Coloreando mapas

por

Antonio Garvín, Universidad de Málaga

1. Introducción

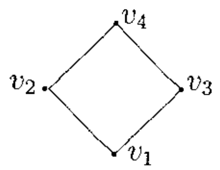
Una de las áreas de las matemáticas de mayor popularidad en los últimos años por sus múltiples aplicaciones en las ciencias tecnológicas, es la de las matemáticas discretas. Como una consecuencia de este hecho encontramos como esta aparece en los últimos años como asignatura propia en la mayoría de planes de estudios de las ingenierías. Dentro de las matemáticas discretas, la teoría de grafos es sin duda la estrella que brilla con luz propia. Los grafos son objetos que aparecen con bastante frecuencia, como un ejemplo muy común pensemos que los diagramas de instalación de redes eléctricas que usan los ingenieros pueden ser considerados como grafos. En general aquellos problemas que son de naturaleza combinatoria pueden ser pensados como problemas de grafos. En sus inicios como una rama de la topología algebraica, la teoría de grafos, ha tomado carta de naturaleza propia y es utilizada hoy día como herramienta fundamental en áreas tan alejadas entre si como pueden ser la investigación operativa, la lingüística, la química, la física o la genética. Debemos hacer notar que esta teoría trata principalmente de las propiedades combinatorias, prescindiéndose generalmente de las propiedades topológicas. Existe un consenso general en señalar que a diferencia de otras áreas la teoría de grafos si que tiene un origen claro y preciso: el problema de los puentes de Königsberg, que fue resuelto por Euler en 1736.

2. ¿Qué es un grafo?

Si pensamos en un mapa de carreteras, podemos considerar dos tipos básicos de objetos: ciudades y carreteras. Nos interesa modelizar las conexiones entre ciudades por carreteras mediante algún objeto matemático abstracto. Un grafo intenta modelizar este tipo de problemas.

Definición 1 Un *grafo* G consiste en un conjunto finito V, cuyos elementos reciben el nombre de *vértices* y un conjunto A de 2-subconjuntos de V a cuyos elementos denominamos *aristas*. Escribimos $G = (V, A)$ y decimos que V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas.

Así el siguiente esquema de conexión por carreteras entre 4 ciudades v_1, v_2, v_3 y v_4



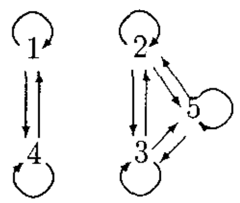
quedaría modelizado por el grafo $G = (V, A)$, dado por

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

En muchas ocasiones nos interesa distinguir el orden de conexión entre dos aristas. Volviendo al ejemplo de las carreteras nos gustaría modelizar el hecho de que existan carreteras de dirección única. Esto no es difícil de hacer considerando pares ordenados en lugar de subconjuntos. Otra definición de grafo que incluya esta idea sería la siguiente:

Definición 2 Un *grafo (dirigido)* G consiste en un conjunto finito V (los vértices) y un conjunto $A \subset V \times V$ (las aristas). Escribimos $G = (V, A)$ y decimos que V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas (dirigidas).

Lo siguiente sería una representación de un grafo dirigido:



Esta segunda definición es más general que la primera ya que todo grafo en el sentido de la definición 1 puede ser pensado en el sentido de la definición 2 sin más que identificar cada arista de la forma $\{u, v\}$ con el par de aristas (dirigidas) (u, v) y (v, u). Con esta nueva definición permitimos aristas que conecten un vértice consigo mismo. Esto es a lo que llamamos un *lazo*. También permitimos que puedan existir más de una arista entre dos vértices. La siguiente definición de grafo que damos permite lazos y todas las aristas que queramos uniendo dos vértices.

Si S es un conjunto notamos por $S\&S$ al producto desordenado de S consigo mismo. Esto es, el conjunto de pares desordenados $[s_1, s_2]$ con $s_1, s_2 \in S$. Cada par desordenado $[s_1, s_2]$ es la clase de equivalencia de un par ordenado (s_1, s_2) bajo la relación $[s_1, s_2] = [s_2, s_1]$. La única diferencia entre pares desordenados y 2-subconjuntos es que $[s, s]$ es un par desordenado mientras que $\{s, s\} = \{s\}$ no es un 2-subconjunto.

