Máquinas de vapor, mecanismos y P.L. Chebyshev[1]

por

Francisco Luquin, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Es conocido, que el origen de la disciplina matemática **Teoría de la Aproximación de Funciones**, se encuentra en el trabajo de Chebyshev de 1853 y que éste, estuvo motivado por el estudio práctico de un determinado mecanismo, en concreto el utilizado en la máquina de vapor de Watt y conocido indistintamente como mecanismo de Watt, paralelogramo o cuadrilátero articulado de Watt, y movimiento paralelo.

Además de con el vapor, claro está, el invento de la máquina tiene que ver con el reconocimiento antes, del vacío y de la presión atmosférica, no en vano las primeras máquinas de vapor construidas, que son las que vamos a comentar, utilizaron como potencia la presión de la atmósfera, de ahí el nombre de máquinas atmosféricas. Estas, tienen su fundamento en la propiedad expansiva del vapor, pensemos que, una gota de agua reducida a vapor ocupa un volumen 1700 veces mayor que en estado liquido.

1. Vapor

No obstante, esta propiedad expansiva del vapor ya era conocida desde tiempos clásicos, aunque bien es verdad que siempre fue utilizada para fines lúdicos (juguetes). En su libro *Pneumatics*, **Herón** o **Hero** de Alejandría ($\approx$ siglo I a.C.)

[1]Tchebycheff, Tchebichef, Chebyshev, Cebicev, Tchebychev, Tschebyscheff, Cebisev, Chebychev, Chebichev, Chebyshef, Tchebitchef, Tchebysheff, Chebichef, Tschebyschow... son algunos de los nombres que si ponemos en un buscador de internet nos remitirán al ilustre matemático de San Petersburgo. Nosotros, de acuerdo con E. Aparicio, lo escribiremos de esta forma, por ser la transcripción letra a letra de las de su nombre en cirílico a las de nuestro alfabeto.

describe y detalla unos 80 experimentos distintos realizados con vapor. Digamos que él solía hacerlos en público habiéndolo anunciado antes, por lo que sus contemporáneos le tenían por mago. Hacía cantar a pájaros, sonar el órgano, moverse ángeles, etc. El libro está en la web y se puede descargar.

Como matemático se le reputan una serie de ejercicios de física y mecánica, soluciones algebraicas a las ecuaciones de primer y segundo grado, el cálculo de raíces cuadradas, cúbicas y del área del triángulo en función de la longitud de sus lados. Comentaremos dos experimentos: la llamada Eolípila de Eolo y la apertura automática de las puertas del Templo.

La eolípila es la primera máquina térmica de que se tiene evidencia escrita. Su principio físico es el de acción o reacción; consiste en un globo o esfera hueco colocado sobre una plataforma, de manera que puede girar alrededor de un par de varillas, una de ellas hueca. Por ésta sube el vapor de agua, el cual escapa del globo hacia el exterior por dos tubos doblados, orientados tangencialmente en direcciones opuestas y colocados en los extremos de un diámetro perpendicular al eje del globo. Al ser expelido el vapor, el globo reacciona a esta fuerza y gira alrededor de su eje. Este sistema, en que los chorros de agua en lugar de vapor actúan de fuerza motriz, es el utilizado en los aspersores de riego.

De acuerdo con este mismo principio, Herón había ideado la máquina destinada a abrir y cerrar automáticamente las puertas del templo. A la entrada de éste y sobre un habitáculo subterráneo se coloca un pedestal hueco, en el que se ubica un pequeño altar. Con un extremo en el altar se inserta un tubo con el otro extremo en un depósito con suficiente agua. Los ejes de las puertas continúan a través del suelo y en ellos se enrollan juntas dos cadenas, atadas a un recipiente suspendido en el aire por medio de una polea. A su vez otras cadenas están enrolladas en direcciones opuestas a las anteriores y atadas por medio de una polea a un contrapeso. Al aumentar el fuego el calor, el aire caliente en el altar se expande y pasando por el tubo al depósito, empujará el agua a través de un sifón hacia el recipiente, el cual descenderá por su peso tirando de las cadenas y abriendo las puertas. Cuando el fuego se extingue, el aire se enfriará y reducirá su presión y volumen, y el agua del recipiente será absorbida a través del sifón hacia el depósito para llenar el vacío creado. Al aligerar su peso el recipiente, la puerta se cerrará.

Eolípila

Apertura puertas del templo

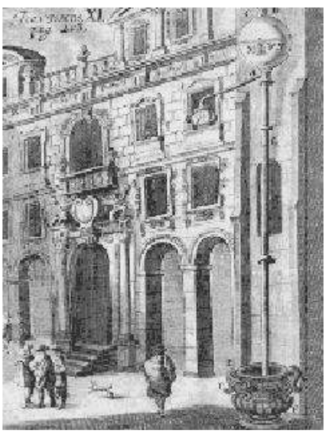
Después de estas experiencias hay que saltar hasta el siglo XVII, tiempo durante el cual la ciencia occidental en su mayoría rechazó el vacío. Tal opinión se basaba en el principio la *naturaleza aborrece el vacío.*

2. Vacío y Presión Atmosférica

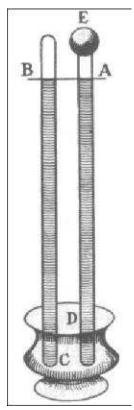
Existían dos teorías de larga tradición: una contraria al vacío encabezada por **Aristóteles**, el cual en el libro IV de su Física, aporta una argumentación exhaustiva contra el vacío. Los argumentos, más que científicos o empíricos, son de orden filosófico: el vacío sería sobre todo un concepto inconsistente. Otra, la atomista, encabezada por **Demócrito** postulaba, que la naturaleza estaba formada por átomos (en este caso perfectamente sólidos e impenetrables) y vacío. Estas dos teorías son las fuentes clásicas de las que bebieron todas las corrientes que luego atacaron o defendieron la existencia del vacío.

