

Curvas en la Naturaleza

por

Antonio Pérez Sanz, IES Salvador Dalí

“El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos solo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto.”

Galileo Galilei

“La mente humana, previa y libremente, tiene que construir formas antes de encontrarlas en las cosas.”

Albert Einstein

1. Matemáticas y Naturaleza

Los matemáticos hemos sido a lo largo de la historia, sin ningún género de dudas, los platónicos más recalcitrantes. Y algunos lo siguen siendo. Y sin embargo, nadie pone en duda el valor de las matemáticas como herramienta para comprender y explicar el mundo que nos rodea, en sus múltiples manifestaciones. A pesar de su carácter abstracto, de constituir un lenguaje cerrado y un tanto hermético y de ser los objetos de su estudio entes “ideales”, es decir con existencia en el mundo de las ideas, y en muchos casos alejados de la realidad, al menos en apariencia, una pregunta nos asalta de manera casi obsesiva:

¿Por qué las matemáticas han dado a lo largo de la historia muestras tan sorprendentes de una más que notable eficacia en el estudio de la Naturaleza?

Los éxitos en la física clásica, en la astronomía, en la relatividad, en la mecánica cuántica se van extendiendo a otras disciplinas no sólo de las ciencias de la naturaleza sino también de las ciencias humanas: economía, sociología, política, psicología...

En ciencias en apariencia tan lejanas de las matemáticas como la biología, las matemáticas consiguen explicar las manchas de las alas de las mariposas o las de las cebras y leopardos mediante ecuaciones diferenciales y desde hace un par de siglos, las ecuaciones de las flores y los modelos de crecimiento de las ramas de los árboles. En geología la estructura de los cristales se explica mediante modelos geométricos basados en los poliedros y sus simetrías.

De hecho, en la actualidad toda manifestación científica encuentra en los modelos matemáticos no sólo la herramienta para desarrollar sus investigaciones sino también el instrumento ideal de validación social de sus conclusiones.

Sin embargo, y a pesar de la omnipresencia de las matemáticas a nuestro alrededor no es tarea simple hacer emerger el aparato matemático que hay detrás de casi todos los fenómenos naturales o sociales que nos encontramos en nuestra vida cotidiana. No es fácil hacer ver a un público no especialista las matemáticas que nos rodean.

1.1 Desde la Grecia clásica. Las sombras en la caverna

Los pitagóricos son los primeros que van a intentar dotarse de una visión cosmológica del universo físico, es decir de construir una teoría matemática que proporcione una explicación global de todos los fenómenos naturales.

Para los pitagóricos la esencia del mundo físico es matemática. Colocarán al número natural como origen, fundamento y explicación de todas las cosas. Filolao llega a afirmar:

“Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido.”

Esta visión no es muy distante de la mantenida por Galileo más de 2.000 años después en su cita del principio y se ha mantenido viva hasta nuestros días. En su concepción moderna lleva a algunos a firmar que las matemáticas no son una descripción de la realidad sino la expresión misma de la estructura de la realidad, el lenguaje auténtico de la realidad.

Desde este punto de vista la eficacia de las matemáticas para explicar la naturaleza es automática, es más, la naturaleza sólo se puede explicar y entender a través de las matemáticas.

1.2 Platón

Aunque Platón es un heredero de las matemáticas pitagóricas su concepción filosófica global afecta al papel reservado a las matemáticas en su relación con la naturaleza:

- Las matemáticas constituyen un universo de ideas independientes del mun-

do de los fenómenos.

- Forman un lenguaje intermedio que permite a partir de lo sensible apuntar al mundo de las ideas.

Platón considera a las matemáticas como “*ciencia liberal y desinteresada*”, independiza las matemáticas del pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, liberándola intelectualmente de instrumentos materiales, porque “*tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía*” (Platón).

Vídeo



Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.
 Serie: Universo Matemático. TV2. 2000
 Autor: Antonio Pérez Sanz
 Realizadora: Ana Martínez
 Distribuidora: RTVE

Extracto del vídeo

La esfera y el círculo, las formas geométricas perfectas, la armonía de la lira, las matemáticas y la música de la mano en la primera victoria del orden sobre el caos.

Platón el famoso filósofo griego fue más allá, llegando a afirmar que Dios, el creador del Universo, utiliza siempre procedimientos geométricos. Convencido de la actuación de Dios como un geómetra, Platón en su diálogo Timeo, asocia cada principio elemental con uno de los poliedros regulares, los sólidos platónicos:

- *El fuego, el elemento más ligero, es el tetraedro, formado por cuatro triángulos equiláteros, el sólido regular más sencillo.*
- *El aire, el segundo elemento se compone de ocho triángulos unidos entre sí: el octaedro.*
- *El agua nacería de la unión de veinte triángulos equiláteros. Sería el icosaedro.*
- *La Tierra el elemento más pesado lo formaría la reunión de seis cuadrados, un cubo.*
- *Y termina Platón diciendo: “puesto que todavía había una quinta composición, el dios la utilizó para el universo cuando lo pintó”. Esa quinta composición es el dodecaedro, un sólido regular formado por 12 pentágonos.*

¿Cómo poder sustraerse a la increíble belleza de un modelo geométrico tan armonioso como suprema expresión del orden en el Universo?

Para Aristóteles, un poco más realista, el objeto de las matemáticas son las formas extraídas de la naturaleza, es la modelización de las regularidades empíricas que se producen en la realidad. Esta visión va a dominar la historia de las matemáticas hasta bien entrado el siglo XX.

Desde entonces, y tras la aparición de los Elementos de Euclides, los puntos, las rectas, los ángulos, los círculos y las esferas... las formas perfectas, los poliedros regulares van a constituirse en las armas casi exclusivas para interpretar la Naturaleza. Las formas imperfectas, las curvas extrañas, los polígonos no regulares, los sólidos distintos de los conos, los cilindros y las esferas... quedan expulsados del universo matemático. Sólo Arquímedes y algún otro contestatario se preocupará de mirar con ojos matemáticos esas otras formas que se rebelan contra Platón y Aristóteles.

Video



Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.

Serie: Universo Matemático. TV2. 2000

Autor: Antonio Pérez Sanz

Realizadora: Ana Martínez

Distribuidora: RTVE

Extracto del vídeo

Desde Platón la historia de la Ciencia será la búsqueda de ese modelo geométrico, de esas leyes que controlan el funcionamiento del Cosmos, la búsqueda de ese orden inmutable capaz de explicar todos los fenómenos naturales. La comprensión y el dominio de la Naturaleza al alcance del ser humano.

Aristóteles situará la Tierra en el centro del Universo y el frente de batalla entre el orden y el caos en la esfera de la órbita lunar. Por encima de ella el mundo celeste, perfecto inmutable y perpetuo, el reino del orden. Por debajo el mundo terrestre, constituido por los cuatro elementos Tierra, Agua, Aire y Fuego intercambiándose entre sí; un mundo imperfecto, cambiante e impredecible. El reino del caos.

Pero algo viene a romper esa armonía perfecta del mundo ideal por encima de la Luna. Los planetas conocidos describen órbitas erráticas sobre el fondo de estrellas fijas. De hecho el término planeta significa “errático” o viajero. A veces, incluso parecen retroceder en sus órbitas.

¿Cómo encajar estos hechos con un modelo geométrico ideal? Aristóteles recurre a un modelo físico basado en esferas de éter en las que se mueven los planetas. Estas esferas se van acelerando y frenando unas con otras. El complejo mecanismo necesitaría de 56 esferas distintas para poder explicar los movimientos aparentes de los planetas.

Por desgracia para la Ciencia este modelo, basado en la esfera y el círculo, permanecerá intocable durante dos mil años. Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear auténticas filigranas matemáticas para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico.

La más conseguida será la de un astrónomo de Alejandría que vivió en el siglo II de nuestra era: Claudio Ptolomeo. Su obra “Síntesis Matemática” pasará a la historia con el nombre de la traducción árabe: El Almagesto, que significa “el muy grande.”