Definición 3 Un *grafo* G es una terna (V, A, Φ) donde V (los vértices) y A (las aristas) son conjuntos finitos, V no es vacío y $\Phi\colon A \longrightarrow V\&V$ es una función (la función de incidencia).

Si en la definición anterior consideramos $V \times V$ en lugar de $V\&V$ tendríamos la definición más general de grafo dirigido.

No existe un consenso general sobre la terminología de grafos. En general el término *multigrafo* se utiliza cuando se permiten más de una arista por cada par de vértices y el término *digrafo* o *grafo dirigido* cuando importa el orden de conexión entre aristas. Es común encontrar en la literatura como bajo el término grafo se pueden entender cualquiera de los conceptos que hemos definido anteriormente o incluso que no exista la restricción de finitud para el conjunto de vértices y aristas.

Nos resistimos a concluir este apartado de definiciones del concepto de grafo sin mencionar la definición de grafo desde el punto de vista de la topología.

Definición 4 Un *grafo* es un par formado por un espacio Hausdorff X y un subespacio X^0 cumpliendo:

- X^0 es un subespacio cerrado discreto de X. Los puntos de X^0 se denominan vértices.
- $X - X^0$ es unión disjunta de subconjuntos abiertos a_i, donde cada a_i es homoeomorfo al intervalo $(0, 1)$. Los conjuntos a_i se denominan aristas.
- El borde de cada arista, $\overline{a_i} - a_i$, es un subconjunto de X^0 formado por uno

o dos puntos. Si el borde tiene dos puntos el par $(\overline{a_i}, a_i)$ es homeomorfo al par $([0,1],(0,1))$. Si el borde tiene un solo punto $(\overline{a_i}, a_i)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 - \{1\})$.

- Un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si $A \cap \overline{a_i}$ es abierto para cada arista a_i.

Esta última condición sólo es relevante en el caso en que el grafo posea infinitas aristas.

Un grafo así definido es un caso particular de una estructura fundamental en topología, la de *CW-complejo*. Los grafos son tal y como los acabamos de definir CW-complejos de dimensión 1. Los vértices se corresponden con lo que se denomina el 0-esqueleto y las aristas (cerradas) con el 1-esqueleto.

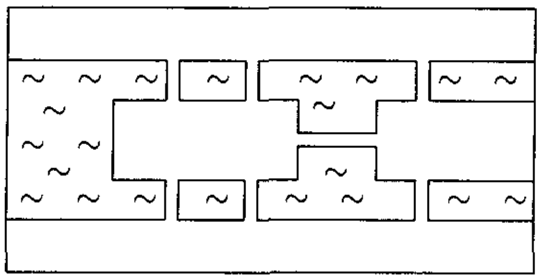
En lo que sigue cada vez que utilicemos el término grafo nos referiremos a la definición 3.

Sea $G = (V, A, \Phi)$ un grafo y sean $V' \subset V$ y $A' \subset A$ subconjuntos siendo V' no vacío y tales que $\Phi(A') \subset V'\&V'$. Claramente la terna $G' = (V', A', \Phi_{|A'})$ es un grafo. Decimos que G' es un *subgrafo* de G.

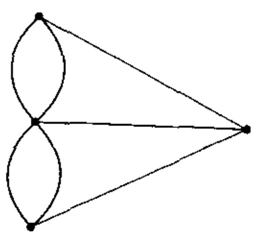
El *grado* de un vértice es el número de aristas que tocan al vértice. Por convenio cada lazo cuenta como dos aristas.

3. El problema de los puentes de Königsberg

La noción de grado de un vértice fue introducida por Euler para resolver el problema de los siete puentes de Königsberg. Durante el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg estaba dividida por el río Pregel en cuatro zonas. Estas zonas estaban comunicadas por siete puentes tal como muestra el siguiente esquema:



Se decía que los habitantes daban paseos dominicales tratando de recorrer la ciudad cruzando cada puente exactamente una vez y regresando al punto de inicio del paseo. Si representamos las regiones por vértices y los puentes que unen las regiones por aristas obtenemos el siguiente grafo:



El problema es por tanto equivalente a encontrar un circuito que recorra cada arista del grafo anterior exactamente una vez comenzando y acabando en el mismo vértice.