Como en otros conceptos, la postura dominante sería la Aristotélica y el atomismo una corriente marginal, teniendo que esperar, como hemos señalado antes, hasta el Renacimiento Italiano para que se reconociese la existencia del vacío.

Quizás, el experimento más significativo, fue el llevado a cabo por el italiano **E. Torricelli** (1644). Repitió el ensayo de **Gasparo Berti** (1640) en un tubo más corto y con mercurio en vez de agua, comprobando que el nivel de mercurio en el tubo descendía y siempre se paraba a la misma altura 760 mm. dejando un espacio vacío arriba sin mercurio. Torricelli declaró que su experimento probaba dos conceptos fundamentales: que la naturaleza no aborrece el vacío, y que el aire pesa.



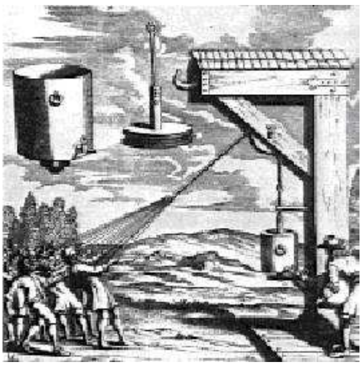
Experimento de Berti



Experimento de Torricelli

Para que esta idea prosperase en el mundo académico, hubo que esperar al trabajo de **Pascal** y la investigación llevada a cabo con su cuñado **Florin-Périer**. Repitieron el experimento de Torricelli varias veces el mismo día: a pie, a mitad y en la cima del Puy de Dôme y puesto que la columna de mercurio descendía proporcionalmente con la altura, era más baja cuanto más altitud, probaron que el resultado era debido a la presión atmosférica. Estos experimentos permitieron a Pascal desarrollar su trabajo sobre Hidrostática *"Traitez de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air" (1663).*

Después de estos resultados, el experimento del vacío fue tremendamente popular y reproducido por toda Europa y de una manera notable por el mayor de Magdeburgo, el alemán **Otto von Guericke** (1602, Hamburgo-1686), físico e ingeniero, estudió derecho en la Universidad de Jena y matemáticas en la de Leiden. Con el objeto de producir un mejor vacío que con el experimento de Torricelli, inventó una bomba de aire que permitía la creación del vacío dentro de esferas de cobre. En el experimento de Ratisbona mostró que cuando se creaba un vacío parcial bajo un émbolo introducido en un cilindro, la fuerza sumada de personas no podía evitar que la presión atmosférica llevase el émbolo al fondo del cilindro.



Experimento de Ratisbona

Experimento de Magdeburgo

Los hemisferios de Magdeburgo tuvieron mucha fama: Guericke tuvo éxito en hacer el vacío en el interior de dos hemisferios metálicos de aproximadamente 60 cm. de diámetro unidos con los bordes muy bien pulimentados. En el grabado aparecen dos grupos de 8 caballos, tirando en direcciones opuestas del recipiente formado por los dos hemisferios acoplados y sellados. Guericke mostró mediante ese experimento que, cuando el recipiente estaba vaciado de aire -o sea, cuando estaba vacío-, la fuerza de los 16 caballos era incapaz de separar los hemisferios. En cambio, cuando el recipiente contiene aire, una fuerza insignificante consigue despegar los hemisferios. Estas curiosas demostraciones de los efectos del vacío se hallan convenientemente explicadas e ilustradas en la obra de Guericke, *"Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio"* (Amsterdam, 1672).

Estos experimentos y otros realizados a lo largo de este tiempo hicieron surgir la idea del fundamento de la máquina de vapor, ya que si se pudiese encontrar un medio sencillo para crear el vacío repetidas veces, se podría utilizar la presión atmosférica como fuente de energía.

3. Máquinas atmosféricas

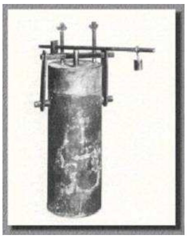
La máquina de vapor, sin considerar lo mucho que representó para la humanidad, fue un gran invento y como todos los grandes inventos o descubrimientos, no son obra ni de un día ni de una sola persona (sufren continuas modificaciones que los mejoran), sin embargo, si que podemos fijar su verdadero desarrollo a finales del siglo XVII y que su leit-motiv fue bombear hacia fuera el agua que anegaba las minas de carbón. El carbón de la superficie se les había agotado y no tenían mas remedio que ahondar para sacarlo.

Los primeros que hicieron algo al respecto fueron el matemático y físico holandés **Christian Huygens** y un discípulo suyo **Denis Papin**.

Papin (1647-1714), inventor y físico francés, cursó los estudios de medicina sin ejercer, y trabajó al principio y se instaló en 1673 en la capital francesa, donde se convirtió en discípulo de Christian Huygens. Ambos estudiaron la posibilidad de aprovechar la energía producida por el vapor de agua a presión. Tras la revocación del Edicto de Nantes, dejó su país y se instaló en Inglaterra donde fue discípulo de Robert Boyle. En 1687, el príncipe elector de Hesse-Kassel, Carlos Augusto, le ofreció dar clases de matemáticas y físicas en Marburgo.

