PAPIROFLEXIA: UNA HERRAMIENTA PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

La papiroflexia es una tradición nacida en oriente a principios de nuestra Era que estaba reservada originalmente a la nobleza y a los samurais japoneses.

Después de una difusión lenta y gracias a los contactos comerciales, fue introducida en Europa y posteriormente en América, tomando un nuevo impulso en el siglo XIX.

Si queremos hablar de una clasificación del origami podemos considerar varios aspectos: la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas.

Actualmente se ha comenzado a estudiar más sistemáticamente la papiroflexia como medio de representación de objetos matemáticos, particularmente, objetos geométricos. Por ejemplo se ha estudiado la relación entre la papiroflexia y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas (estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller); se han formulado listas de axiomas para la papiroflexia; el físico Jun Maekawa ha descubierto teoremas relacionados con la papiroflexia, usándolos para diseñar modelos; el matemático Toshikazu Kawasaki ha estudiado teoremas de la papiroflexia en cuatro dimensiones; Robert Lang de California ha desarrollado una manera de algoritmizar el proceso de diseño para usar una computadora en la invención de modelos complejos; el educador Shuzo Fujimoto y el artista Chris Palmer han descubierto paralelismo entre la papiroflexia y los teselados; Peter Engel ha relacionado la papiroflexia, incluso el artístico, y la teoría del caos (en particular con los fractales); el matemático Roger Alperin ha establecido una relación entre las construcciones de lpapiroflexia y los números (llamados "números construibles").

La papiroflexia ayuda y realiza conexiones con otras asignaturas, pero su mayor contacto es con la geometría como se ha indicado en el párrafo anterior. Si se emplea un método con poca manipulación de objetos y procesos matemáticos, no se puede lograr el objetivo de que el niño aprenda correctamente la figura y el concepto; si se le enseña al estudiante sólo a memorizar, los efectos de la enseñanza memorística y repetitiva en los primeros niveles y sus consecuencias serían la adquisición de conceptos limitados o erróneos y el desinterés de los estudiantes a mediano y largo plazo.

Según Clements y Sarama, dos investigadores que desarrollan aplicaciones computacionales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría y el temprano desarrollo de ideas matemáticas, niñas y niños pasan por varias etapas en su conocimiento de las figuras geométricas. En el primer estadio, el precognitivo, niños y niñas perciben las formas pero son incapaces de distinguirlas y clasificarlas. En el siguiente, la etapa visual, son capaces de identificarlas de acuerdo a su apariencia. Por ejemplo identifican un rectángulo, "... porque se parece a una ventana". No es sino hasta después, en la etapa descriptiva, en la que aprenden a reconocer y caracterizar las formas, basándose en sus propiedades. Es entonces, una vez asimilados los conceptos y no solo repitiendo una serie de palabras, cuando reconocen y describen conscientemente un rectángulo, como una forma que tiene dos lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Se puede alcanzar este nivel de pensamiento en los años escolares intermedios, pero algunos no lo logran hasta mucho después y otros nunca lo adquieren. Esto depende mucho del tipo de enseñanza que han recibido y de sus otras experiencias y aprendizajes obtenidos fuera del aula.

Para impulsar el aprendizaje, las corrientes pedagógicas avanzadas sugieren técnicas de trabajo complementarias, como las siguientes:

El acercamiento a los temas desde diferentes disciplinas.

La manipulación y transformación física y virtual de objetos.

El establecimiento de conexiones entre el conocimiento previo, los nuevos conceptos y la vida diaria de los estudiantes.

El trabajo en grupos que promueva, el debate de ideas, la clarificación de conceptos, el desarrollo de estrategias individuales y colectivas, y la presentación de resultados ante sus compañeros.

La repetida práctica de solución de problemas (en diferentes escenarios), en los que se utilicen destrezas, conceptos o procesos matemáticos.

La meta final de la educación debe ser siempre el impulsar el crecimiento del conocimiento en todos los alumnos, aunque haya grandes diferencias entre los estudiantes en un mismo aula, y la paulatina autonomía de los alumnos ante el mundo, un requerimiento básico de la era de la información: ser aprendices continuos.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto anteriormente es bastante claro el importante papel que puede tener la papiroflexia en la enseñanza de las matemáticas, podemos resumir sus ventajas en el aula con la siguiente enumeración:

Ventajas en la educación:

Utiliza materiales y herramientas relativamente baratas y al alcance de la mayoría.

