Homotopía

por

Marta Macho Stadler

La naturaleza de los espacios topológicos es demasiado abstracta como para probar, en muchos casos, que dos de tales espacios no son homeomorfos. Por ello, una técnica utilizada es la de, dado un espacio topológico X, asociarle un objeto algebraico $H(X)$, de modo que a cualquier espacio Y homeomorfo a X le corresponda, por el mismo procedimiento, un objeto algebraico $H(Y)$ isomorfo a $H(X)$, es decir, $H(.)$ es lo que se llama un *invariante topológico.* Estos objetos algebraicos permiten detectar cuándo dos espacios topológicos no son homeomorfos: si los invariantes asociados a uno y al otro no son isomorfos. ¿Por qué utilizar herramientas algebraicas, en vez de recursos puramente topológicos? Porque estos objetos algebraicos "invariantes" asociados son más fáciles de identificar y manipular que sus correspondientes topológicos.

En estas líneas se da una idea intuitiva del invariante topológico más conocido, la Homotopía, y se describen sus aplicaciones más inmediatas. No se va a probar nada, únicamente, en algunos casos, se esboza (gráficamente) la línea general de la prueba.

¿Qué estudia la Topología?

El problema central de la Topología es el de decidir si dos espacios son o no homeomorfos. No es demasiado complicado probar que dos espacios son equivalentes topológicamente, mucho más difícil es decidir cuándo no lo son...

Con las herramientas de un curso básico de Topología General, no es posible solucionar los siguientes problemas topológicos:

- **Problema 1.-** Las siguientes 2-variedades compactas y conexas, no son homeomorfas: la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$ y la superficie compacta de género dos $\mathbb{T}_2$. ¿Por qué?

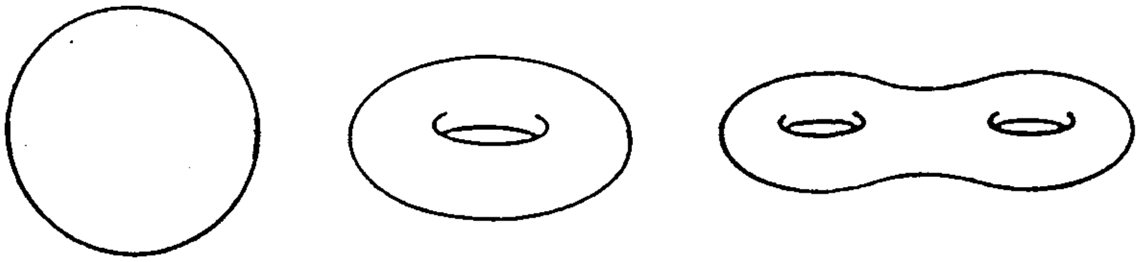

Figure 2.1: La esfera, el toro y la superficie compacta de género 2

- **Problema 2.-** Las siguientes 2-variedades conexas y no compactas, no son homeomorfas: el plano $\mathbb{R}^2$ y el plano privado de un punto $\mathbb{R}^2 - \{p\}$. ¿Cuál es la razón?

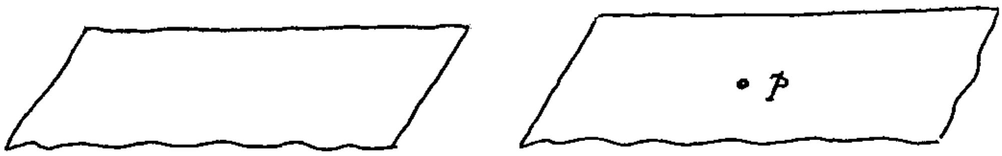

Figure 2.2: El plano y el plano "agujereado"

Nuestro objetivo es probar el porqué de estas "no equivalencias topológicas".

Homotopía de aplicaciones

El concepto central de esta teoría es el siguiente:

Definición 2.1 Sean X e Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f, g \colon X \to Y$ dos aplicaciones continuas, tales que $f|_A = g|_A$. f y g son *homótopas relativamente a* A, si existe $H \colon X \times [0,1] \to Y$ continua, tal que:

(i) $\forall x \in X$, $H(x,0) = f(x)$;

(ii) $\forall x \in X$, $H(x,1) = g(x)$;

(iii) $\forall x \in A$ y $t \in [0,1]$, $H(x,t) = f(x) = g(x)$.