En estos años, el centro mundial de la actividad científica de vanguardia era la *Real Sociedad de Londres*. Fundada en 1660, mientras Newton (1642-1727) todavía estudiaba en Cambridge, se fundó la Sociedad para que la Corona apoyara el progreso del conocimiento científico. El lema de la Sociedad, **Nullius in Verba,** significa más o menos: “No aceptes la palabra de nadie; averígualo tú mismo”. En poco tiempo se convirtió en el mayor foro mundial para el intercambio de información respecto a los experimentos científicos más recientes. Los científicos de toda la Gran Bretaña y Europa mandaban cartas y trabajos para ser leídos en las reuniones semanales de la Sociedad. A diferencia de las universidades cuyo papel era transmitir la antigua sabiduría griega, la Real Sociedad se hizo el eje de comunicaciones para el conocimiento nuevo y la precursora de todas las sociedades modernas y revistas científicas.

En el año 1680 inventó la “olla de Papin”, *marmita* o *digesteur*, predecesora de las actuales ollas a presión que permiten la cocción rápida de los alimentos a alta presión. Cuando Denis Papin presentó su invento de la olla express ante la Real Sociedad de Londres, la olla estalló frente a los distinguidos miembros. Posteriormente, solicitó otra demostración dado que ahora la olla poseía una válvula de seguridad; sin embargo, todos los miembros se opusieron a la nueva demostración temerosos de salir sin vida dado el peligro potencial que representaba el invento. La única excepción fue la del presidente, el físico Robert Boyle, quien permitió la demostración, siempre y cuando se efectuara ante un número razonable de personas. Esta olla Papin la dio a conocer en su obra de 1682 *"De la manera de ablandar los huesos y de cocer toda clase de carne en muy poco tiempo"*. La teoría esencial de la marmita es como el punto de ebullición depende de la presión del vapor.



Olla de Papin

Máquina de Papin

Tan solo tres años después de la publicación de los Principia Mathematica de Newton (1687), Papin se presentó en otra de esas reuniones de la Real Sociedad. El pequeño aparato que les mostró a los miembros de la Real Sociedad fue un cilindro hueco de latón de un diámetro de 6.35 centímetros que parecía una lata sin tapa. Un disco horizontal de latón que se acomodaba ajustadamente, o pistón, se deslizaba hacia arriba y hacia abajo dentro del cilindro. Usando una flama, Papin hirvió un poco de agua en el fondo del cilindro hasta expandir el vapor que impulsaba el pistón al borde superior del cilindro. Con una aldabilla de metal fijó el pistón en su lugar y luego enfrió el cilindro mediante un baño de agua fría. Este proceso condensó el vapor y creó un vacío parcial. Cuando Papin soltó la aldabilla, la presión atmosférica forzó el pistón hacia abajo y proporcionó suficiente poder para levantar al aire un peso de 27 kilos.

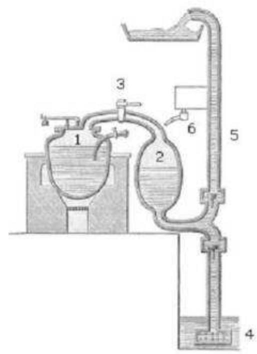
Sin embargo a Papin no se le puede considerar el inventor de la máquina de vapor; la máquina de su aparato primitivo ofrece las tres fases del juego de esta máquina: producción del vapor, empleo del fluido en un cilindro conteniendo un pistón móvil y condensación; únicamente que estas tres operaciones se efectúan en el mismo espacio. Los perfeccionamientos de la máquina, como veremos, han consistido en separarlas y asignar a cada una sitios propios. En 1707 escribió *"The New Art of Pumping Water by using Steam"*.

Huygens anteriormente realizó este mismo experimento del cilindro, pero con pólvora en vez de agua. No obstante, este procedimiento poseía una serie de desventajas, tales como:

- Se originaban considerables residuos de gas en el interior del cilindro, que provocaban que sólo se lograra un vacío parcial.

- Era peligroso volver a cargar el cilindro con pólvora.

En 1698 el ingeniero inglés **Thomas Savery** desarrolló y patentó un dispositivo para bombear agua. En su máquina de fuego o el amigo de los mineros, como se le conocía, el vapor se producía en un recipiente aparte que constituía la caldera 1 y se empujaba el agua de 2 y 5 directamente con el vapor; excepto las válvulas de funcionamiento manual, no tenía elementos móviles, no tenía pistón. Aunque siguió enfriando éste por medio de rociar el agua 6 por fuera del depósito o tanque 2. El tanque estaba comunicado a un tubo que se sumergía en el agua de la mina 4 y, al producirse el vacío, el agua subía como sube un liquido cuando se chupa por una pajita.



Máquina de Savery

Fue utilizada en los primeros años del siglo XVIII para bombear agua a grandes edificios o a ruedas hidráulicas. Pero la altura máxima a que podía elevar agua no era suficiente como para permitir su uso en el drenaje de las minas. En un intento de aumentar la altura, Savery utilizó vapor a alta presión, es decir, vapor a una presión entre 8 y 10 atmósferas, para tener la posibilidad de elevar el agua unos 90 metros. Sin embargo, este tipo de máquina presentaba problemas de construcción, ya que la tecnología de la época (falta de profesionales, de técnicas de construcción y de materiales apropiados) no podía dominar en condiciones de seguridad la elevada presión del vapor, produciéndose la explosión de algunas máquinas de vapor con la consiguiente pérdida de vidas humanas y de popularidad, teniendo que transcurrir una centuria para que las máquinas de vapor a alta presión fueran de uso común.