Definición 5 Un *recorrido* en un grafo es una sucesión de vértices adyacentes cada uno con el siguiente. Si el vértice inicial y final coinciden decimos que es un *ciclo*. Un *recorrido de Euler* es un recorrido que pasa por cada arista exactamente una vez. Si el recorrido es un ciclo decimos que es un *ciclo de Euler*.

Decimos que un grafo es *conexo* si cada par de vértices distintos se pueden unir por un recorrido. Se tiene el siguiente resultado que es consecuencia del principio "todo lo que entra sale".

Teorema 6 *Un grafo G posee un ciclo de Euler si y sólo si es conexo y cada vértice es de grado par.*

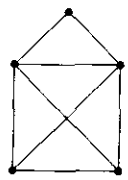
Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos:

Corolario 7 *Un grafo G posee un recorrido de Euler que no es un ciclo, si y sólo si es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

De esta forma Euler probó que no existía tal recorrido. De hecho no sólo no existe un ciclo de Euler sino que ni siquiera existe un recorrido de Euler.

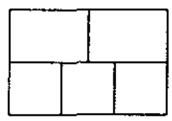
Estas ideas pueden ser aplicadas para algunos juegos conocidos.

La siguiente figura puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel. Además comenzamos y terminamos por los vértices de grado impar



Sin embargo es imposible hacerlo comenzando y terminando en el mismo punto ya que no todos los vértices tienen grado par.

Otro juego conocido es aquel que pide dibujar una curva sin levantar el lápiz del papel que atraviese exactamente una vez cada una de las paredes del siguiente dibujo.



Si representamos cada región por un vértice (incluida la región exterior) y ponemos una arista por cada pared que toca dos regiones, obtenemos un grafo (el grafo dual del mapa anterior). De esta forma el problema es equivalente a encontrar un recorrido de Euler en este grafo. El grafo que obtenemos tiene tres vértices de grado impar y por tanto el problema no posee solución.

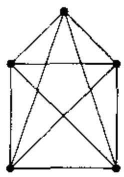
4. Grafos planos y mapas

Entre los tipos de grafos que existen podemos destacar dos de relevante importancia: los completos y los bipartitos. Un grafo se dice que es *completo* si es simple, es decir no posee lazos ni aristas múltiples, y cada par de vértices son adyacentes. Notamos por K_n a un grafo completo de n vértices. Si dado un grafo simple podemos dar una partición del conjunto de vértices en dos conjuntos disjuntos de manera que cada vértice de un conjunto de la partición es adyacente exactamente con todos los vértices del otro conjunto de la partición, entonces decimos que el grafo es *bipartito*. Si p y q son el número de vértices de cada uno de los conjuntos de la partición denotamos a este grafo por $K_{p,q}$.

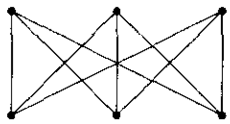
Sean $G = (V, A, \Phi)$ y $G' = (V', A', \Phi')$ dos grafos. Un *homomorfismo* entre ellos $\Omega: G \to G'$ consiste en un par de aplicaciones $\sigma: V \to V'$ y $\tau: A \to A'$ tales que si $\Phi(a) = [v_1, v_2]$, entonces $\Phi'(\tau a) = [\sigma v_1, \sigma v_2]$. Si σ y τ son biyectivas decimos que Ω es un *isomorfismo* y que los grafos G y G' son *isomorfos*. Esencialmente dos grafos son isomorfos si son iguales salvo un cambio de nombre de sus vértices. Así por ejemplo todos los grafos de tipo K_n son isomorfos ente sí y analogamente todos los del tipo $K_{p,q}$.

Dos grafos se dicen que son *homeomorfos* si pueden ser obtenidos a partir de grafos isomorfos añadiendo a sus aristas nuevos vértices de grado dos. Es decir, si son isomorfos salvo vértices de grado dos.