Se escribe $H : f \simeq g$ (rel A). En el caso en que $A = \emptyset$, se escribe simplemente $H : f \simeq g$, y se dice que f y g son *homótopas.*

¿Cuál es el significado geométrico de esta noción? Si $t \in [0,1]$ y si se define la aplicación $h_t \colon X \to Y$ por $h_t(x) = H(x,t)$, resulta que $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ es una familia uniparamétrica de funciones continuas "deformando" $h_0 = f$ en $h_1 = g$, de manera continua. h_t se puede interpretar como la deformación en el instante t.

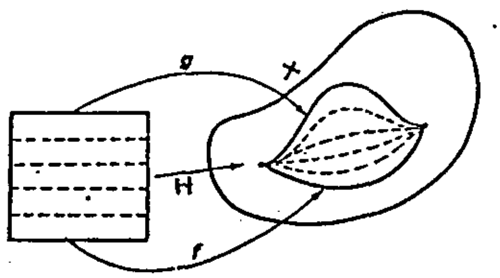

Figure 2.3: Homotopía de aplicaciones

Las propiedades más importantes de este concepto se pueden resumir en:

Teorema 2.2 *La homotopía (rel A) es una relación de equivalencia sobre la familia de las aplicaciones continuas de X en Y, $C(X,Y)$.*

Proposición 2.3 *La homotopía preserva la composición de funciones.*

Además, existen homotopías "inversibles", en el siguiente sentido:

Definición 2.4 $f\colon X \to Y$ es una *equivalencia de homotopía*, si existe $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Se dice entonces que los espacios X e Y son *homotópicamente equivalentes.*

La homotopía es un invariante topológico:

Proposición 2.5 *Dos espacios homeomorfos son homotópicamente equivalentes.*

El recíproco no es cierto: veremos más adelante que $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ son homotópicamente equivalentes, pero obviamente no son homeomorfos, al ser el primero compacto y el segundo no!

La homotopía se usa en muchas ocasiones en "sentido negativo", es decir, no para decidir si dos espacios son homeomorfos, sino para distinguir cuándo no lo son, utilizando la proposición 2.5.

Los espacios contráctiles son especialmente "buenos" entre los espacios topológicos:

Definición 2.6 X es *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un punto (en particular, X es conexo por caminos).

Ejemplos 2.7 Algunos ejemplos de espacios contráctiles son los siguientes:

(i) $\mathbb{R}$ es contráctil: las equivalencias de homotopía que definen esta propiedad son la aplicación constante $f = c_0\colon \mathbb{R} \to \{0\}$ y la inclusión natural $g\colon \{0\} \to \mathbb{R}$;

(ii) cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contráctil.

La forma más natural de construir espacios homotópicamente equivalentes a uno dado X, es a través de la siguiente construcción:

Definición 2.8 Si $A \subset X$ y $i_A\colon A \to X$ es la inclusión, A es un *retracto por deformación* de X, si existe una aplicación $r\colon X \to A$ continua, tal que $r \circ i_A = 1_A$ (es decir, A es un retracto topológico de X) e $i_A \circ r \simeq 1_X$.

Puede probarse de manera sencilla la siguiente propiedad:

Proposición 2.9 *Si A es un retracto por deformación de X, entonces A es homotópicamente equivalente a X.*

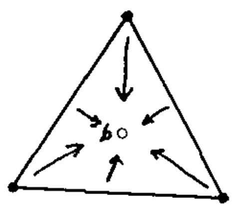

Figure 2.4: Un convexo en el plano

La proposición 2.9 permite, en algunas ocasiones, reemplazar algunos espacios "complicados" por subespacios adecuados, más sencillos de manipular.

Hay también una estrecha relación entre la contractibilidad y los retractos por deformación, en el siguiente sentido:

Lema 2.10 *X es contráctil si y sólo si existe un punto $a \in X$ tal que $\{a\}$ es un retracto por deformación de X.*

Ejemplos 2.11 Para clarificar aún más esta noción, veamos algunos ejemplos:

(i) $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$;