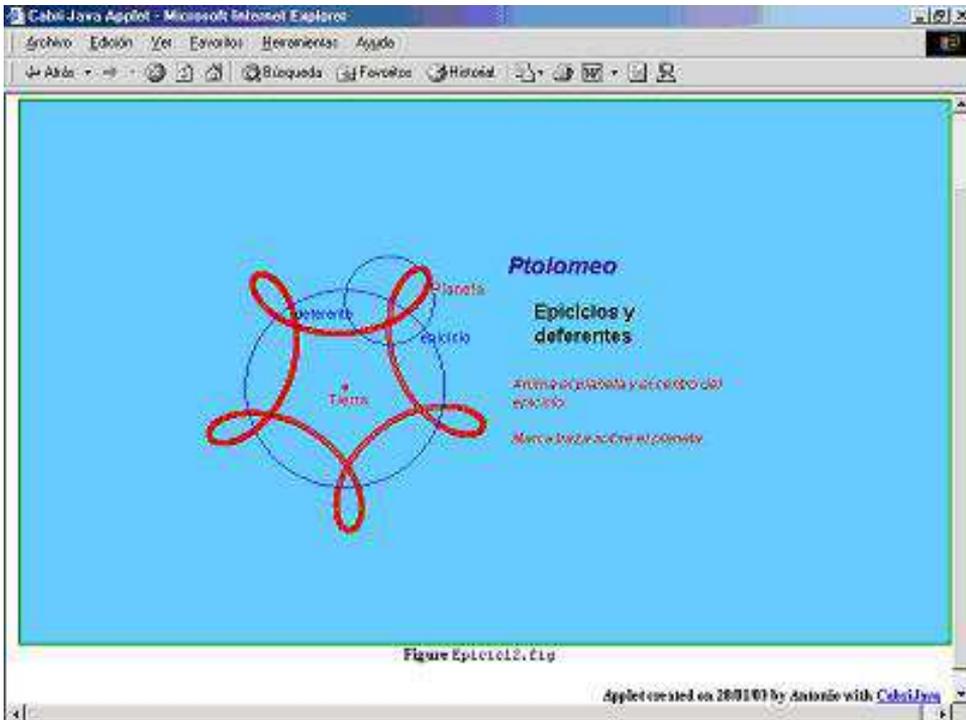
Para explicar el movimiento de los planetas respetando la idea de que sólo se pueden mover en órbitas circulares Ptolomeo va a inventar un ingenioso modelo geométrico: los epiciclos y los deferentes.

A cada planeta, incluidos el Sol y la Luna, les asigna un círculo imaginario llamado deferente. La Tierra está en interior de este círculo, aunque no necesariamente en el centro. El planeta girará en un nuevo círculo llamado epiciclo cuyo centro será un punto del círculo deferente. A moverse el centro del epiciclo a lo largo de la deferente, al planeta se acerca o se aleja de la Tierra lo que explicaba a la perfección los cambios de brillo de un mismo planeta observados en distintos momentos del año.

Ptolomeo pensaba que en realidad los planetas no se movían así, pero su modelo geométrico explicaba a la perfección lo que cualquier astrónomo veía en el cielo.

Los astrónomos que vinieron tras él tomaron su modelo como un dogma y aplicaron penosos cálculos matemáticos para realizar tablas que predijesen la posición de todos los planetas conocidos. Uno de las más completas fueron las del rey castellano Alfonso X el sabio. Las famosas tablas alfonsíes. Su elaboración era tan compleja que le hicieron exclamar al sensato rey Alfonso: “Si el Señor Todopoderoso me hubiera consultado antes de embarcarse en la Creación, le habría recomendado algo más simple.”

Aunque hoy nos parezca ingenuo el modelo geométrico de Ptolomeo, desde un punto de vista exclusivamente matemático resulta de una riqueza increíble. La idea de hacer rodar círculos sobre círculos, nos abre las puertas a un sugerente mundo de curvas mecánicas generadas mediante el movimiento uniforme y que nos introduce en un paraíso de curvas. Astroides, cardiodes... y hasta elipses. Sí, aunque parezca increíble los epiciclos y deferentes de Ptolomeo pueden generar órbitas elípticas.



La herencia aristotélico-ptolemaica ha llegado aunque con ciertas modificaciones impuestas por la tenacidad de los hechos en la historia, hasta nuestras aulas actuales de matemáticas, sobre todo en secundaria, donde indefectiblemente: el mundo casi siempre es un PLANO, cartesiano... además; el espacio tridimensional sólo llegará en segundo de bachillerato y únicamente para los alumnos de ciencias...; las líneas siempre son rectas, las figuras polígonos (regulares a ser posible), las curvas son circunferencias y los cuerpos cubos, esferas, prismas, cilindros, pirámides o conos... los más improbables en la vida real.

2. Pero, en el mundo real...



En la realidad que nos rodea las cosas no son tan simples. El universo no es tan ideal. Porque, en el mundo real, ¿existen las rectas?, ¿de verdad hay superficies totalmente planas?, ¿tiene ecuación esta flor? La experiencia nos demuestra que hay otras curvas, tan atractivas al menos como el círculo. Hagamos una excursión por la historia para descubrir otras curvas.

El Renacimiento

El modelo matemático de Ptolomeo es demasiado complejo y poco útil a la hora de hacer predicciones a largo plazo. Copérnico pone en marcha un nuevo modelo matemático que mejora las predicciones y sobre todo que es más sencillo a la hora de calcular. Coloca al sol en el centro del sistema y hace girar a todos los planetas a su alrededor. No abandona las órbitas circulares ni los epiciclos, pero siembra el germen de un cambio de paradigma científico que llegará a la cumbre con Galileo: la experimentación y la observación de la realidad como criterio de validación de la teoría científica.

A finales del siglo XVI, un joven toscano va a hacer temblar los principios de la interpretación del universo físico, tanto por debajo como por encima de la frontera de la esfera lunar: Galileo Galilei.

En el mundo terrestre, intentando descubrir las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos. En una época en que las disputas políticas se arreglaban con excesiva frecuencia a cañonazos, nadie se había parado a investigar cuál era la trayectoria real de un proyectil. Galileo descubrirá que cualquier bala de cañón describe un arco de parábola antes de impactar en el blanco. Pero también descubrirá que todos los cuerpos caen al suelo con la misma aceleración.

Galileo será el fundador de una nueva ciencia, la cinemática e intentará explicar todos los movimientos mediante leyes matemáticas. Los ejércitos del orden matemático sitúan el frente de batalla contra el caos en la misma superficie terrestre.

Pero un extraño instrumento inventado por los holandeses va a hacer tambalear toda la doctrina oficial de la Iglesia basada en las ideas aristotélicas: el telescopio. Gracias a él, Galileo va a destrozarse una visión del universo que había prevalecido más de dos mil años: el mundo más allá de la Luna no es tan perfecto como decía Aristóteles, la Luna no es una esfera perfecta sino que presenta cráteres como la misma Tierra, Júpiter tiene satélites que orbitan a su alrededor... y hasta el Sol tiene manchas.

Le costaría la vista y casi la vida pero había desterrado la vieja idea de que la Tierra era el centro del universo. Y había conseguido algo mucho más importante: convertir la experimentación en el motor fundamental de la ciencia. La Iglesia le condenó, pero *la Tierra se mueve...*

3. El mundo de las cónicas

Kepler construirá toda su teoría y descubrirá las leyes del movimiento de los planetas basándose en las precisas observaciones de Tycho Brahe. La batalla de Marte, la lucha de los cálculos de Kepler contra las observaciones de Tycho va a

suponer la derrota del círculo aristotélico y la victoria de las cónicas de Menecmo y Apolonio. La primera de sus famosas leyes va a traer a la elipse al primer plano de la ciencia:

Primera Ley: *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.*

Repasando las excentricidades de las órbitas de los planetas del sistema solar nos sigue pareciendo un milagro que Kepler saliese triunfador de esta batalla. La excentricidad de la órbita de Marte, la mayor, tras la de Mercurio, de los planetas conocidos en la época, no llega a una décima.

Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
0,206	0,007	0,017	0,093	0,043	0,051	0,046	0,004	0,250

Ni el ojo del pintor más experto distinguiría una elipse con esa excentricidad de una circunferencia. Pero Kepler era sobre todo tenaz y meticulado.

Las cónicas, esas atractivas curvas matemáticas estudiadas por Menecmo y Apolonio hace tantos siglos van a constituir una imprescindible herramienta matemática para explicar el mecanismo celeste. La eficacia de las matemáticas en el primero de los momentos estelares de la historia.

Video



Las leyes de Kepler

Serie: Universo Mecánico. Annenberg/CPB Proyect. 1988

Producción: California Institute of Technology

Distribuidora: Arait Multimedia S.A.

Los albores de estas curvas entroncan directamente con los dioses griegos, al menos con Apolo. Según la historia, aunque un poco adornada de leyenda, una mortífera peste asoló Atenas allá por el año 430 a. de C. Incluso Pericles perdió la vida. Los atenienses se dirigieron al oráculo de Delos para preguntar qué tenían que hacer para acabar con la maldición que amenazaba con acabar con la ciudad. El oráculo les dijo que para contentar a los dioses tenían que duplicar el altar de Apolo, que tenía forma cúbica.

Nace así, entre la historia y la leyenda, uno de los tres problemas clásicos: la duplicación del cubo.

Menecmo es uno de los muchos que van a intentar resolver el problema: dado un cubo de arista a , encontrar arista de otro cuyo volumen sea el doble.

El primero en abordar la cuestión fue Hipócrates de Quíos, quien redujo el problema al de intercalar dos medias geométricas o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma.

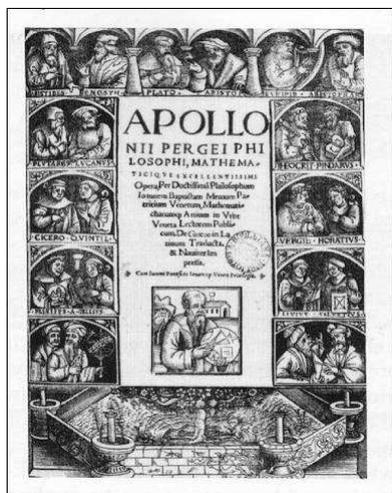
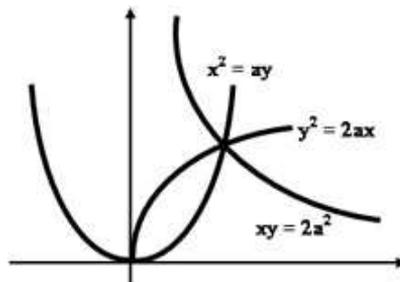
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Encontrar los valores de x e y equivale a resolver este sistema de ecuaciones cuadráticas

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = a \cdot y \\ y^2 = 2a \cdot x \end{array} \right\} \implies x^3 = 2a^3$$

Menecmo se dio cuenta de que geoméricamente, el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos cónicas, de dos parábolas, como en el caso de arriba, o de una parábola y una hipérbola. ¡Las cónicas hacen su primera aparición en la historia... para resolver el problema de la duplicación del cubo!

Por desgracia para Menecmo, encontrar el punto de corte de esas dos cónicas es un problema que no se puede resolver con regla y compás, como demostró en 1837 el francés L. Wantzel.

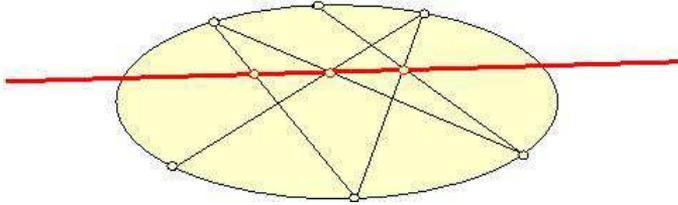


En el Renacimiento, si la elipse es la curva de Kepler, la parábola será la de Galileo, el padre de la cinemática. Será él quien descubra que cualquier proyectil lanzado al aire describe una trayectoria parabólica.

Dos cónicas para explicar los movimientos, tanto de los cuerpos más próximos a nosotros, a la superficie terrestre como los más alejados en el cielo. Newton con su ley de gravitación universal y con la demostración de que toda órbita de un objeto celeste es una de las tres cónicas pondrá la guinda en el pastel de las curvas de Apolonio.

Si Apolonio realizó un estudio exhaustivo de esta familia de curvas, y Galileo, Kepler y Newton las colocaron en el centro de la explicación de los movimientos celestes, un joven Blaise Pascal, va a encontrar uno de los pocos resultados que se le pasaron por alto a Apolonio, en un famoso opúsculo desaparecido, titulado

“Sobre las cónicas”: “los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están en línea recta.”



El cálculo diferencial permitió a Newton atacar el estudio y la clasificación de otras curvas de grado mayor que dos. En su *Enumeratio linearum tertii ordinis* de 1676 nos describe hasta 72 curvas de tercer grado, aunque alguna se le escapó.

Pero la Naturaleza es pródiga en otro tipo de curvas.

4. El mundo mágico de las espirales

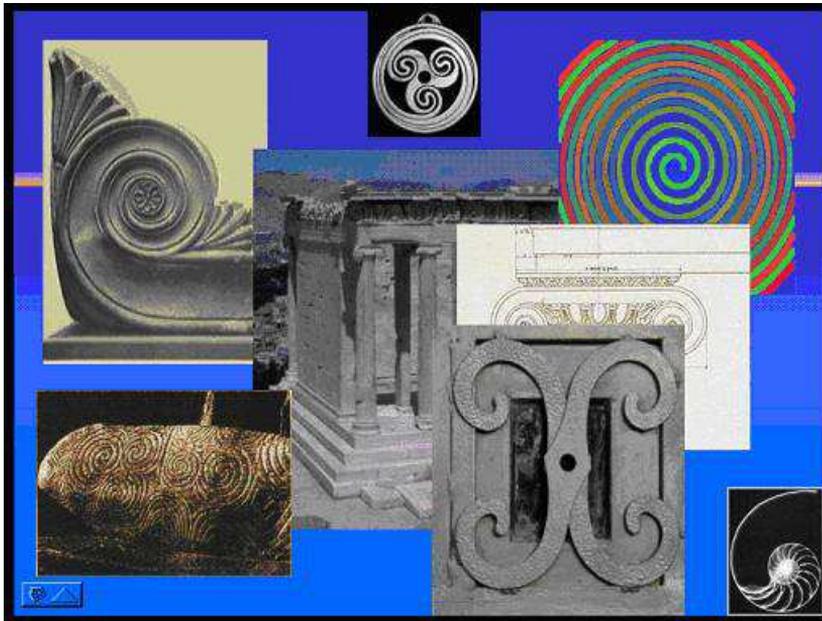
“La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso... La vuelta sigue a la vuelta, y toda síntesis es la tesis de la nueva serie...”
Vladimir Nabokov



Ninguna curva ha fascinado tanto al ser humano, desde los tiempos más remotos, como la espiral. Su presencia en los objetos vivos, tanto animales como vegetales, tuvo que llamar la atención de nuestros antepasados desde los albores de la humanidad.

No existe ninguna cultura que no la haya utilizado como elemento simbólico, mágico o simplemente ornamental. La espiral ha acompañado al ser humano en todo tiempo y en todo lugar... salvo en las clases de matemáticas de secundaria y de universidad.

Ante las innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como mecánico, estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y ser objeto de su investigación. Sin embargo, como su propia forma sugiere son curvas esquivas. No son curvas geométricas estáticas como la circunferencia, las cónicas o las lúnulas. Para construirlas se necesitan recursos mecánicos, algo que crece o que se mueve.



4.1 La espiral de Arquímedes. $r = a.\theta$

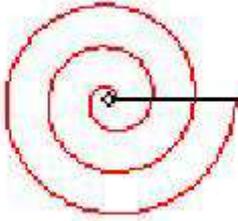
El primer paso de su estudio se remonta al siglo III a. de C. y su protagonista es el genial Arquímedes. Con métodos que se adelantan en varios milenios a sus contemporáneos realiza el primer estudio intensivo sobre la espiral más simple: la espiral uniforme.