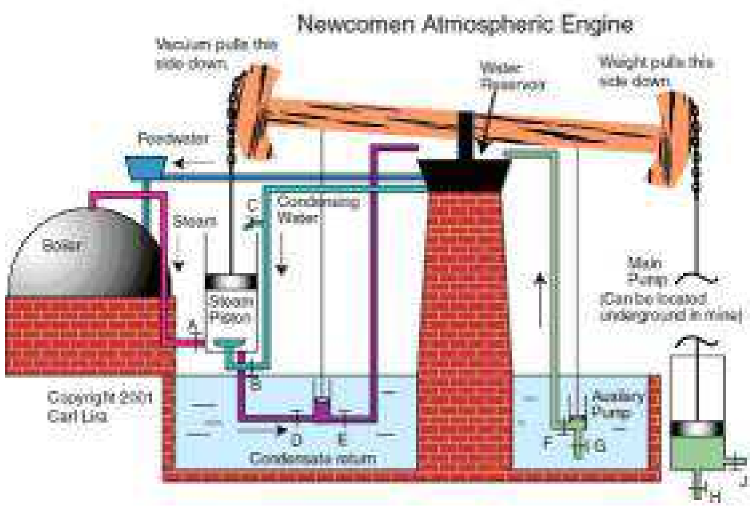


Figura 1

El herrero e inventor inglés **Thomas Newcomen** (1663-1729) construyó un aparato que transformaba el calor en trabajo y que podríamos considerar como una máquina propiamente dicha. A pesar de ser socio de Savery y de los consejos en contra del físico Robert Hooke, Newcomen decidió usar el cilindro y el émbolo propuesto por Papin. La máquina de vapor, consistía en una caldera que, mediante un tubo, comunicaba con un cilindro/pistón unido a uno de los extremos de una gran viga basculante de madera o balancín, cuyo otro extremo accionaba una bomba de agua (Fig.1). El vapor procedente de la caldera empujaba el pistón hacia arriba hasta la posición superior; en este momento, se proyectaba dentro del cilindro, un chorro de agua fría que enfriaba y condensaba el vapor, creando un vacío en su interior. Entonces, el vacío creado, el poder de la nada como fue llamado, no contrarrestaba la presión atmosférica en la otra cara del émbolo y por ello empujaba el pistón hacia abajo arrastrando su lado de la viga, y por ende, su otro extremo subía accionando la bomba la cual extraía el agua.

Es una máquina de vapor de *simple efecto*, i.e., son máquinas a las que el vapor se les suministra solamente por debajo del pistón. En estas máquinas, debido sobre todo al enfriamiento y calentamiento del cilindro, el pistón realizaba muy pocos recorridos por minuto, por lo que la unión mediante una cadena (a veces un engranaje) entre la varilla del pistón y su lado correspondiente de la viga, era satisfactoria.

En esa época no existían métodos para medir la potencia desarrollada por las máquinas ni unidades que permitieran la comparación de su rendimiento, no obstante, los datos siguientes dan una idea del trabajo realizado por una máquina que funcionó en una mina en Francia, tenía un cilindro de 76 cm. de diámetro y 2,7 m. de altura y con ella se pudo completar en 48 horas una labor de desagote que previamente había requerido una semana con el trabajo de 50 hombres y 20 caballos operando en turnos durante las 24 horas del día.

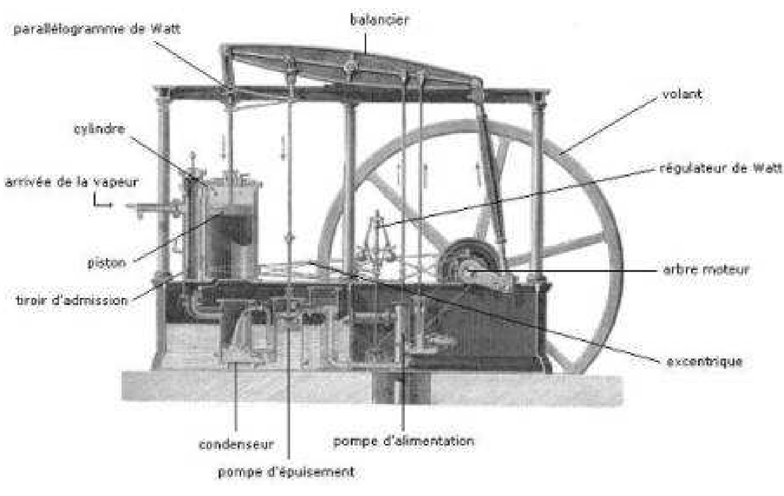


Figura 2

Con el fin de mejorar la potencia y la regularidad de la máquina a vapor de Newcomen, **James Watt** (1736-1819), ingeniero e inventor escocés, desarrolló una serie de ideas que permitieron la fabricación de la máquina de vapor que hoy conocemos (Fig.2). La unidad de potencia se llama vatio en su honor.