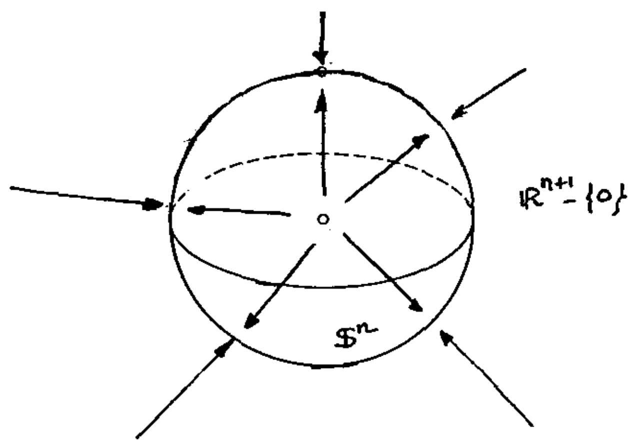

Figure 2.5: Retracción sobre la esfera

(ii) el ecuador de $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación de $\mathbb{S}^n - \{N, S\}$, donde N y S son el polo norte y sur, respectivamente;

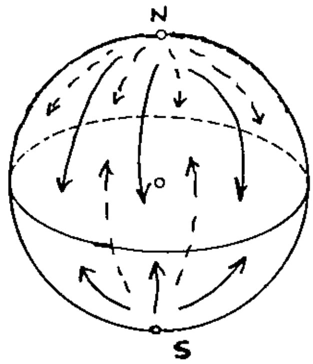

Figure 2.6: Retracción sobre el ecuador de la esfera

(iii) el disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^n$;

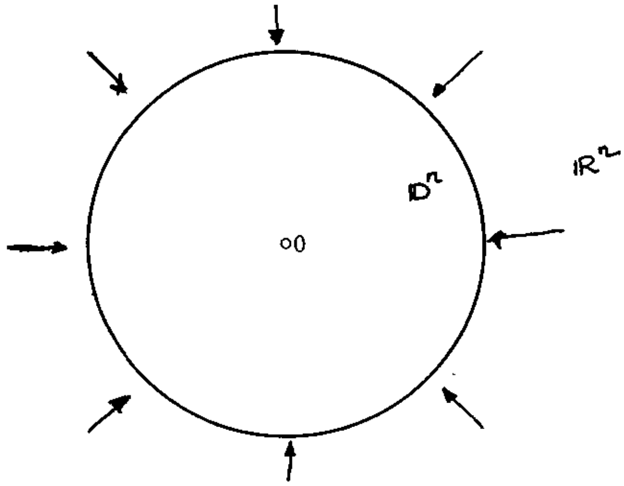

Figure 2.7: Retracción sobre el disco

(iv) el ecuador (que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$) de la banda de Möbius $\mathbb{M}$, es un retracto por deformación de $\mathbb{M}$;

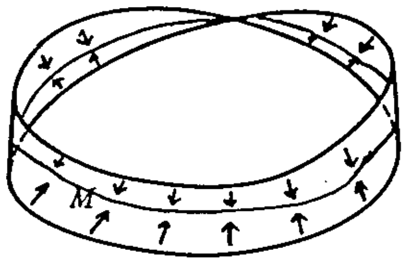

Figure 2.8: Retracción sobre el ecuador de la banda

(v) $\mathbb{S}^1$ (que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$) es un retracto por deformación del cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$;

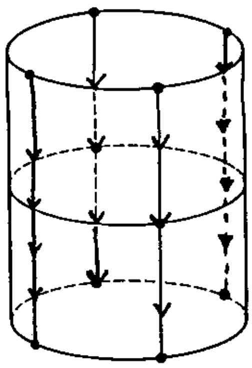

Figure 2.9: Retracción sobre la esfera

(vi) si X es el toro $\mathbb{T}^2$ privado de un punto, existe un subconjunto de X, que es homeomorfo a la figura de ocho y un retracto por deformación de X.