Decimos que un grafo es *plano* cuando puede ser dibujado en el plano de forma que las aristas no presenten intersecciones salvo en sus vértices. Es fácil ver que K_1, K_2, K_3 y K_4 son grafos planos dando una representación de ellos sin intersecciones, sin embargo esto no es posible para K_5 con lo cual K_5 es un grafo no plano. Por otro lado los grafos del tipo $K_{p,q}$ con p o q menor estrictamente que 3 son claramente planos mientras que $K_{3,3}$ no lo es.



K_5



$K_{3,3}$

La importancia de estos grafos es que caracterizan la planaridad de un grafo. El siguiente resultado se debe a Kuratowski.

Teorema 8 *Un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

En este punto es interesante hacer notar que a cada grafo G se le puede asociar un espacio topológico $|G|$, su *realización geométrica*, que es un grafo en el sentido de la definición 4. Así resulta que G es conexo si y sólo si lo es su realización geométrica $|G|$ como espacio topológico, y dos grafos G y G' son homeomorfos si sus realizaciones $|G|$ y $|G'|$ lo son en el sentido topológico. Con este punto de vista la *planaridad* de un grafo es equivalente a que su realización pueda ser encajada en el plano (o en la esfera). Debemos hacer notar también que cualquier grafo puede ser realizado en el espacio de tres dimensiones.

Por un *mapa* entenderemos un dibujo particular de un grafo conexo y plano G en el plano. Un mapa divide el plano en componentes conexas a las que denominamos *regiones*. Decimos que dos regiones son *adyacentes* si tienen una arista en común.

Podemos asociar a cada mapa su *grafo dual* que resulta ser siempre un grafo plano. A cada región del mapa se le asocia un vértice y siempre que dos regiones, no necesariamente distintas, tengan una arista en común unimos los vértices correspondientes por una arista, tantas como aristas en común posean las correspondientes regiones.

Para grafos planos se verifica la famosa formula de Euler para poliedros.

Teorema 9 *Sea G es un grafo plano conexo. Si v, a y r denotan respectivamente el número de vértices, aristas y regiones(incluida la exterior), entonces se cumple:*

$$v - a + r = 2$$

Un *k-coloreado* de un mapa consiste en asociar a cada región del mapa un color de forma que regiones adyacentes no reciban el mismo color y utilizando exactamente k colores. Cuando existe un k-coloreado de un mapa decimos que es *k-coloreable*. Analogamente se puede definir lo que se entiende por un k-coloreado de un grafo. Un k-coloreado de un grafo consiste en, utilizando exactamente k colores, asociar a cada vértice del grafo un color de forma que vértices adyacentes no reciban el mismo color. Cuando existe un k-coloreado de un grafo decimos que es k-coloreable.

En general pueden ser necesarios muchos colores para colorear un cierto grafo. Es claro que para colorear K_n se necesitan n colores.

El problema de k-colorear un mapa es equivalente al de k-colorear su grafo dual en el sentido que uno se puede si y sólo si se puede el otro. La restricción que da el hecho de ser siempre plano el grafo dual de un mapa es un hecho crucial para determinar el número de colores que se necesitan.

5. El problema de los cuatro colores

En sus inicios el *problema de los cuatro colores* aparece como un problema de coloreado de mapas. Como ya hemos dicho se puede asociar a cada mapa un grafo, su grafo dual, y convertir este problema en un problema de grafos. Fue en 1976 cuando Appel y Haken resolvieron el problema utilizando para ello la ayuda de computadoras e introduciendo de esta manera un nuevo sentido en el concepto de demostración matemática. Las raíces de este problema se situan casi un siglo y medio antes.

En 1852 Francis Guthrie que había sido estudiante de De Morgan en Londres escribe a su hermano Frederick, que era en ese momento estudiante de De Morgan, y le dice que está convencido que los países de cualquier mapa pueden ser siempre coloreados con cuatro colores de manera que países vecinos posean diferentes colores y le pregunta si existe alguna manera de probar esto matemáticamente. El término *país vecino* ha de entenderse como países adyacentes a lo largo de una línea fronteriza y no por un punto o una cantidad finita de puntos, ya que de lo contrario es fácil dar ejemplos de que son necesarios más de cuatro colores. Por otro lado el término país hemos de entenderlo como una región conexa del plano, de lo contrario tampoco es dificil ver que existen ejemplos sencillos que necesitarían más de cuatro colores. Desde luego hay mapas que precisan cuatro colores.