Entre las ideas de Watt está la de transformar estas máquinas de simple efecto en máquinas con *doble efecto*, en las cuales, el vapor es inyectado a un lado del pistón cada vez, para mover este hacia arriba y hacia abajo. El problema a resolver ahora, era, la transmisión al balancín del impulso del pistón en su camino ascendente, ya que evidentemente, la cadena que hacía descender al balancín en la máquina de simple efecto no servía. Debido a su diferente movimiento, lineal el pistón, circular el balancín, no era posible una unión directa entre ambos. Por ello era necesario una conexión rígida que impulsase el balancín hacia arriba. Para solventar esto, ideó lo que llamó el movimiento paralelo o paralelogramo de Watt, una combinación de varillas rígidas articuladas que impedían la vibración de la varilla del pistón. Otras de sus invenciones fueron: el condensador externo, el regulador a bolas o gobernador y el volante.

La solución de Watt fue una ingeniosa combinación, de 3-barras articuladas o eslabones (4-barras si contamos el eslabón marco o base) y un pantógrafo (instrumento para copiar, ampliar o reducir un dibujo). El dispositivo, el cual puede ser visto debajo del extremo superior del balancín en la Fig.2, es mostrado en un diagrama en la Fig.3.

Aquí ED es el balancín, pivotado en D. $CBAD$ constituye el eslabonamiento, con C fijo a la máquina, $DAEQB$ forma el pantógrafo, $AEQB$ es un paralelogramo articulado, y P un punto del eslabón intermedio AB, el cual está alineado con D y Q, de este modo las trayectorias de P y Q serán siempre semejantes.
Ahora como el balancín oscila alrededor de su pivote, ajustando tanto las longitudes como la posición de los eslabones, la trayectoria total de P es una figura parecida a un 8, y Watt demostró que si los cocientes $BP : PA$ y $DA : BC$ son iguales, el 8 sería simétrico Fig.4, y la parte de la trayectoria de P correspondiente a una oscilación del balancín de no más de 20 grados arriba o abajo de la horizontal, sería aproximadamente lineal.

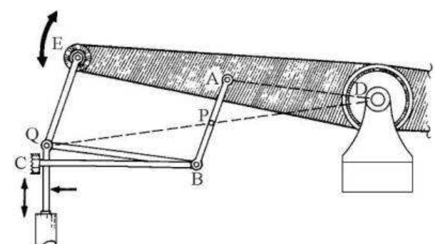


Figura 3

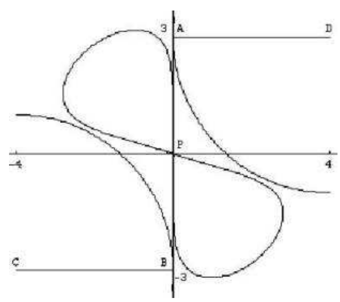


Figura 4

De esta forma, asegura, que al movimiento oscilatorio del balancín, le corresponda un movimiento casi lineal de la varilla del tapón de la bomba conectada en P y de la varilla del pistón conectada en Q, como deseaba. Si fijamos la posición de A sobre el balancín, el movimiento depende de cinco parámetros, a saber la distancia horizontal y vertical desde C hasta D, las longitudes de las varillas CB y BA y la distancia BP.

El mecanismo de Watt daba buenos resultados pero no era perfecto, pues, aunque las desviaciones de la vertical fuesen muy pequeñas, al no moverse el extremo de la varilla del pistón en línea recta, se producía una presión por fricción ocasionando cierto deterioro.

En la solución dada por Watt, el punto P realiza una trayectoria similar a la de la Fig.5, coincidiendo ésta con la deseada línea vertical del movimiento en solo tres puntos, origen, medio y final de la línea. El trazo de curva discontinuo representa posiciones de P inalcanzables con la limitada oscilación del balancín.

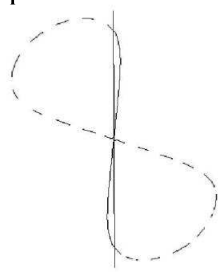


Figura 5

4. P. L. Chebyshev

Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) fue un profesor de matemáticas en la Universidad de San Petersburgo desde 1847 a 1882, que disfrutó de una bien ganada reputación en Europa por sus trabajos en muchos campos, incluyendo la Teoría de los Números, Teoría de Probabilidades, Teoría de Integración, Teoría de Interpolación y Análisis Numérico.

El año 1851 fue una fecha muy importante en la historia de la ciencia y tecnología del siglo XIX, por ser el año de la gran Exposición Mundial de Londres. Fue natural que Chebyshev quisiera visitarla, pero a pesar de la carta de recomendación de sus colegas a las autoridades de San Petersburgo señalando el probable beneficio para la tecnología rusa, el permiso no le fue concedido. No obstante, en 1852, con permiso oficial, Chebyshev, a la edad de 31 años, emprendió un gran viaje por Europa desde Junio hasta Noviembre.

Dedicó su tiempo a examinar todo tipo de maquinaria, factorías, molinos, ferrocarriles y máquinas, muchas recién compradas en la exhibición de Londres. Estuvo particularmente interesado en el movimiento paralelo de Watt, el cual era utilizado no solamente en las máquinas hechas por la firma Watt sino también en varios modelos de recientes máquinas de vapor. Estos mecanismos aun están en uso, por ejemplo, en ciertos tipos de grúas, en la suspensión de coches de alto rendimiento, etc. Visitó a famosos matemáticos, incluyendo a Liouville (1809-1882), Cauchy (1789-1857) y Hermite (1822-1901) en París, a Dirichlet (1805-1859) en Berlín, a Sylvester (1814-1897) y Cayley (1821-1895) en Londres y además realizó investigación matemática, la cual dio lugar al menos a dos importantes trabajos. Posteriormente, Chebyshev escribió un amplio reportaje detallando todas sus actividades.