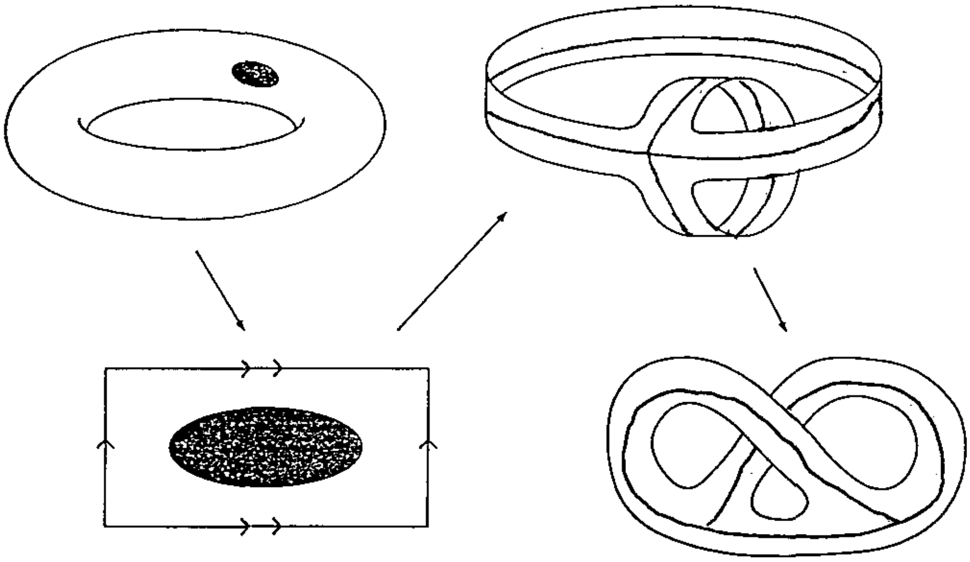

Figure 2.10: Retracción sobre el ocho

El grupo fundamental

Se trata de asociar un grupo topológicamente invariante (relacionado con la noción de homotopía) a un espacio dado.

Ejemplo 2.12 Imaginemos un disco $\mathbb{D}^2$ y una corona circular sobre el plano. ¿Es posible detectar el "agujero" de la corona, sin utilizar para ello nociones como la distancia, ángulos, etc?

Vamos a ver que sí, y para ello introducimos una nueva noción:

Definición 2.13 Dos caminos $\sigma, \tau \colon [0,1] \longrightarrow X$ se dicen *equivalentes*, si son homó- topos relativamente a sus extremos, y se denota por $\sigma \sim \tau$.

Al menos intuitivamente, σ y τ son equivalentes sobre el disco, pero no sobre la corona circular!

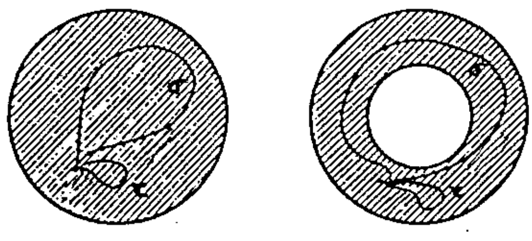

Figure 2.11: El disco y la corona circular

Definición 2.14 Se definen los siguientes conceptos asociados a caminos en un espacio:

(i) si σ_1 y σ_2 son caminos en X tales que $\sigma_1(1) = \sigma_2(0)$, se define su *producto* por:

$$\sigma_2 * \sigma_1 = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(ii) si σ es un camino en X, se define el camino *inverso* por $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$.

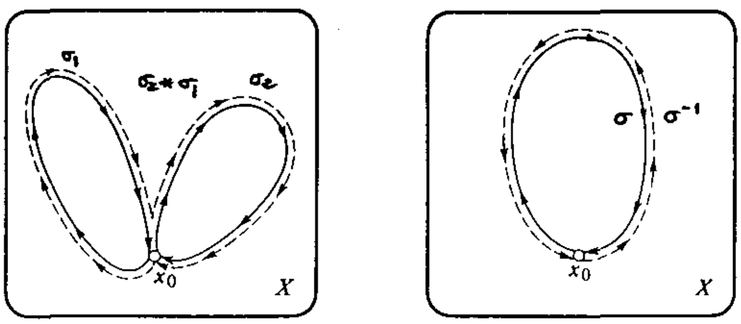

Figure 2.12: Producto e inversión de caminos

La "equivalencia de caminos" es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los caminos cerrados basados en x, $\Omega(X,x)$. Sobre el conjunto cociente, se pueden definir las siguientes operaciones:

(i) el producto de clases de caminos $[\sigma_1].[\sigma_2] = [\sigma_2 * \sigma_1]$,

(ii) la inversión de clases de caminos $[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}]$, y

(iii) la clase $[c_x]$ (donde c_x es el camino constante igual a x), actúa como neutro para el producto arriba definido;

y se obtiene así una estructura de grupo sobre $\pi_1(X,x) = \Omega(X,x)/\sim$, que llamaremos a partir de ahora el *grupo fundamental o de Poincaré* de X basado en el punto x.