Frederick a su vez plantea la pregunta a De Morgan quien fue incapaz de decidir sobre la certeza o falsedad del problema. De Morgan inmediatamente comunica el problema a Hamilton, quien no se interesa mucho por él. De Morgan comunicó el problema a otros matemáticos que empezaron a trabajar sobre él. Charles Peirce en 1860 trató de probar la conjetura y a lo largo de su vida mantuvo un vivo interes por el problema. Arthur Cayley, quién también conocía el problema a través de De Morgan, propuso el problema a la Sociedad Matemática Londinense en 1878 incapaz de decidir si el resultado era cierto o no. Aproximadamente un año después aparece una prueba del teorema que permanecería incuestionable durante más de una década hasta que Heawood, en 1890, muestra que la prueba era incorrecta. Esta primera prueba se debe a Kempe quién utilizó un argumento conocido como *método de las cadenas de Kempe*. Aunque incompleta, la prueba dada por Kempe contiene en esencia las ideas básicas que condujeron un siglo más tarde a la prueba correcta.

La demostración de Kempe hace uso del concepto de mapa normal. Un mapa se dice que es *normal* si ninguna región incluye a otra región y si en cada punto se encuentran exactamente tres regiones. En estos mapas no hay regiones con 1 borde. Si un mapa no es normal podemos modificarlo de forma que se obtenga uno normal que para ser coloreado necesita al menos el mismo número de colores que el primero. Por tanto si existe un mapa que necesita al menos 5 colores debe también existir uno normal que necesite 5. Además, si existe, habrá uno minimal en el sentido del número de regiones. Es decir, uno tal que si eliminamos una de las regiones ya se pueda colorear con sólo 4. De esta forma si probamos que no hay ningún mapa minimal normal que necesite 5 colores habríamos probado la conjetura sobre los cuatro colores. Si llamamos v al número de vértices del mapa, a al número de aristas y r al número de regiones del mapa (incluida la región exterior), la *fórmula de Euler* nos dice que:

$$v - a + r = 2.$$

Por otro lado al ser cada vértice la intersección de tres regiones debe haber tres aristas por cada vértice, pero teniendo en cuenta que en cada arista hay dos vértices se ha de cumplir:

$$3v = 2a.$$

Así sustitiyendo en la fórmula de Euler llegamos a que

$$6r - 2a = 12.$$

Si ahora llamamos p_n al número de regiones con exactamente n bordes, y si N es el mayor número de bordes que aparece, tenemos que el número de caras viene dado por

$$r = p_2 + p_3 + \ldots + p_n,$$

y el número de aristas (contadas dos veces) por

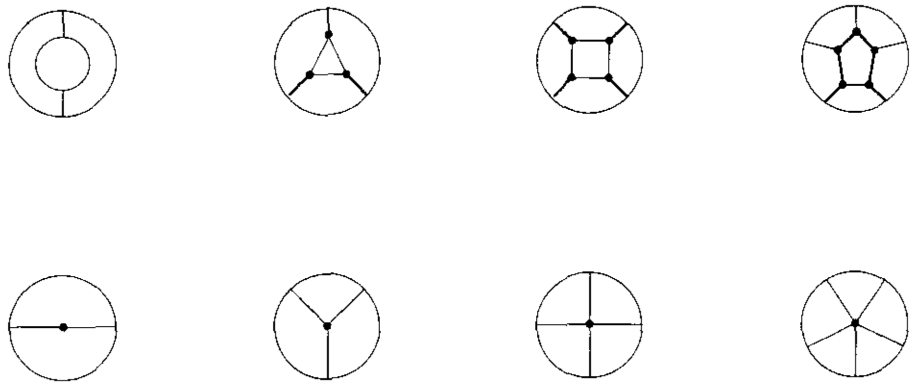
$$2a = 2p_2 + 3p_3 + \ldots + Np_N.$$

Relacionando las tres últimas igualdades obtenidas llegamos a la siguiente igualdad:

$$4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - \ldots - (N - 6)p_N = 12.$$

Como cada p_n es positivo o nulo y teniendo en cuenta el signo con el que aparecen, para que la suma total sea positiva al menos uno de los números p_2, p_3, p_4 o p_5 debe ser positivo. O dicho en otros términos, alguna región debe tener o dos o tres o cuatro o cinco bordes. Es por tanto "inevitable" que alguna de estas configuraciones se de en un mapa normal. Al conjunto formado por una región con dos bordes, una región con tres bordes, una con cuatro y otra con cinco bordes es a lo que llamamos un conjunto de configuraciones inevitables.