Chebyshev convencido de que con la ayuda de las matemáticas mejoraría el mecanismo de Watt, trabajó tan intensamente en este cometido, que en cuanto regresó, fue capaz de leer un trabajo en la Academia Imperial de las Ciencias de St. Petersburgo, el cual puede muy bien ser considerado como la lección inaugural en Teoría de la Aproximación. Chebyshev publicó en francés este trabajo, titulado "*Teoría de los mecanismos conocidos bajo el nombre de paralelogramos*", causando un gran revuelo y extrañeza no sólo porque, uno no esperaría encontrar matemáticas pioneras bajo tal nombre, sino también porque, aparte de los párrafos introductorios, el trabajo aparentemente no contenía nada acerca de mecanismos. Después de 30 páginas de matemáticas, en su último párrafo, el autor promete aplicar su fórmula al diseño de los paralelogramos, pero en este punto su trabajo se para bruscamente. Exactamente escribe:

"Dans les § suivants nous montrerons l'usage des formules que nous venons d'exposer pour trouver les éléments des parallélogrames qui vérifient les conditions les plus avantageuses pour la précision du jeu de ces mécanismes".

Aunque Chebyshev permaneció extremadamente interesado en el estudio de los mecanismos durante el resto de sus días y escribió muchos artículos sobre ellos, nunca completó este primer trabajo. En este trabajo también aparece su famoso polinomio por primera vez.

Pues bien, Chebyshev afirma que con 5 parámetros disponibles se debe producir una trayectoria que coincida con la deseada línea recta, no solo en 3 puntos como la curva de Watt, sino en 5. Pero además afirma y esta fue la mayor contribución de su trabajo de 1853, que la máxima desviación de la deseada vertical entre los extremos de la trayectoria o en otras palabras el peor error, sería minimizado, si los puntos de coincidencia fueran elegidos de tal forma que el error alcance su máximo valor, positiva o negativamente (a un lado y al otro de la línea) al menos 5+1=6 veces. Luego para el mínimo error, la trayectoria debería ser similar a la forma de la curva de la Fig.6.

Sin embargo, esta propiedad cardinal, que ni en forma equivalente había sido formulada con anterioridad en la literatura matemática, fue simplemente presentada por Chebyshev como un hecho conocido. Al no dar la prueba de esta aseveración, permanece la duda, de si pudo ser formulada por algún otro o fue establecida por el mismo y debido a su aparente simplicidad, fue considerada como no merecedora de demostración. Textualmente escribe:

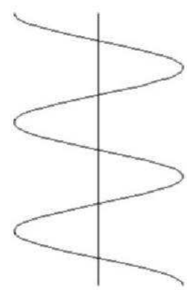


Figura 6

§ 3. "*Soit* fx *une fonction donnée,* U *un polynome du degrée* n *avec des coefficients arbitraires. Si l'on choisit ces coefficients de manière à ce que la différence* $fx - U$, *depuis* $x = a - h$, *jusqu'à* $x = a + h$, *reste dans les limites les plus rapprochées de* 0, *la différence* $fx - U$ *jouira,* ***comme on le sait****, de cette propriété:*

Parmi les valeurs les plus grandes et les plus petites de la différence $fx - U$ *entre les limites* $x = a - h, x = a + h$, *on trouve au moins* $n + 2$ *fois la même valeur numérique.*

Les valeurs que $fx - U$ *prend pour* $x = a - h, x = a + h$ *sont considérées comme maximum ou minimum".*

En cualquier caso, él hizo generosas mejoras cinco años después en su segunda publicación titulada "*Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*" o teoría de aproximación como la llamamos ahora. Este fue un trabajo puramente teórico de más de 100 páginas, que trataba el problema general, de minimizar el máximo error cometido sobre un intervalo al representar una función dada sobre él, mediante una función aproximante de tipo específico dependiente de un número de parámetros ajustables.

"Etant donnée une fonction quelconque $F(x)$ *avec* n *paramètres arbitraries* p_1, p_2, ..., p_n *il s'agit par un choix convenable des valeurs* p_1, p_2, ..., p_n *de rendre minimum la limite de ses écarts de zéro entre* $x = -h$ *et* $x = +h$."

Chebyshev entonces resuelve completamente los casos:

1) $F(x; p_1, ..., p_n) \equiv p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n - f(x)$,

2) $F(x; p_1, ..., p_n) \equiv \rho(x)\{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n - f(x)\}$ con $\rho(x) = 1/A(x)$ con $A(x)$ un polinomio que no se anula sobre el intervalo,

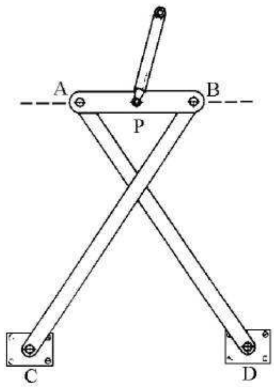
3) $F(x; p_1, ..., p_n) \equiv \dfrac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \cdots + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + p_{n-l+2} x^{l-1} + \cdots + p_n x + 1} - f(x)$,

calculando el correcto número de puntos en los cuales el máximo error debe ser alcanzado en orden a minimizar éste, y hallando el mínimo error.