Proporciona un medio para la manipulación manual de los objetos geométricos.

Permite un acercamiento a la geometría del espacio (poliedros).

Los procesos de construcción son lógicos, eficientes y económicos.

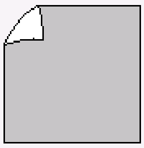
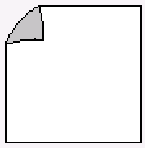
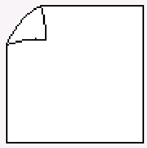
Pero la papiroflexia es un medio, no un fin y cuando se utiliza en el estudio de las matemáticas es importante cuestionarse, estudiar propiedades, observar, analizar y conjeturar, a partir de la manipulación del papel

Objetivo del taller

El objetivo del taller es proporcionar a los docentes una herramienta didáctica para el estudio de la Geometría, particularmente de los polígonos, de una manera accesible y amena, lo cual permite abordar este tema que rara vez se toca en los niveles de secundaria y bachillerato. Introduciremos también algunos modelos en tres dimensiones realizados a partir de los polígonos previamente construidos

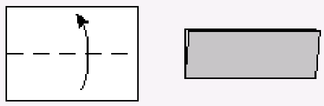
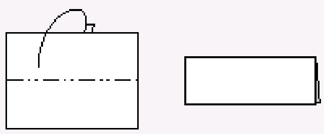
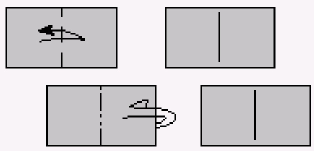
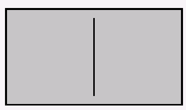
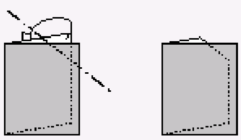
SÍMBOLOS BÁSICOS EN PAPIROFLEXIA

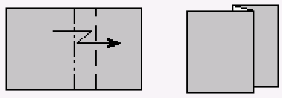
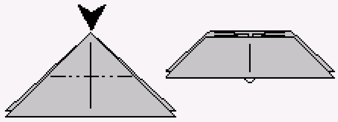
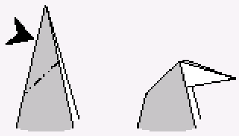
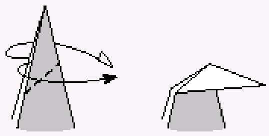
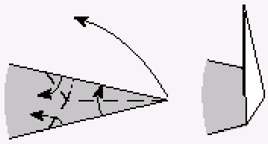
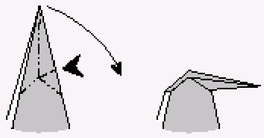
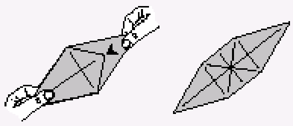
Posición del papel:

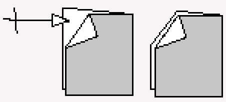
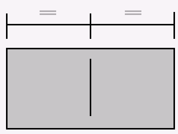
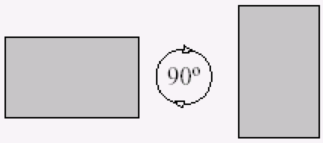
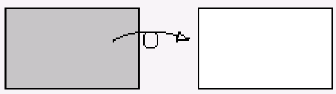
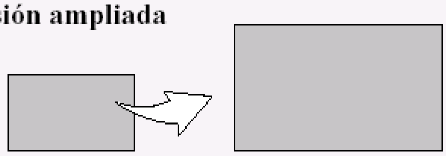
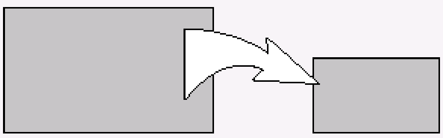
Color arriba.	Color abajo.	Papel de un solo color.
		

Pliegues y líneas básicas:

Todos los pliegues tienen una representación gráfica que esta compuesta por un tipo de línea y una flecha asociada a ella, así que simplemente viendo el tipo de flecha o de línea sabremos como debemos doblar.
Esto puede ser muy útil en aquellas zonas del libro donde por su pequeño tamaño no se sepa con seguridad si la línea que aparece es valle o montaña.