Las siguientes serían las cuatro configuraciones inevitables que hemos obtenido junto con sus grafos duales asociados:



El punto crucial en la prueba de Kempe es la afirmación de que ningún mapa minimal normal que necesite cinco colores contiene una de estas configuraciones. Si esto es así la única posibilidad es que no exista tal mapa y estaría probada la conjetura.

Claramente las dos primeras configuraciones no pueden aparecer en un mapa minimal que necesite cinco colores ya que si las eliminamos momentaneamente, por la minimalidad, podríamos cuatro-colorear el resto de regiones y como no más de tres las rodean, si las volvemos a adjuntar aún tendríamos un color libre para ellas. Esto contradiría que el mapa inicial necesitase cinco colores.

Estas configuraciones son "reducibles" en el sentido que no alteran la cuatro-coloreabilidad si se añaden a un mapa. O dicho en otro términos en un mapa que necesite cinco colores y en el que estas configuraciones se presenten se puede reducir el número de países sin que este mapa pierda el caracter de necesitar cinco colores.

El argumento para la región con cuatro bordes hace uso de la siguiente idea. Supongamos que tenemos cuatro colores en el borde de la región, ordenados como $1, 2, 3$ y 4 (sino es así tenemos un color libre y podemos cuatro colorear). Pueden ocurrir dos cosas: o bien 1 y 3 estan conectados por una cadena de países adyacentes alternativamente coloreados $1, 3$ o bien no lo están. Caso de que no lo esten podemos intercambiar 1 por 3 desde el borde coloreado con 1 y de esta forma queda un color libre y podemos cuatro colorear. Así el caso problemático es que si esten conectados de esta forma. Pero en este último caso 2 y 4 no estan conectados y se puede argumentar como antes.

Hasta este punto la demostración dada por Kempe es correcta, pero probó de manera errónea que ningún mapa minimal de cinco colores podía contener la última configuración de cinco bordes con un argumento similar al anterior. Heawood señaló este error indicando que la última configuración no era reducible, y que tal error no parecía fácil de subsanar. Es obvio por el desarrollo dado por Kempe que todo mapa es 6-coloreable. Pero de hecho lo que si se puede demostrar con el método de las cadenas de Kempe, y así lo hizo Heawood, es que cinco colores bastan para colorear cualquier mapa.

Tanto Kempe como Guthrie habían considerado siempre mapas sobre el plano (o equivalentemente sobre una esfera). En una línea de generalización del problema Heawood consideró mapas sobre otras superficies. El estudio hecho por Heawood junto con el trabajo posterior de Ringel y Young permitió establecer el número mínimo de colores para colorear cualquier mapa sobre cualquier superficie, ¡excepto la esfera!. De esta forma el problema de los cuatro colores permanecía abierto y mostraba tener una especial dificultad.

6. La prueba de Appel y Haken

La demostración dada por Kempe podría ser calificada como un intento de hallar un conjunto inevitable de configuraciones irreducibles. Si un tal conjunto existiese la conjetura de los cuatro colores estaría probada, porque ello implicaría que todo mapa contiene una configuración que no puede formar parte de ningún mapa minimal que requiera cinco colores, y de esto se seguiría la inexistencia de un tal mapa.

Esto es exactamente lo que hicieron Appel y Haken, hallar un conjunto inevitable de configuraciones irreducibles, pero con la diferencia que en lugar de las cuatro sencillas configuraciones inevitables de Kempe su conjunto inevitable tenía 1482 configuraciones complejas.

El trabajo de Apple y Haken fue el proceso final de un largo trabajo en el que intervinieron muchos matemáticos.