La dificultad de construirla de manera exacta, junto al hecho de no poder construirse con regla y compás hizo que los sabios griegos no le dedicasen toda la atención que se merecen. Aunque como en todo hay sus excepciones. Estas excepciones las constituyen **Conón de Samos** y sobre todo **Arquímedes de Siracusa** (287-212 a. C.).

Sin duda, al menos desde un punto de vista matemático, la más simple es aquella en que el radio varía de forma proporcional al ángulo girado. Y a esta es a la que dedicó su atención Arquímedes, a la espiral uniforme, que desde entonces lleva su nombre. La espiral arquimediana.

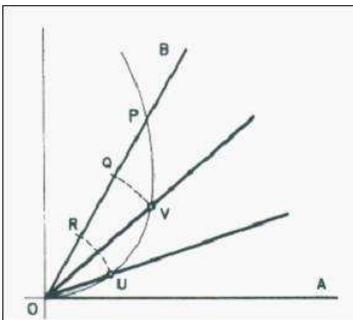


De Arquímedes se conocen dos libros sobre la geometría plana, uno dedicado a la circunferencia, *De la medida del círculo*, donde nos proporciona el salto a la fama del número π y una de sus aproximaciones más usadas hasta nuestros días; y otro dedicado a la espiral uniforme, *De las espirales*. Un libro complicado y de lectura difícil, donde Arquímedes hace un profundo estudio exhaustivo de la espiral uniforme. En esta obra Arquímedes define, quizás por primera vez en la historia, una curva mecánica, una curva basada en el movimiento.



“Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral.”

Probablemente el interés del sabio de Siracusa por esta curva estaba motivado por un problema muy alejado del mundo de las curvas: la trisección del ángulo. Arquímedes, gracias a la espiral uniforme, descubrió un método para dividir un ángulo en tres partes iguales, y en general en n partes iguales.



Basta hacer coincidir el vértice del ángulo con el origen de la espiral, dividir el segmento que va desde el origen al punto de corte de la espiral con el segundo lado del ángulo en tres partes iguales y trazar por esos puntos arcos de circunferencia hasta que corten a la espiral.

Si unimos el origen con esos puntos de corte tendremos los tres ángulos que dividen al original en tres partes iguales.

Por desgracia para las matemáticas la espiral uniforme no se puede dibujar con regla y compás.

Sobre las espirales es una obra cargada de sorpresas, que colocan a Arquímedes en la cima de la historia de las matemáticas. En ella demuestra propiedades de las áreas de las diferentes espiras, tan sorprendentes, pensando que faltan casi dos mil años para que se invente el Cálculo diferencial, como estas:

“El área barrida por el radio de la espiral en su primera revolución es la tercera parte del área del círculo cuyo radio es el radio final de esta revolución...”

“El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta.”

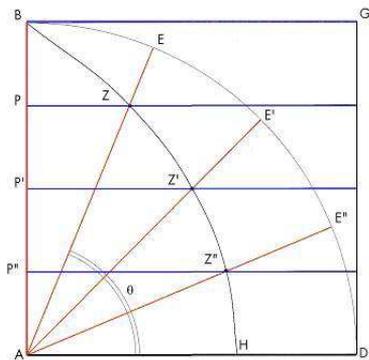
“El área barrida en la segunda revolución está en razón 7/12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector.”

Decididamente, Arquímedes era un genio, uno de los tres grandes de las Matemáticas de todos los tiempos; y sin embargo nuestros jóvenes sólo le recordarán al acabar sus años escolares como el sabio de la bañera, el de ¡Eureka!, o, a lo sumo, como el descubridor de las leyes de la palanca... Injusticias de los planes de estudio de matemáticas.

Aunque hemos dicho que Arquímedes es el primero que define con precisión una curva mecánica, basada en el movimiento de un punto, esto no es del todo

cierto. Ni tampoco fue el primero en utilizar curvas extrañas para resolver uno de los tres problemas clásicos. En ambos casos se le adelantó, allá por el año 390 a. de C., un hermano de Menecmo, el de las cónicas, llamado Dinóstrato, que inventó una extraña curva generada por el movimiento uniforme de dos rectas, y que también servía para trisecar el ángulo. Desde entonces se la conoce como cuadratriz o trisectriz de Dinóstrato.

$$r = \frac{2}{\pi} \frac{t}{\sin t}$$



La curva se obtiene mediante los puntos de intersección de dos rectas en movimiento, AB y BG . La primera AB , gira con velocidad angular uniforme sobre el punto A hasta llegar a AD , la segunda BG se desplaza horizontalmente, también con velocidad uniforme, y de tal manera que llega a AD al mismo tiempo que la recta AB . Los puntos de intersección de ambas dibujan una curva $BZZ'Z''H$ que es la trisectriz.

Para trisecar el ángulo T basta marcar el punto Z de corte del lado del ángulo con la curva y trazar una paralela al otro lado AD del ángulo para encontrar el punto P . Si dividimos el segmento AP en tres partes iguales mediante los puntos P' y P'' , los puntos de corte de las paralelas a AD por dichos puntos determinan en la curva los puntos Z' y Z'' . Las rectas que se obtienen al unirlos con A dividen al ángulo en tres partes iguales.

Es claro que como en el caso de la espiral arquimediana el método sirve para dividir el ángulo en n partes iguales.

Como con la espiral, la dificultad está en trazar la curva. Por supuesto esto es imposible con regla y compás.

4.2 La espiral logarítmica. $r = C \cdot e^{k \cdot \theta}$, $\theta = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{r}{C}$

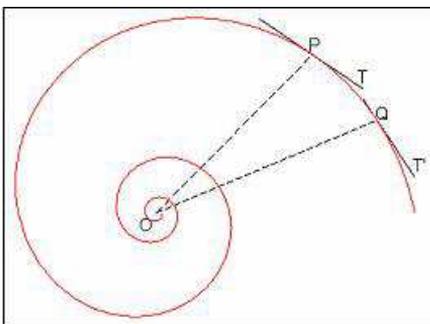
¿Por qué el Nautilus tiene esta extraña y elegante forma?

Habrá que esperar casi dos milenios hasta que los matemáticos se vuelvan a interesar por las espirales, pero ahora no va a ser por la espiral uniforme sino por otro tipo de espiral la espiral logarítmica, equiangular o geométrica.

Video**El mundo de las espirales**

Serie: Más por Menos. TV2. 1996
 Autor: Antonio Pérez Sanz
 Realizador: Pedro Amalio López
 Distribución: RTVE

El origen del estudio de esta espiral tiene que ver con la navegación. A lo largo de los siglos XVI y XVII miles de barcos surcan los océanos. Los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es un arco de círculo máximo. Pero para seguir un rumbo que encaje con este arco es necesario realizar continuos cambios de rumbo. Por ello sustituían este rumbo óptimo por otro en el ángulo que formaba la trayectoria del barco con todos los meridianos que atravesaba se mantenía constante. El rumbo se mantenía constante. Los rumbos de este tipo dibujan en la esfera terrestre una curva llamada loxodrómica. Pero los navegantes no trabajaban sobre una esfera, sus mapas eran planos, proyecciones de la esfera. Pues bien la proyección de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una... **espiral equiangular**.



El primero en describirla como una curva mecánica, en contraposición a las curvas algebraicas, es Descartes quién en 1638 escribe al padre Mersenne los resultados de sus investigaciones. Descartes estaba buscando una curva creciente con una propiedad similar a la de la circunferencia, que la tangente en cada punto forme con el radio vector en cada punto siempre el mismo ángulo.

De ahí el nombre de equiangular. También demostró que esta condición es equivalente al hecho de que los ángulos alrededor del polo son proporcionales al logaritmo del radio vector. De ahí su segundo nombre: **espiral logarítmica**.

La separación de las espiras aumenta al crecer el ángulo, es decir, el radio vector crece de forma exponencial respecto del ángulo de giro. Por eso recibe un tercer nombre, espiral geométrica.