5. Mecanismos

El movimiento paralelo o mecanismo de Chebyshev son tres barras articuladas AB, BC, AD cuyo punto de trazado P se aproxima al movimiento rectilíneo. Las barras radiales son de igual longitud. La distancia entre los pivotes fijos debe entonces ser un tercio de la suma de las longitudes de las dos barras radiales y la longitud de la barra transversal. El trazador es tomado en el punto medio de ésta última.

Si ahora dibujamos una línea recta a través del trazador en su posición media paralela a la que forman los pivotes fijos, se encontrará que, el trazador coincidirá con la línea en los puntos donde las verticales a través de los pivotes fijos corta, así como en la posición media, pero no coincide en ningún otro lado aunque su desviación es muy pequeña cuando permanece entre las verticales. Según Chebyshev es menor que la obtenida por el mecanismo de Watt que era de aproximadamente 1/4000 de la longitud de la carrera del pistón. No obstante, debido al cruce de las piezas, desde un punto de vista práctico, este mecanismo no es muy operativo.



Mecanismo de Chebyshev

Chebyshev fue el creador de otros muchos mecanismos y máquinas que asombraron a sus contemporáneos por su ingenio.

Por ejemplo, construyó una máquina que andaba, imitando el movimiento de un animal. Su mecanismo más elaborado fue un aritmómetro, construido por la firma Gautier en París. En total construyó más de 40 mecanismos distintos y cerca de 80 modificaciones más de los mismos. En 1893 con motivo del 400 aniversario del descubrimiento de América por Cristóbal Colón, se realizó una exposición mundial en Chicago, exhibiéndose siete de sus inventos mecánicos, incluyendo su invento de un velocípedo especial para mujeres Fig.7.
Los trabajos de Chebyshev sobre el mecanismo de Watt, dieron lugar a una gran profusión del estudio de mecanismos. Se buscaba un mecanismo que fuera capaz de trazar exactamente una línea recta.

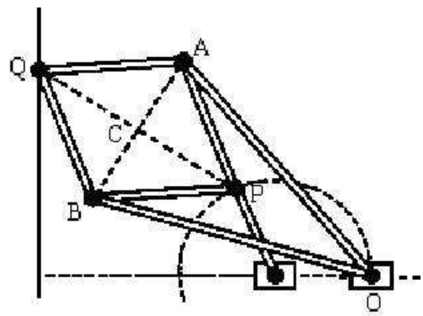
Figura 7

Entre los diversos autores además de Watt y Chebyshev, que estudiaron y descubrieron nuevos mecanismos, citaremos a Evans (1755-1819), Roberts (1789-1864), Sylvester, Cayley, Peaucellier (1832-1913), Lipkin (1846-1876), Hart (1848-1920) y Kempe (1849-1922). Señalemos que Sylvester decidió estudiar mecanismos después de escuchar en Inglaterra una conferencia sobre el tema a Chebyshev, y lo mismo le sucedió a Kempe con Sylvester.

En 1864, ochenta años después del descubrimiento de Watt, **Ch. Peaucellier**, un oficial de ingenieros de la armada francesa, fue el primero en diseñar un mecanismo que trazaba exactamente una línea recta. Su descubrimiento no fue de principio considerado en su verdadero valor, cayendo casi en el olvido, y fue redescubierto, 10 años después, por un estudiante ruso llamado Lipkin alumno de Chebyshev, quién obtuvo un sustancial premio del gobierno Ruso por su supuesta originalidad. Sin embargo más tarde Peaucellier tuvo su recompensa siendo reconocido y premiado con el gran premio de Mecánica del Instituto de Francia, el premio Montyon.

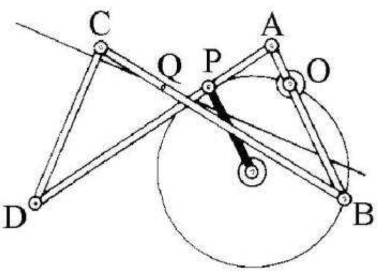
Es un mecanismo que sirve para construir mecánicamente la figura *inversa* de una línea dada. Tiene como vemos *siete* piezas o eslabones. Hay primeramente dos grandes piezas de igual longitud, pivotados en el mismo punto fijo O.

Sus otros extremos están pivotados a ángulos opuestos de un rombo formado por cuatro piezas iguales de longitud menor que los anteriores. La porción del instrumento hasta ahora descrita es lo que se llama celda de Peaucellier. Ahora tomemos un eslabón extra y pivotémoslo por un lado, a un punto fijo cuya distancia del primer punto fijo donde la celda esté pivotada sea igual a su longitud, por el otro, a uno de los vértices libres del rombo teniendo en el ultimo vértice libre Q un lápiz. Al girar P este lápiz describirá exactamente una línea recta.