Una pregunta que uno se plantea inmediatamente es la siguiente: ¿por qué se ha pasado a clases de caminos en vez de trabajar con caminos sobre el espacio directamente? La respuesta es sencilla, el producto de caminos no es asociativo, no es cierto que el camino constante c_x actúe como neutro en $\Omega(X,x)$, y finalmente tampoco se verifica que el producto de un camino en $\Omega(X,x)$ por su inverso sea c_x ... así que con las operaciones sobre el espacio, estamos muy lejos de obtener operaciones de grupo, pero no es así al pasar el cociente!

Algunas propiedades importantes del grupo fundamental son las siguientes:

Proposición 2.15 *Si X es conexo por caminos, $\pi_1(X,x)$ es independiente del punto base y se denota $\pi_1(X)$.*

Proposición 2.16 *Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces los grupos fundamentales $\pi_1(X,x)$ y $\pi_1(Y,f(x))$ son isomorfos.*

Esta propiedad, como la de la equivalencia de homotopía, se utiliza de nuevo en "sentido negativo", es decir, para distinguir espacios no homeomorfos, como aquellos que tienen grupos fundamentales no isomorfos.

Pero, se verifica una propiedad aún más fuerte que la anterior:

Proposición 2.17 *Si $f\colon X \to Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces $\pi_1(X,x)$ y $\pi_1(Y,f(x))$ son grupos isomorfos.*

Y por consiguiente, obtenemos dos propiedades fundamentales en toda esta teoría:

Corolario 2.18 *Dos espacios conexos por caminos y homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos.*

Corolario 2.19 *Los espacios contráctiles tienen grupo fundamental trivial.*

A este tipo de espacios, se les denomina de una forma especial:

Definición 2.20 Si es X conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial, se llama *simplemente conexo.*

Es decir, los espacios contráctiles son simplemente conexos.

El primer ejemplo importante, es el cálculo del grupo fundamental de la esfera $\mathbb{S}^1$. Para probar el resultado que sigue, se utiliza como herramienta principal el llamado *grado de un camino cerrado.*

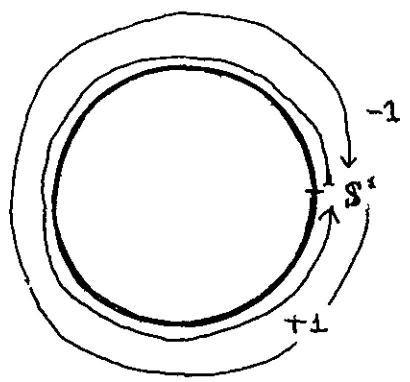

Figure 2.13: Grado de un camino cerrado

Intuitivamente, hay tantas clases de caminos en $\mathbb{S}^1$, como número de vueltas que se pueden dar a lo largo de la esfera (hay vueltas negativas!)

Proposición 2.21 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

La proposición 2.21 prueba, en particular, que $\mathbb{S}^1$ no es simplemente conexa!

Ya estamos en condiciones de solucionar el:

Problema 2: *El plano y el plano privado de un punto no son homeomorfos.*

Demostración: En efecto, $\mathbb{R}^2$ es contráctil. Por otro lado, $\mathbb{S}^1$ es claramente un retracto por deformación de $\mathbb{R}^2 - \{p\}$, luego por la proposición 2.9, $\mathbb{R}^2 - \{p\}$ y $\mathbb{S}^1$ tienen el mismo tipo de homotopía. Aplicando ahora la proposición 2.17, ambos espacios tienen grupos fundamentales isomorfos, y finalmente, por la proposición 2.21, se concluye que $\mathbb{R}^2 - \{p\}$ no puede ser contráctil. ∎

Respecto a productos, se prueba fácilmente:

Proposición 2.22 *El grupo* $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ *es isomorfo a* $\pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y)$.

Y utilizando entonces las proposiciones 2.21 y 2.22, se deduce que:

Ejemplo 2.23 $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

En la gráfica se indican los dos generadores de este grupo sobre el toro.