Sin duda, el padre de esta espiral, con toda justicia, es Jacob Bernoulli, quien realiza un profundo estudio de la misma, quedando cautivado por la curva hasta tal punto de pedir que en su tumba, en el cementerio de Basilea, figurara la inscripción “*Eadem mutata*

resurgo” y un grabado en piedra con el dibujo de una espiral logarítmica. El cantero no era un buen matemático pues talló una casi perfecta espiral arquimediana.

Jacob Bernouilli descubrió varias propiedades de esta curva que les pasaron desapercibidas a Descartes y Torricelli, entre ellas el hecho de que la espiral logarítmica es la única curva que verifica que su evoluta, su involuta, su cáustica y su podaria son, a su vez, una espiral logarítmica.

Nos explicamos ahora el “*Eadem mutata resurgo*” atribuido por el bueno de Jacob Bernouilli a esta espiral: aunque me cambien, es decir si trazan mi evoluta, mi involuta, mi cáustica de reflexión o de refracción... siempre volveré a aparecer semejante a mí misma.

Jacob Bernouilli había descubierto además otra extraña propiedad, la autosemejanza, que relaciona directamente esta espiral con los objetos fractales.



La espiral logarítmica es sin duda la espiral que más se prodiga en la naturaleza. El reino animal nos proporciona unos ejemplos preciosos en las conchas de los caracoles y los moluscos. Detrás de todas estas formas hay un fenómeno natural: un proceso de enrollamiento vinculado al proceso de crecimiento. De hecho la concha de un caracol no es ni más ni menos que un cono enrollado sobre sí mismo. El cuerno de un rumiante también, aunque además está retorcido. Y aunque las leyes físicas del crecimiento de especies tan dispares no son las mismas, las leyes matemáticas que lo rigen sí: todas están basadas en la espiral geométrica, la curva de similitud continua.

Si nos fijamos bien el crecimiento de las conchas y de los cuernos tiene otra curiosa propiedad se produce sólo por un extremo. Y esta propiedad de crecimiento terminal conservando la figura completa es exclusiva, dentro de las curvas matemáticas, de la espiral equiangular o logarítmica.

Las galaxias, las borrascas y huracanes nos brindan muestras espectaculares de espirales logarítmicas. Al fin y al cabo en cualquier fenómeno natural donde haya una combinación de expansión o contracción y rotación aparecerá por fuerza esta espiral.



En el mundo vegetal los ejemplos son si cabe más llamativos ya que entre las plantas aparecen un sinnúmero de espirales y no precisamente de una en una. La distribución de las pipas en cualquier girasol, las escamas de cualquier piña, no importa de qué variedad, una simple margarita... nos ofrecen una auténtico desfile de espirales entrelazadas.

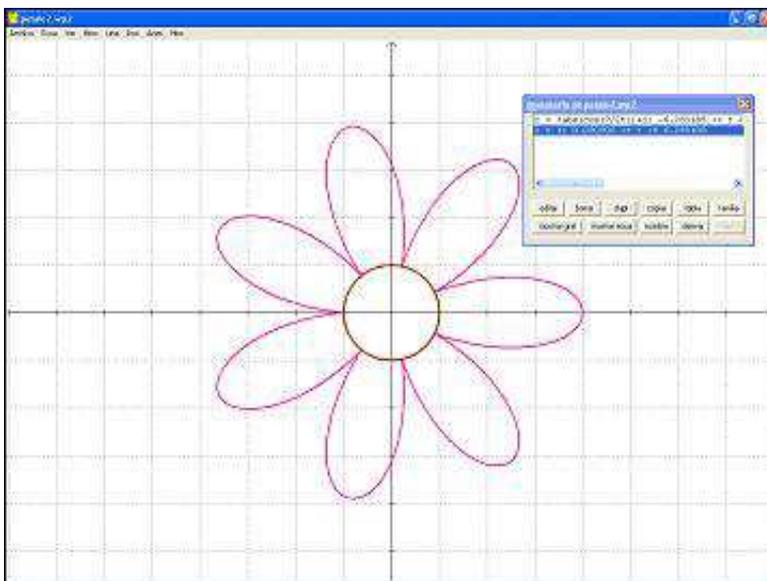
En cualquier piña de los pinos, si la observamos desde arriba, descubriremos que los piñones se distribuyen formando un buen número de espirales. Y no precisamente de forma aleatoria. No es ninguna casualidad. Los piñones han de distribuirse de forma óptima, es decir, aprovechando el espacio al máximo; y esa optimización del espacio se consigue mediante una distribución en espiral.

5. Las ecuaciones de las flores

Una rosa es una rosa...

Alejándonos de las espirales, existe una familia de curvas, investigada en el siglo XVIII, que parece haber nacido para identificarse con algunas de las flores más habituales en el campo o en las floristerías. Se trata de la **concoide de rosetón**, también conocida como **pétalo geométrico**.

Para investigarla sólo necesitamos una herramienta informática apropiada: un programa informático que vaya más allá de las curvas en coordenadas cartesianas y permita trabajar directamente en coordenadas polares y paramétricas, por ejemplo winplot desarrollado por Richard Parris, que se puede obtener de forma gratuita en esta dirección: <http://math.exeter.edu/rparris>



Ideas:

- una forma que rota y se repite periódicamente...
- una silueta que se aleja y se acerca al centro...
- ¡¡funciones trigonométricas y coordenadas polares!!

Para interpretar el crecimiento de hojas y flores las coordenadas rectangulares o cartesianas no son las más apropiadas, más bien son completamente inapropiadas.

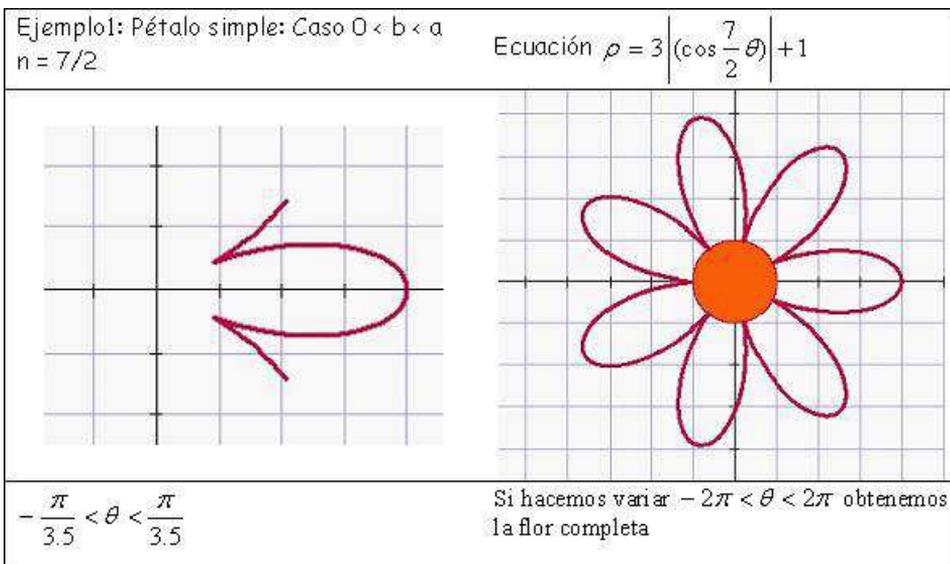
Recurriremos a las coordenadas polares, otro regalo a la historia del genial Euler, en las que las dos variables son el ángulo girado respecto a la horizontal y la distancia al origen. Estas coordenadas son especialmente aplicables a todos aquellos casos en que dentro de la figura existe algún punto invariante, es decir, algún punto que no sufre ninguna deformación al crecer. En el caso de las plantas suele ser la base de la hoja, el “nodo” alrededor del cual se desarrolla toda la hoja o el centro de simetría circular en el caso de las flores.