Mecanismo de Peaucellier

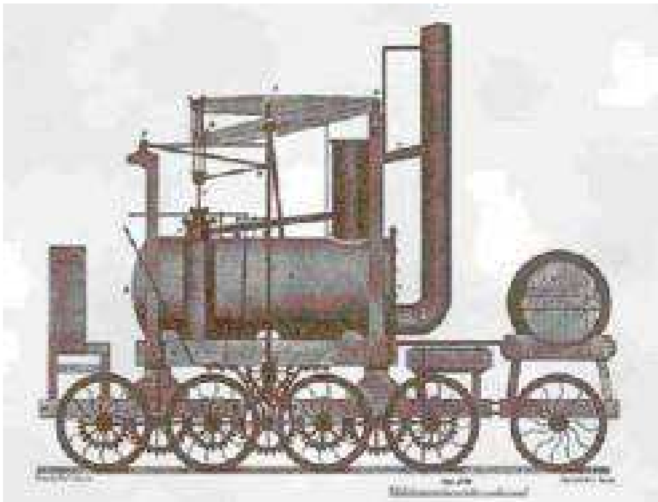
H. Hart de la Academia de Woolwich en 1877 en Proc. Lond. Math. Soc. diseñó un mecanismo de *cinco* barras que convierte exactamente el movimiento circular en movimiento rectilíneo. Consiste en un paralelogramo cruzado que se corta por una línea recta paralela a la recta unión de dos vértices no consecutivos, cortando a los cruzados y uno de los otros lados en tres puntos Q, P y O. Manteniendo el punto O de los no cruzados fijo los otros dos describen curvas *inversas*.



Mecanismo de Hart

Digamos que Chebyshev, también intentó sin éxito, construir un mecanismo de cinco eslabones de estas características, es más, se le atribuye una demostración de la imposibilidad de conseguirlo. Kempe [8], tiene un libro escrito con mucho candor sobre mecanismos.

El estudio de los mecanismos no era un capricho de unos matemáticos demasiado puntillosos, pues sus aplicaciones en todo tipo de máquinas evitaban rozamientos o fricciones desfavorables o cabezas arqueadas, agilizando el movimiento, por ejemplo veamos su aplicación en la locomotora *Puffing Billy* (1813). En el grabado se observa el movimiento paralelo de Watt para conducir la varilla del pistón en el cilindro, el cual, está colocado verticalmente.



Puffing Billy

Existe toda una colección de distintos mecanismos diseñados para los más diferentes cometidos, en robótica, para prótesis, etc. En la obra *Mecanismos en la técnica moderna* del académico I. Artobolevski se describen más de 5000 mecanismos.

El estudio y posterior desarrollo de las máquinas de vapor y de los mecanismos facilitaron el origen y desarrollo de la termodinámica y de la cinemática plana. Así mismo, los mecanismos proporcionan un rico campo de exploración geométrica: el estudio de las propiedades algebraicas de las curvas trazadas por los puntos de los mecanismos. Kempe probó que, cada porción finita de una curva plana algebraica puede ser generada por un mecanismo de tipo Watt. Una generalización teórica del concepto de mecanismo articulado y sus aplicaciones a la teoría de representación de grupos finitos y a la teoría de representación de grupos de Lie puede verse en el trabajo de Misha Kapovich.

Bibliografía

[1] P. Butzer and F. Jongmans, *P.L. Chebyshev (1821-1894): A guide to his life and Work*, J. Approx. Theory 96, 111-138, 1999.

[2] P.L. Chebyshev, *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, Mém. des sav. étr. prés. à l'Acad. de St. Péters. 7 (1854), 539-568. [17, Vol. 1, pp. 109-143], Read on 28. 1. 1853.

[3] P.L. Chebyshev, *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*, Mém. Acad. St. Pétersb. 7 (6) (1859), 199-291. [17, Vol. 1, pp. 271-378], Read on 9. X. 1857.

[4] P.L. Chebyshev, *Complete Collected Works (1946-1951)*, Izdatel'stvo Akad. Nauk SSR, Moscow/Leningrad [Vol. I (1946), 342 pp.; Vol. II (1947), 520 pp.; Vol III (1948), 414 pp.; Vol IV (1948), 255 pp. Vol V, other works, biographical materials (1951), 474 pp.]

[5] P.J. Davis, *The Thread: A Mathematical Yarn*, Harcourt Brace Jovanovich, 2nd edition, 1989.

[6] V.L. Goncharov, *The theory of best approximation of functions*, J. Approx. Theory 106, 2-57, 2000.

[7] M. Kapovich and J. Millson, *Universality theorems for configuration spaces of planar linkages*, Topology, 41 (6), 1051-1107, 2002.

[8] A.B. Kempe, *How to draw a straight line; a Lecture on linkages*, Nature Series, MacMillan and Co., London, 1877.

[9] A. Talbot, *Approximation Theory or a miss is better than a mile*, Inaugural lecture delivered at the University of Lancaster on 18th November 1970.

[10] V.M. Tikhomirov, *Commentary on the article by V. L. Goncharov, "The theory of best approximation of functions"*, J. Approx. Theory 106, 58-65, 2000.

En la Web

[1] Sobre máquinas

http://visite.artsetmetiers.free.fr/machine_vapeur.html

http://www.geocities.com/Athens/Acropolis/6914/

[2] Sobre Watt y Chebyshev

http://www.history.rochester.edu/steam/carnegie/

http://www.history.rochester.edu/steam/marshall/

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/˜history/Mathematicians/Chebyshev.html

[3] Sobre mecanismos

http://www.tec.uji.es/d/IngMecDoc/Mecanismos/

http://www.brockeng.com/mechanism/index.htm

http://www.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/geomeccan0.html

[4] Curvas de Watt y Chebyshev

http://www.mathcurve.com/courbes2d/watt/watt.shtml

Francisco Luquin
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas
Apartado 644
48080 Bilbao
e-mail: ***francisco.luquin@ehu.es***