Birkhoff había mejorado las técnicas de reducción de Kempe y estos resultados se utilizaron para establecer la reductibilidad de muchas y mayores configuraciones que las estudiadas por Kempe. Utilizando esto Franklin probó que la conjetura era cierta para mapas con menos de 22 regiones. Hacia 1950 el mejor resultado que se conocía era que todo mapa con menos de 36 regiones era 4 coloreable.

Heesch describió el mapa mediante su grafo dual, así la condición de normalidad se transformaba en considerar triangulaciones, es decir, grafos cuyas regiones son triángulos. Además por el trabajo de Kempe los vértices del grafo se pueden tomar siempre de grado al menos cinco. En términos de grafos una configuración es una parte de una triangulación formada por un conjunto de vértices más todas las aristas que los conectan. Al ciclo frontera formado por todos los vértices adyacentes a la configuración junto con las aristas que los unen es a lo que se denomina el *anillo de la configuración*. El tamaño del anillo es el número de vértices que tiene. La dificultad para comprobar que una configuración es reducible guarda relación directa con el tamaño del anillo de la configuración.

A partir de los trabajos de Heesch la teoría sobre configuraciones reducibles estaba perfectamente desarrollada, y aunque Appel y Haken perfeccionaron algunos métodos de verificación de reducibilidad, se puede decir que las ideas básicas estaban ya establecidas. Por el contrario el problema de hallar configuraciones inevitables prácticamente no había sido desarrollado.

Al objeto de hallar conjuntos inevitables de configuraciones Heesch había introducido, aunque en forma bastante rudimentaria, el *método de descarga*. Este método es la idea clave en la demostración del teorema de los cuatro colores.

Como ya hemos dicho podemos suponer grafos cuyos vértices tienen todos grado igual o superior a cinco. El método de descarga consiste en asignar a cada vértice un número (la carga) de manera que la suma total de cargas sea 12 y a continuación redistribuirla por alguna regla de forma que la carga total permanezca constante como si de una red eléctrica se tratase. Por el trabajo de Kempe sabemos que esto siempre se puede hacer asignando a cada vértice de grado k la carga $6 - k$. Así los vértices de grado mayor que 6 tienen carga negativa y los de grado 5 son los únicos con carga positiva. Si para un grafo arbitrario se da un proceso de descarga específico es posible hacer una lista finita de todas las configuraciones que tras efectuar el proceso de descarga contiene vértices con carga positiva. Como la carga total es positiva habrá siempre vértices con carga positiva. De esta forma, al estar incluidos en la lista de configuraciones así formada todos los posibles receptores de carga positiva, toda triangulación ha de contener al menos una de estas configuraciones.

Consideremos, por ejemplo, el proceso de descarga que consiste en enviar $1/5$ desde cada vértice de grado cinco hasta sus vértices adyacentes que tengan grado siete o superior. Para que un vértice de grado cinco tenga carga positiva al final del proceso o bien tiene un vértice adyacente de grado cinco, o bien uno de grado seis. Un vértice de grado seis nunca acaba con carga positiva. La única forma en que un vértice de grado siete llegue a tener carga positiva es que tenga al menos seis vértices adyacentes de grado cinco, pero en este caso necesariamente al menos dos de ellos estarán unidos por una arista como en el primer caso. En cuanto a vértices de grado ocho o superior es claro que con este proceso de descarga nunca podran llegar a ser positivos. De esta forma el conjunto inevitable asociado tiene dos configuraciones (no reducibles): un par de vértices de grado cinco unidos por una arista, y un vértice de grado cinco unido por una arista a un vértice de grado seis.

Appel y Haken perfeccionaron los procesos de descarga para conseguir configuraciones que tuvieran un tamaño de anillo razonable al aplicar los algoritmos que daban la reducibilidad. Pensemos que mil configuraciones de anillo 18 hubieran estado fuera del alcance de cualquier comprobación sobre su reductibilidad con el más potente de los ordenadores. Analizaron el problema probabilisticamente y estimaron que era alta la probabilidad de encontrar configuraciones de anillo de tamaño alrededor de 16 que fuesen reducibles. Para esto, en un trabajo de ensayo y error con el ordenador que se prolongó por un periodo de varios años, estudiaron procesos de descarga que evitaban ciertos obstaculos a la reducción y fueron sucesivamente modificando sus diferentes métodos de descarga. En un último paso y con la ayuda de Koch se modificaron y perfeccionaron los métodos para comprobar la reducción del conjunto de configuraciones inevitables que se había obtenido. Consiguieron trabajar con configuraciones de anillo no superior a 14 y comprobar que todas las configuraciones inevitables obtenidas eran reducibles invirtiendo para ello 1200 horas de ordenador. Finalmente en junio de 1976 se había establecido el teorema.