En estas coordenadas, todas las conoides de rosetón o de rosáceas, como dicen los franceses, tienen esta ecuación general

$$\rho = a \cdot \cos n\theta + b$$

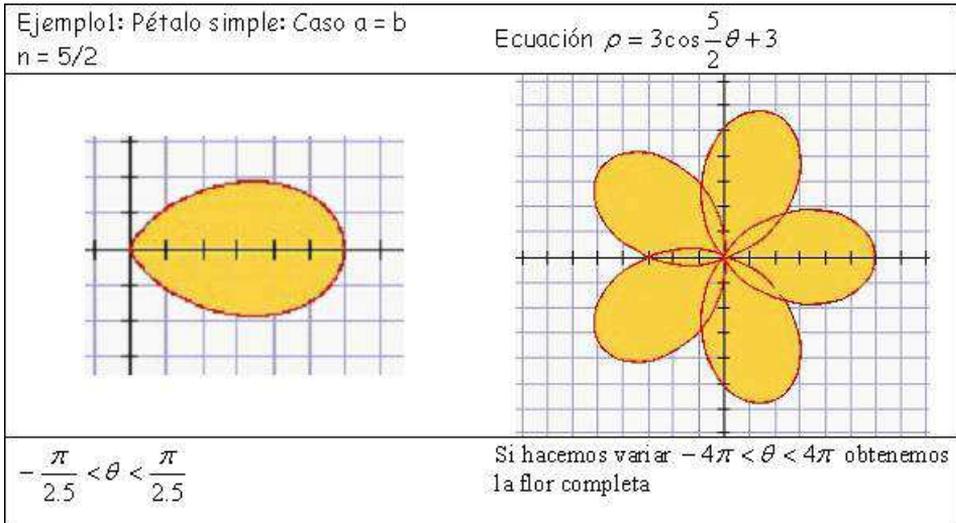
Cada pétalo base es simétrico respecto del eje OX y se obtiene haciendo variar el ángulo θ entre $-\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n}$.

Obtener, a partir de esta escasa información, formas aproximadas a las siluetas de algunas de las flores más populares no va a ser muy complicado. Sólo necesitamos un buen programa de ordenador que trabaje en polares.

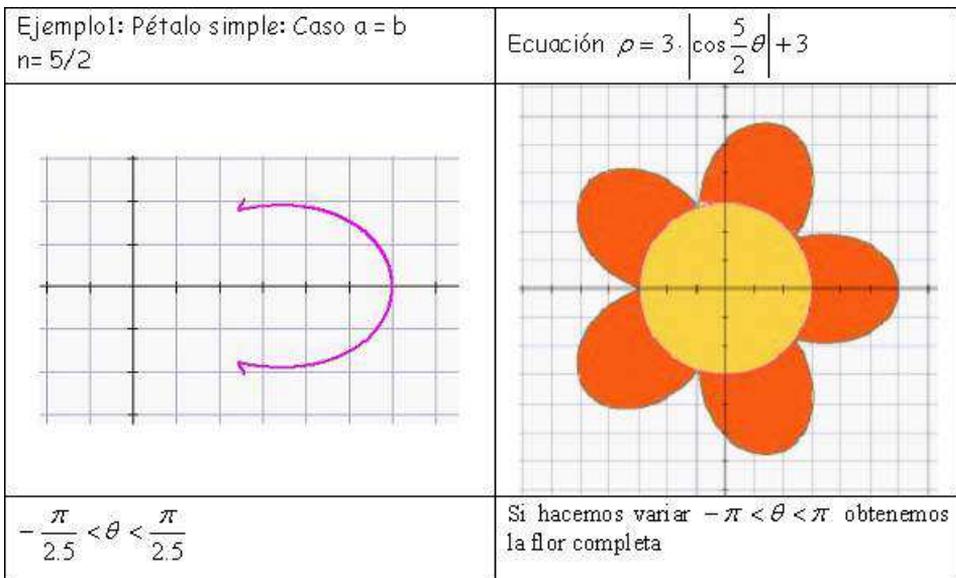


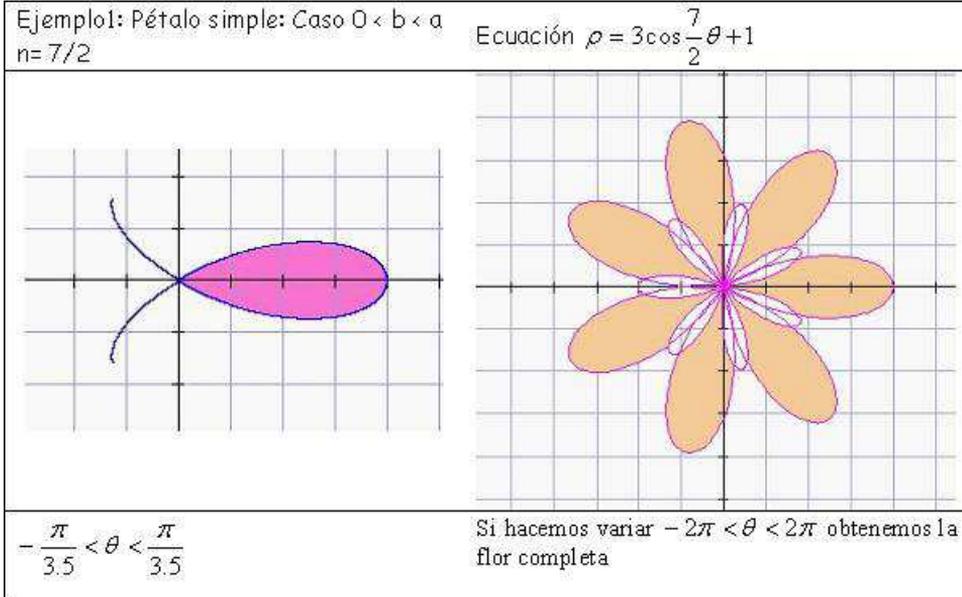
Estudiemos, con este programa informático, cómo afectan los valores de las dos constantes a , b y n a la forma de la curva.

5.1 Caso $a = b$



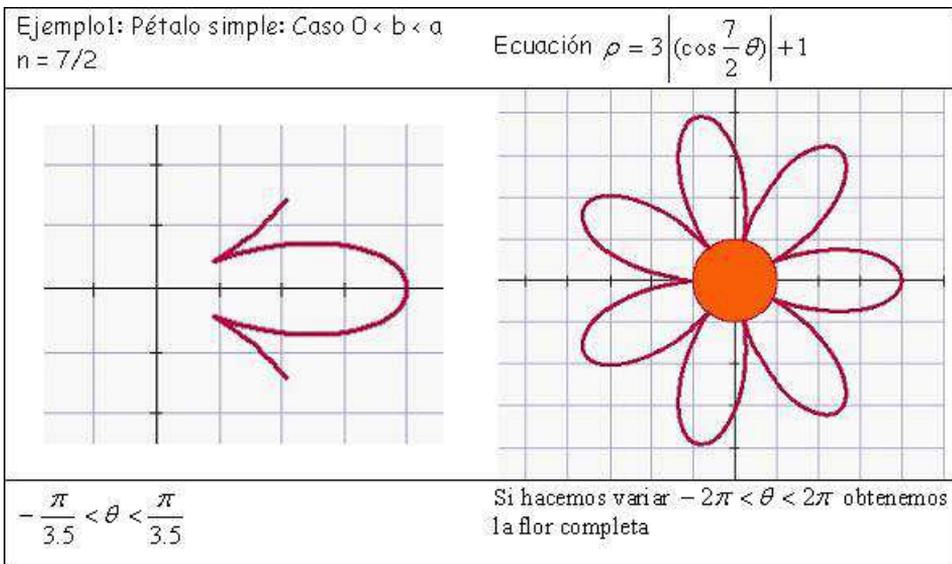
Si lo queremos con un círculo central, algo por otra parte muy frecuente en la naturaleza, basta con tomar el valor absoluto del coseno.



