el modelo de Nash y su solución, además de ser una forma completamente nueva de afrontar el problema, como toda buena respuesta genera nuevas preguntas. Como en el caso de la noción de equilibrio no cooperativo, la estela de trabajo a partir de esta "solución" se extiende hasta nuestros días.

En un trabajo posterior Nash ([7]) reexamina el problema de negociación desde un punto de vista *no cooperativo*, es decir, modelizando la situación como un juego no cooperativo en el que los agentes pueden hacer propuestas y amenazas, y en el que la solución descrita resulta ser un equilibrio no cooperativo. De nuevo, otro papel seminal, que sienta las bases de lo que después se ha llamado el "programa de Nash", esto es, el tratamiento no cooperativo de situaciones cooperativas a base de incorporar en el modelo un "protocolo" de negociación en el que uno u otro acuerdo (o "solución " cooperativa) será o no el resultado de equilibrio.

4. Comentario final

Hasta aquí una presentación sumaria de las dos aportaciones básicas de Nash a la teoría de juegos y la economía, o a la ciencia social en general, vale decir, aunque sean los economistas los que más se han interesado por ellas.

Y bien: ¿es para tanto? No es fácil darse cuenta a primera vista del valor y la significación de la contribución de Nash. Después de todo, todo lo que he contado en esta charla es, matemáticamente hablando, bastante sencillo. La noción de equilibrio es algo que parece un caso más del famoso "huevo de Colón", y el modelo y solución del problema de negociación es casi "trivial", y la prueba elemental.

¿Entonces? Pues es el caso que dentro de la teoría de los juegos no cooperativos la noción central desde su introdución por Nash es la de equilibrio, y dentro de la teoría de los juegos cooperativos, la solución de Nash al "bargaining problem" es una de las referencias básicas, y la central en el caso de la literatura relacionada con el problema de negociación. En ambos casos el genio matemático de Nash se muestra *no* en la complejidad técnica de los recursos formales puestos en juego, sino en la frescura y capacidad de abstracción para, en uno y otro caso, captar lo esencial de una situación y expresarlo con claridad, simplicidad y rigor. En el primer caso formula en términos nítidos el problema básico que entraña la interacción racional: el resultado de acciones racionales en una situación de interdependencia estratégica en la que todos los participantes, igualmente racionales, comparten la información que se incluye en el modelo debería ser un equilibrio. En el segundo, propone un modelo simple pero altamente inspirador de una situación hasta entonces considerada inabordable teóricamente, y lo aborda de un modo enteramente original y sin precedentes en este terreno.

En suma, el trabajo de Nash sigue siendo hoy una lección llena de actualidad de lo que las matemáticas pueden aportar a las ciencias sociales.

Bibliografía

[1] H.W. Kuhn, and S. Nasar (editores), *The essential John Nash*, Princeton University Press, 2002.
[2] S. Nasar, *A beautiful mind*, Simon & Schuster, 1998.
[3] J.F. Nash, *The Bargaining Problem*, Econometrica 18, 155-162, 1950.
[4] J.F. Nash, *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences 36, 48-49, 1950.
[5] J.F. Nash, *Non-Cooperative Games*, Ph.D. dissertation, Princeton University, 1950.
[6] J.F. Nash, *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics 54, 286-295, 1951.
[7] J.F. Nash, *Two-Person Cooperative Games*, Econometrica 21, 128-140, 1953.
[8] F. Valenciano, *J. F. Nash: un matemático Nobel de Economía*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 5, 578-587, 2002.
[9] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944

Federico Valenciano Llovera
Universidad del País Vasco-
Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencias Económicas
y Empresariales
Departamento Economía Aplicada IV
Lehendakari Agirre 83, 48015 Bilbao
e-mail: ***federico.valenciano@ehu.es***