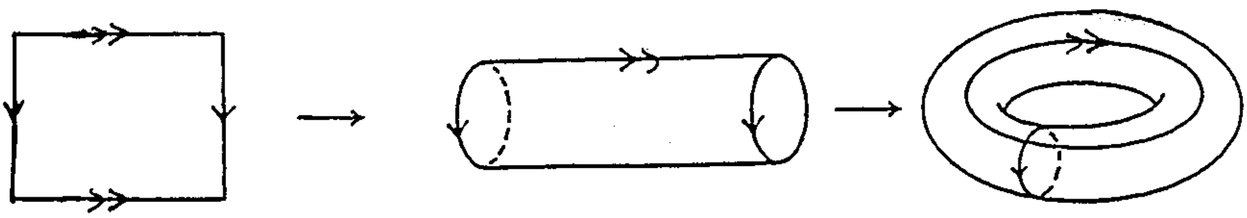

Figure 2.14: El toro y sus generadores

Una de las herramientas clave para calcular grupos fundamentales es el si- guiente resultado:

Teorema 2.24 (de Seifert-Van Kampen) *Sea* $X = U \cup V$, *donde* U *y* V *son abiertos conexos y* $U \cap V$ *es conexo por caminos. Entonces, si* $x \in U \cap V$, $\pi_1(X, x)$ *está generado por* $\pi_1(U, x)$ *y* $\pi_1(V, x)$.

Corolario 2.25 *En las condiciones anteriores, si* U *y* V *son simplemente conexos y* $U \cap V$ *es conexo por caminos, entonces* X *es simplemente conexo.*

Aunque el resultado parece simple, "está generado" significa que $\pi_1(X, x)$ es lo que se denomina la *suma amalgamada* de los grupos $\pi_1(U, x)$ y $\pi_1(V, x)$ por $\pi_1(U \cap V, x)$. Intuitivamente, hay clases caminos en $U \cap V$ que se cuentan dos veces, una vez pensados como caminos en U y otra como viviendo en V, y ese "doble contaje" debe eliminarse.

Damos a continuación unos cuantos ejemplos de aplicación de este teorema, y se indica gráficamente cómo han sido los pasos realizados:

(i) $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa, para $n > 1$.

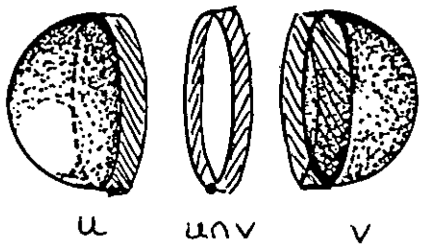

Figure 2.15: Grupo fundamental de la esfera

Puede probarse que, para $n > 1$, $\mathbb{S}^n$ no es contráctil, pero no a través de herramientas homotópicas. Se precisan técnicas de Homología.

(ii) $\pi_1(8)$ es el grupo libre (no abeliano) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

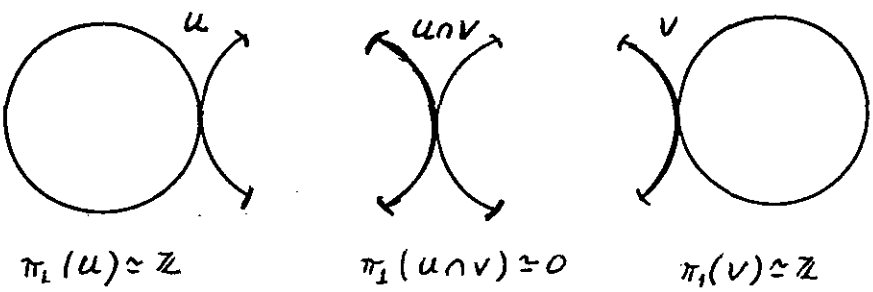

Figure 2.16: Grupo fundamental del ocho

De estos resultados se obtiene ahora la solución al:

Problema 1: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ *y la superficie compacta de género dos* $\mathbb{T}_2$ *no son homeomorfas.*

Demostración: En efecto, $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexa. Conocemos también el grupo fundamental de $\mathbb{T}^2$, que es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Y el teorema de Seifert-Van Kampen, garantiza que:

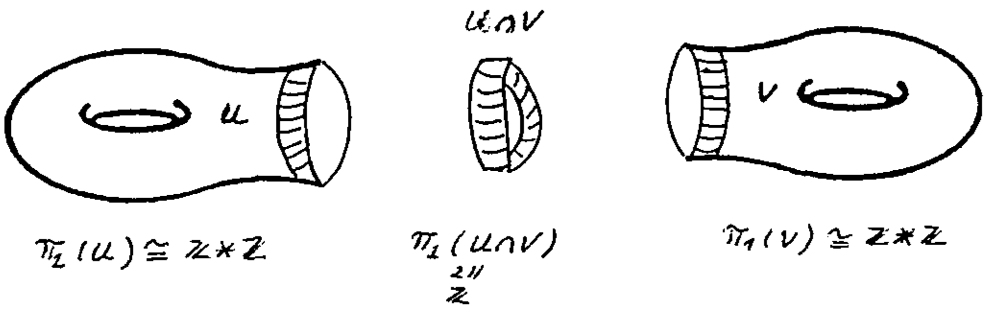

Figure 2.17: Grupo fundamental de la superficie compacta de género dos

es decir, como $\pi_1(U) \simeq \pi_1(8) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \pi_1(V)$ (recordar que 8 y el toro privado de un punto son homotópicamente equivalentes) y $\pi_1(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$ ($U \cap V$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^1$), entonces $\pi_1(\mathbb{T}_2)$ es la suma amalgamada $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$, que no es isomorfa a ninguno de los dos grupos anteriores. ∎

Otras aplicaciones de la homotopía

Como consecuencia de las propiedades que acabamos de citar, se obtienen resultados bien conocidos de Topología:

Teorema del punto fijo de Brouwer: *toda aplicación* $f\colon \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ *admite un punto fijo.*

Teorema de Borsuk-Ulam: *para cada aplicación* $f\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *existen puntos antipodales* x *y* $-x$ *donde* $f(x) = f(-x)$.

una interpretación geométrica es que, en cada instante, existen sobre la tierra dos puntos antipodales en los que la temperatura, la velocidad del viento y la presión atmosférica coinciden!

Teorema del pastel: *dados U y V dos abiertos conexos y acotados de $\mathbb{R}^2$, existe una recta que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas de misma área.*

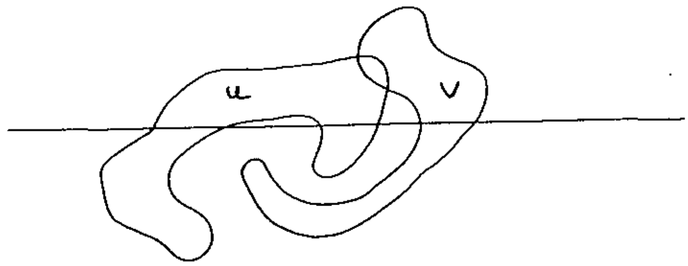

Figure 2.18: Problema del pastel

es decir, es posible dividir cualquier pastel, por muy sofisticada que sea su forma, equitativamente entre dos comensales hambrientos!

Teorema del bocadillo de jamón: *dados U, V y W abiertos conexos y acotados de $\mathbb{R}^3$, existe un plano que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas del mismo volumen.*

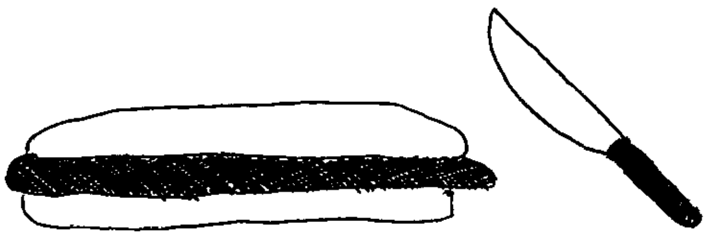

Figure 2.19: El bocadillo de jamón

es decir, es posible dividir un bocadillo de jamón en dos trozos iguales, independientemente del tamaño de las dos piezas de pan y del trozo de jamón, y de su posición relativa.