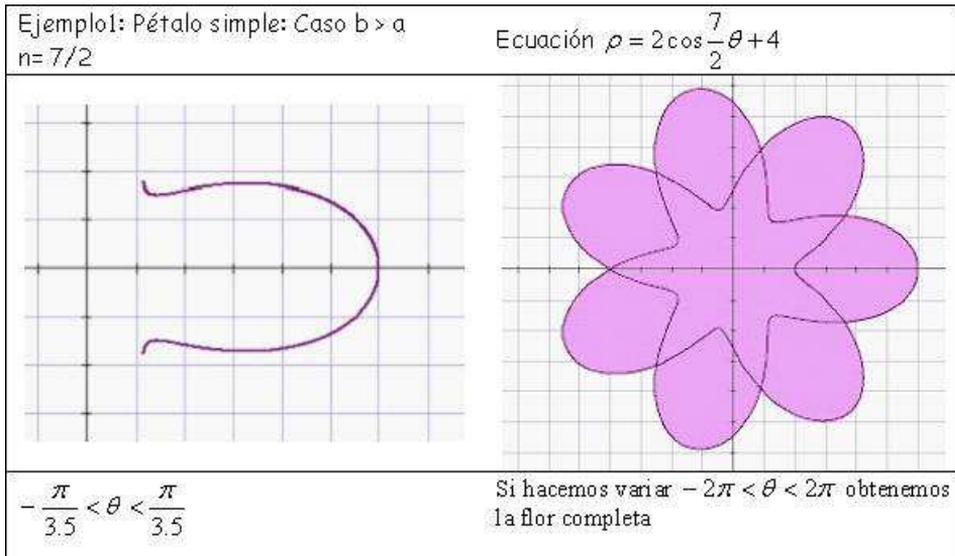
5.2 Caso $0 < b < a$ 

Se puede observar que el factor b alarga el pétalo mientras que n hace aumentar el número de los mismos en cada circunferencia.

Si introducimos al valor absoluto del coseno, nos volvemos a acercar a la realidad.

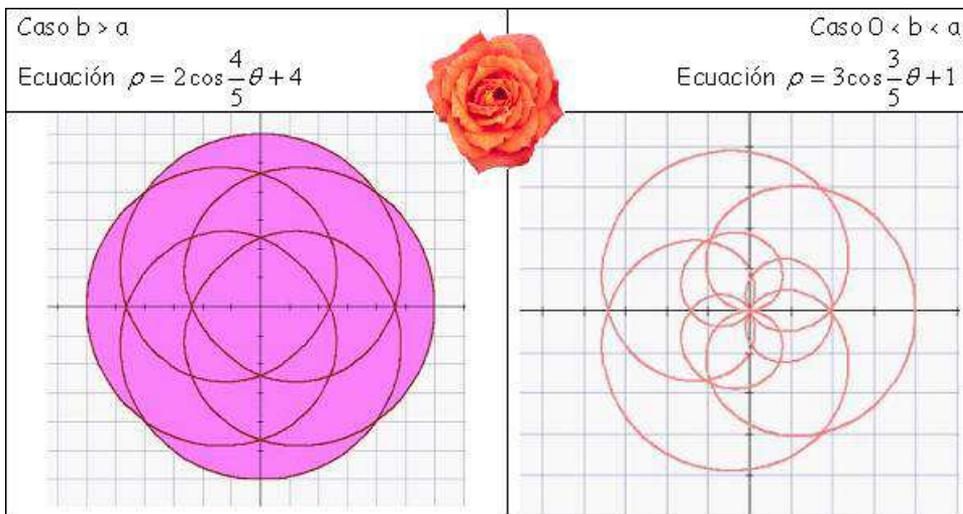


5.3 Caso $b > a$



5.4 El mundo de las rosas: $n < 1$

Hasta ahora en los tres casos hemos jugado con n mayor que 1. ¿Qué ocurre si n es menor que la unidad?... Nos adentramos en el mundo de las rosas...



5.5 La cardiode



Aunque en apariencia poco parecida con las rosas, existe otra curva que vemos todos los días en nuestros vasos cuando nos tomamos el café o la leche bajo una lámpara en cualquier cafetería. Se trata de la cardiode, esa curva que se forma en el vaso o la taza al reflejarse la luz de la lámpara del techo, una curva con forma de corazón.

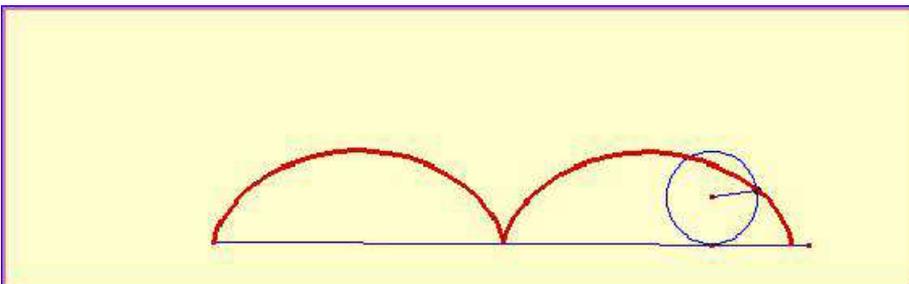
Su ecuación $\rho = a(1 + \cos \theta)$ no deja de ser un caso muy especial de la concoide de rosetón en el caso en que $a = b$ y $n = 1$.

6. Otras curvas de la Naturaleza con historia

El nacimiento y posterior desarrollo del cálculo diferencial brindó a los matemáticos del siglo XVIII una potente herramienta para mirar con otros ojos curvas que la naturaleza había puesto ante nuestros ojos y cuyo misterio se escapaba entre los dedos. Los métodos desarrollados en el siglo anterior, fundamentalmente por Descartes y Fermat, permitían el estudio de las curvas algebraicas, esto es aquellas donde la relación entre las variables x e y se daba mediante un polinomio. Descartes elimina de su *Geometría* toda consideración algebraica de las curvas no algebraicas, que denominó *mecánicas*. Pero el mismo Descartes consideró importante desarrollar técnicas no algebraicas para el estudio de las curvas mecánicas. De esta manera se imponía la necesidad de poseer una forma más general de estudiar las curvas, cualquiera que fuese su clasificación.

6.1 Galileo y la cicloide
$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) = 2R\sin^2 \frac{t}{2} \end{cases}$$

Entre las curvas mecánicas que más atrajeron la atención de los matemáticos se encuentra la cicloide, que fue introducida con el fin de cuadrar el círculo mediante el uso de la integración.

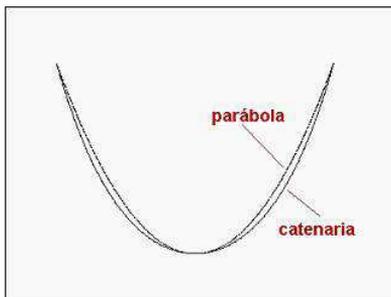


Galileo fue uno de los primeros en estudiar las propiedades de esta curva, a la que dice haber dedicado más de cuarenta años. Se planteó el problema de comparar el área bajo un arco de cicloide con el área del círculo que la genera. Como no consiguió resolver el problema mediante métodos matemáticos, recurrió a recortar y pesar piezas de metal con la forma de la cicloide. De esta manera encontró que la relación entre el área bajo un arco de cicloide y la del círculo que la genera es aproximadamente de 3 a 1, pero decidió que no debía ser exactamente 3, ya que intuía (erróneamente) que debía ser no racional.

6.2 El reto de Jacob Bernoulli. La catenaria

En 1690, Jacob Bernoulli publicó un artículo en las *Acta Eruditorum* de Leibniz en el que se utiliza por primera vez el término Integral. Al final del artículo y para demostrar la potencia del nuevo cálculo Jacob lanza un reto a la comunidad matemática de la época. Descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cuerda de peso uniforme: la catenaria.

Galileo ya había abordado el problema cometiendo de nuevo un error, al concluir que se trataba de un arco de parábola. Huygens demostraría más tarde que no se trataba de una parábola pero no pudo decidir de qué curva se trataba. Precisamente el nombre de catenaria se debe a Huygens. Lanzado el reto, Jacob obtuvo



tres respuestas: de Huygens, de Leibniz y de su hermano Johann. La respuesta es esta ecuación diferencial: $dx = \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. La respuesta en forma de ecuación integral es: $x = \int \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$.

Hoy, la ecuación de la catenaria está incorporada en las calculadoras científicas de todos los alumnos de secundaria y corresponde a la función coseno hiperbólico:

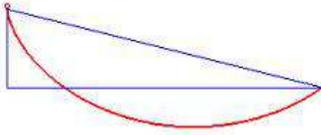
$$y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

Por desgracia para los Bernoulli, Leibniz y Huygens la función exponencial aún no se había descubierto.