7. Algunos comentarios

Muchas son las anecdotas y hechos curiosos que se pueden dar relacionadas de una u otra forma con el teorema de los cuatro colores. Se cuenta que Minkowski dijo en una ocasión a sus alumnos que el teorema no había sido demostrado porque únicamente matemáticos de tercera fila habían trabajado sobre él. Asimismo afirmó que creía que él era capaz de probarlo. Mucho tiempo más tarde admitió que su prueba también tenía un defecto y dijo que parecía que el cielo estaba enojado con él por su arrogancia.

En 1975, un año antes de la publicación de la prueba por Appel y Haken, Martin Gardner, publicó en la revista Scientific American un artículo en el que mostraba un mapa que, decía Gardner, necesitaba cinco colores para dar una coloración, mostrando con esto que la conjetura sobre los cuatro colores era falsa. Lo cierto es que era uno de Abril y Gardner estaba gastando una (pesada) broma del día de los Santos Inocentes, hecho que traería una cierta polémica en el mundo científico.

El hecho que la prueba de Appel y Haken necesitase para su comprobación el uso de potentes ordenadores durante muchas horas y no fuese posible realizarla manualmente hizo que durante un largo periodo de tiempo no fuese admitida por muchos matemáticos. Muchos trataron de buscar pruebas indirectas y otros pensaron incluso que el resultado podría ser falso y que más tarde o más temprano se encontraría un error en el proceso de demostración. Pensemos que a lo largo de los años importantes matemáticos llegaron a pensar que el resultado era falso y dedicaron mucho tiempo a buscar un contraejemplo. De hecho, la misma técnica de demostración busca obstrucciones a la existencia de tal contrejemplo. Poco a poco el resultado fue admitido y en la actualidad nadie duda de su veracidad. En este sentido es importante señalar que la prueba se simplificó y se redujeron significativamente los casos a estudiar hasta 633. Recientemente Robertson, Sanders, Seymour y Thomas han dado una prueba más simple del teorema, despejando aún más, de esta forma, la sombra de duda que tenía la prueba dada por Appel y Haken.

Pruebas indirectas del teorema se siguen buscando. Citemos como algo curioso y destacable que Luis Lechuga, de la Universidad de Málaga, en su tesis doctoral sobre complejidad algorítmica en homotopía racional relacionaba, en un resultado lateral de la línea de su trabajo, la colorabilidad de un grafo con una propiedad de ciertos modelos minimales. Concretamente a cada natural k y a cada grafo G asociaba un modelo minimal $S_{G,k}$, que es una cierta álgebra graduada diferencial, y demostraba lo siguiente: La k-coloreabilidad del grafo es equivalente a que el modelo $S_{G,k}$

sea elíptico. Aunque queda el problema de ver en el modelo que significa que el grafo sea plano, esta podría ser una línea alternativa para dar una demostración del problema (quizas tan difícil o complicada como la de Appel y Haken, o quizas no) usando técnicas de la teoría de homotopía racional.

Bibliografía

[AH1] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four-colorable I and II*, Illinois J. Math 21, 429-527, 1977.

[AH2] K. Appel and W. Haken, *The solution of the four-color map problem*, Sci. Amer. 237, 108-121, 1977.

[Ga] M. Gardner, *Mathematical games: Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention*, Sci. Amer. 232, 127-131, 1975.

[Gr] R.P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction*, Addison-Wesley, 1994.

[L] L. Lechuga, *Complejidad algorítmica en homotopía racional*, Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, 1998.

[SK] T.L. Saaty and P.C. Kainen, *The four color problem: Assaults and Conquest*, Dover, 1986.

[W] R.J. Wilson, *Introducción a la teoría de grafos*, Alianza Universidad 367, 1983.