Teorema de la bola peluda: *todo campo de vectores tangente a $\mathbb{S}^2$ posee un punto singular.*

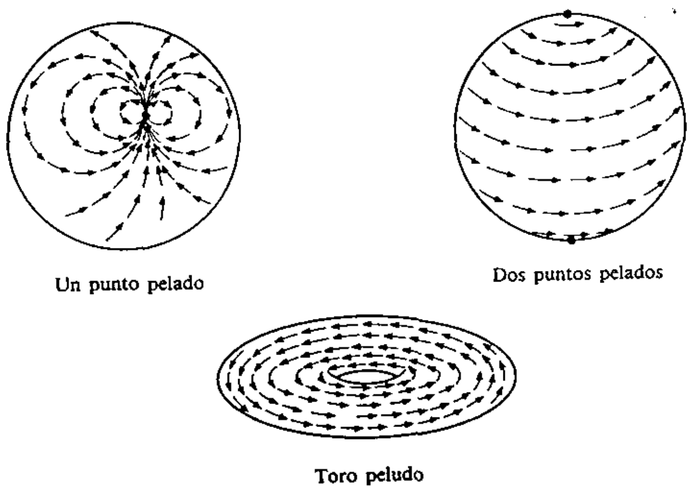

Figure 2.20: Bola peluda

es decir, es imposible peinar "suavemente" una bola peluda: la superficie de la tierra es una esfera. La dirección en que los vientos soplan sobre su superficie en un momento específico de tiempo da una manera de "peinar" esta esfera. El teorema dice que no existe un sistema suave de vientos, con lo que, en cada instante, hay un ciclón en algun lugar de la superficie terrestre. Así, el conocimiento de la forma de la Tierra nos permite obtener conclusiones sobre el comportamiento de los vientos, sin ninguna información previa sobre el verdadero comportamiento de éstos. Sobre un planeta toroidal, sin embargo, podrían existir sistemas estables de vientos, porque un toro peludo si puede peinarse de manera suave.

Teorema de la curva de Jordan: *si γ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ y $\Gamma = Im(\gamma)$, entonces $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ tiene dos componentes conexas.*

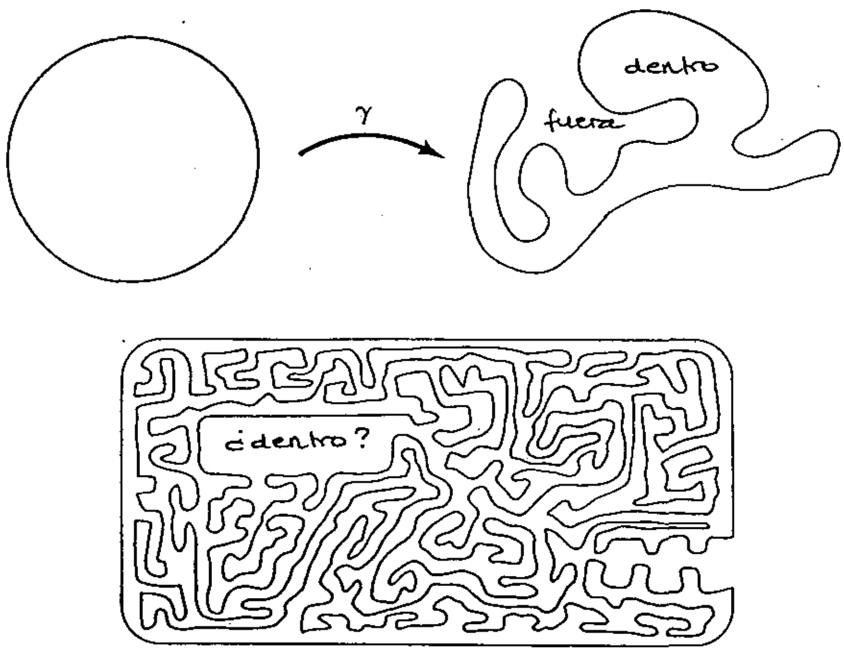

Figure 2.21: ¿qué es “dentro”? ¿qué es “fuera”?

Bibliografía

[Ar] M.A. Armstrong, *Topología básica*, Reverté, 1987.

[Br] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

[GH] M.J. Greenberg y J. Harper, *Algebraic topology: a first course*, Addison Wesley, 1981.

[Ko] C. Kosniowski, *Topología algebraica*, Reverté, 1985.

[Lim] E.L. Lima, *Grupo fundamental e espaços do recobrimiento*, Projeto Euclides (IMPA), 1993.

[Mas] W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.

[Mu] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[Nak] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IOP Publ., 1990.

[NS] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*, Academic Press, 1983.

[Ro] J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[ST] I.M. Singer and J.A. Thorpe, *Lecture Notes on elementary topology and geometry*, Springer, 1976.

[V] J.W. Vick, *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, Springer, 1994.

[Wa] A.H. Wallace, *An introduction to algebraic topology*, Pergamon Press, 1957.