6.3 Braquistócrona. El desafío de Johann Bernoulli

La búsqueda del mejor de los péndulos posibles para la construcción de relojes precisos había puesto de moda a principios del siglo XVIII las curvas relacionadas

con los tiempos de caída de cuerpos siguiendo trayectorias con condiciones determinadas. Así se estudia la tautócrona, curva cuyo perfil hace que un cuerpo tarde desde cualquier punto el mismo tiempo en llegar al



Pero sin duda la curva estrella será la braquistócrona, la curva que une dos puntos A y B de tal forma que un cuerpo que cae por ella tarda el mínimo tiempo posible.

Johann Bernoulli propuso el problema de la braquistócrona en junio de 1696 y retó a la comunidad matemática a resolverlo antes del fin del año, añadiendo con sarcasmo que “la curva era una bien conocida de los matemáticos”.

En la actualidad es la curva que se utiliza en los toboganes de patinaje para conseguir llegar abajo en el menor tiempo.

El año siguiente aparecieron en total cinco soluciones: además de Johann Bernoulli, resolvieron el problema Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital y un autor inglés anónimo. Johann no tuvo dificultad en reconocer que el autor era Isaac Newton y lo expresó con una frase histórica: “*Por las garras se conoce al león*”.

La ecuación diferencial no era nada elemental $\frac{ds}{dx} = \frac{C}{\sqrt{|y|}}$.

Pero Johann lo había avisado al lanzar su reto. Era una curva muy conocida por los matemáticos, efectivamente se trata de un arco de cicloide, una curva conocida desde hacía más de un siglo.

7. Fractales y Caos

Como muy bien dice Benoit Mandelbrot, uno de los creadores de la geometría fractal:

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, las cortezas de los árboles no son lisas y los relámpagos no se desplazan en línea recta.”

El universo está poblado de sistemas que se comportan de manera caótica. Las llamas de una hoguera, el humo, el agua en un arroyo, las olas del mar, la forma de un relámpago son manifestaciones cotidianas del caos. La historia de la Ciencia es la historia de la búsqueda del orden dentro del caos.

Las leyes de Newton nos permiten descifrar la órbita de la Tierra alrededor del

Sol y predecir los eclipses. Incluso nos han permitido viajar a la Luna o mandar sondas. Pero estas ecuaciones que podían servir para sistemas simples son incapaces de predecir el estado de las partículas de gas encerradas en un globo o de las miles de gotas que forman un torrente.

A lo largo del siglo XIX los científicos resolvieron en parte esta dificultad mediante el análisis estadístico de cantidades promediadas que trabaja con cantidades globales de movimiento. No podremos determinar el movimiento de todas y cada una de las partículas del torrente pero al menos sabremos lo que hará éste globalmente. A principios de nuestro siglo coexistían estos dos paradigmas científicos:

- el determinista, con sus ecuaciones diferenciales, para los sistemas simples;
- el estadístico para los sistemas complicados, con muchos grados de libertad en los que reina el azar.

Pero lo que nadie podía imaginar es que un sistema simple pudiese tener un comportamiento caótico y ahí poco podían decir las matemáticas. En 1960 Edward Lorentz desarrolló un modelo matemático para realizar previsiones del tiempo. Este modelo era bastante simple y contemplaba sólo tres variables que rigen el movimiento de convección, relacionadas entre sí mediante tres ecuaciones diferenciales hoy muy populares.



Extracto del vídeo

Lorentz puso a trabajar su ordenador, cada minuto simulaba el paso de un día. Con sorpresa comprobó que una diferencia de menos de una milésima en una de las variables, al cabo de pocos minutos (unos días simulados) producía un estado climático totalmente distinto.

Había descubierto la segunda gran característica de los fenómenos caóticos: Una pequeña variación de las condiciones iniciales produce grandes cambios en el sistema a largo del tiempo. Es lo que se conoce como efecto mariposa. El batir de las alas de una mariposa en una selva africana puede producir dentro de unos meses un huracán en el Pacífico.

La primera característica del caos es por supuesto que el sistema es impredecible a largo plazo. Pero incluso en los fenómenos caóticos aparecen ciertas regularidades, un cierto orden. Este orden se investiga mediante el espacio de fases del sistema. En este espacio, que es como la radiografía del sistema, en el que cada punto representa al sistema en su conjunto en un momento dado, aparecen ciertos atractores a los que se acerca el sistema. Lorentz descubrió uno de ellos para su modelo climático conocido como mariposa de Lorentz.

A partir de entonces matemáticos y físicos se han lanzado a la caza de atractores extraños dentro de los sistemas caóticos. Es decir a buscar un cierto orden dentro del caos.

Vds. podrían pensar que estos fenómenos caóticos son curiosidades que sólo preocupan a los matemáticos y a los físicos. Por desgracia o por suerte, los sistemas caóticos aparecen en los lugares más dispares: la evolución de una epidemia, el desarrollo de la población de una determinada especie animal en un ecosistema cerrado, las reacciones de la bolsa y de la economía en general, nuestra atmósfera y hasta el sistema solar son sistemas caóticos. Los verdaderamente raros son los fenómenos lineales.

Newton se hubiera llevado un gran disgusto si hubiese conocido el hecho, demostrado por el matemático francés Poincaré a principios de siglo, de que incluso un sistema formado por sólo tres cuerpos es caótico.

En su nacimiento allá por los años 70, el caos y los fractales no parecían estar relacionados. Pero los dos son hermanos matemáticos; ambos buscan la estructura profunda de la irregularidad.

En los dos la imaginación geométrica es lo más importante.

Los fractales nos presentan un nuevo lenguaje con el que describir la forma del caos es decir la cara más frecuente de la naturaleza.

Estaba naciendo la Teoría del Caos. Y enseguida una matemática capaz de buscar el orden dentro del caos: la geometría fractal, las matemáticas de las curvas fractales. Incluso en aquellas regiones de la naturaleza lejos de las cómodas regularidades de las ecuaciones diferenciales las matemáticas se revelan como la herramienta imprescindible para interpretar la naturaleza. Y por supuesto siguen manifestando de manera rotunda su increíble eficacia.

Desde luego, todo parece indicar que Galileo sigue teniendo razón...

El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas...

Y además, lleno de curvas.

Bibliografía

- [1] D. Aranda y M. Fuente, *Matemáticas. Naturaleza y Arte*, Junta de Andalucía, Córdoba, 2001.
- [2] D'Arcy Thompson, *Sobre el crecimiento y la forma*, H. Blume, Madrid, 1980.
- [3] S. Hildebrandt, A. Tromba, *Matemáticas y formas óptimas*, Prensa Científica, Barcelona, 1990.
- [4] B. Mandelbrot, *La Geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona, 1977.
- [5] M. Martín, M. Morán, M. Reyes, *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid, 1995.
- [6] A. Pérez Sanz, *Las ecuaciones de las flores*, Revista SIGMA, Bilbao, 2005.
- [7] A. Pérez Sanz, *El vídeo: un recurso para ver las matemáticas de la Naturaleza*, El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones, MECED, Madrid, 2002.
- [8] J. del Río Sánchez, *Lugares geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid, 1991.
- [9] C. Sánchez y C. Valdés, *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros*, Nivola, Madrid, 2002.
- [10] R. Torija, *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Nivola, Madrid, 1999.
- [11] <http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml>

Videos

- [1] **Serie Universo Matemático. RTVE**, Pitágoras. Mucho más que un teorema; Historias de pi; Orden y caos. La búsqueda de un sueño.
- [2] **Serie Más por menos. RTVE**, El mundo de las espirales; Cónicas: del baloncesto a los cometas; Fractales. La geometría del caos.
- [3] **Universo mecánico. Annenberg TV**, Las Leyes de Kepler.

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí
C/ Verdaguer y García s/n
28027 Madrid
e-mail: aperez@divulgamat.net
<http://platea.cnice.mecd.es/aperez4>