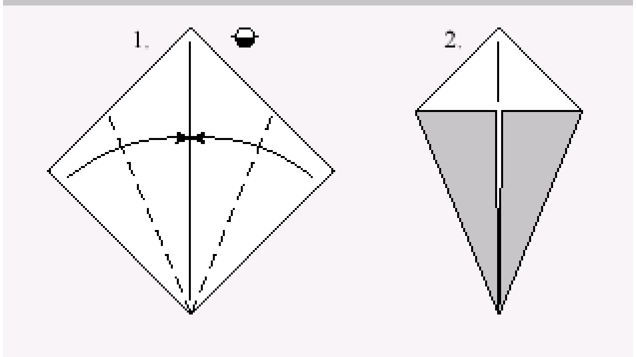
Tipo de línea.	*Proceso de plegado.*	*Explicación.*
Pliegue valle.		Consiste en doblar hacia delante, llevando un lado del papel sobre el otro.
Pliegue Monte.		Consiste en doblar hacia atrás, llevando un lado del papel sobre el otro.
Plegar y desplegar. ó		Esto en realidad no es un pliegue, son dos que se hacen uno tras otro. Consiste en doblar, bien sea en monte o en valle y acontinuación desdoblar. El resultado que queda es una marca.
Marca.		Las marcas son siempre el resultado de plegar y desplegar algo.
Rayos X.		Este tipo de línea, puede representar pliegues que se están haciendo en alguna capa de nuestro modelo que no podemos ver o bien marcarnos alguna línea del borde de la figura que está oculta.

Pliegues compuestos:		
Pliegue escalonado. y		Consiste en un pliegue valle inmediatamente seguido por otro en monte. Su flecha asociada es quebrada y apunta en la dirección del valle.
Pliegue hundido.		Es una forma de invertir una punta, de forma que al terminar el hundido el modelo quede totalmente plano.
Pliegue hendido.		Es un pliegue muy similar al hundido, que generalmente se hace en las puntas para cambiarles la dirección.
Pliegue Vuelto.		Como en el caso anterior este proceso permite cambiear la dirección a una punta, pero en vez de doblar hacia el interior, se hace al exterior.
Pliegue en oreja de conejo.		Es un sistema sencillo para "adelgazar" una punta y al mismo tiempo cambiarla de dirección.
Doble oreja de conejo.		Consiste en dos orejas de conejo que se hacen al mismmo tiempo por cada lado de la punta.
Estirar.		Se coge el modelo por donde indican las manos y se estira hasta obtener el resultado mostrado en el siguiente paso.

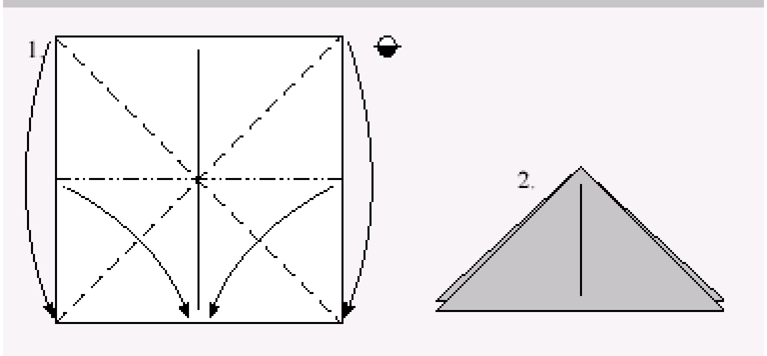
Otros Símbolos importantes:	
Repetir tantas veces como rayas tenga la flecha. 	**Partes iguales.** 
Girar. 	**Volver el modelo.** 
Visión ampliada 	**Visión disminuida** 

BASES

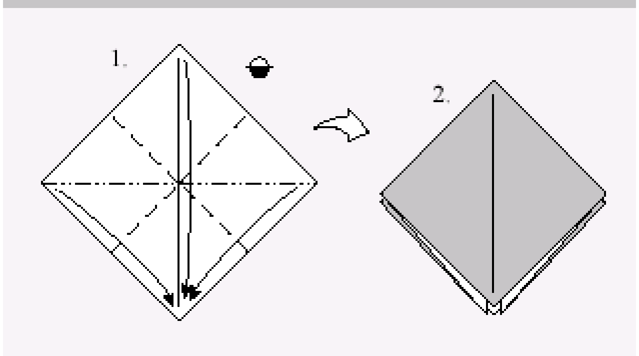
Base Cometa:



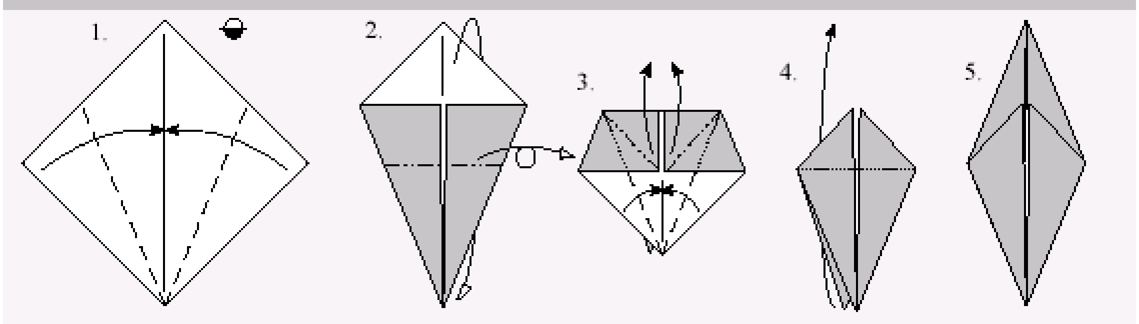
Base Bomba:



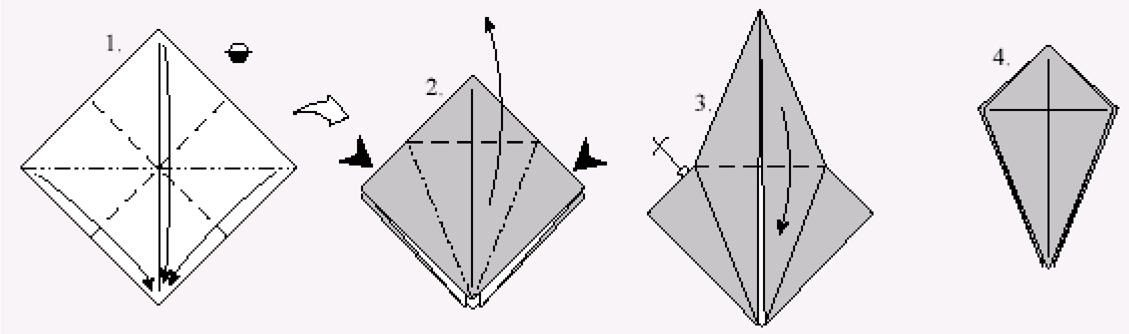
Base Preliminar:



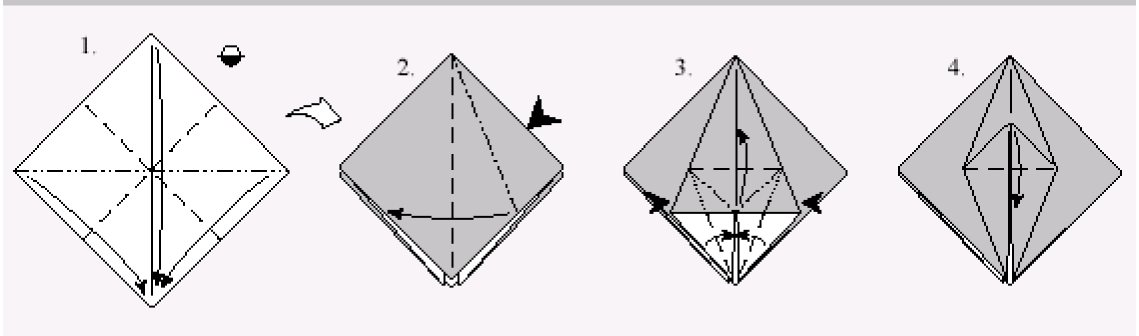
Base Pez:

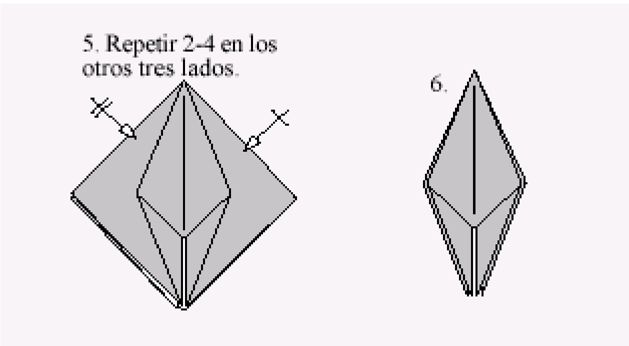


Base Pájaro:

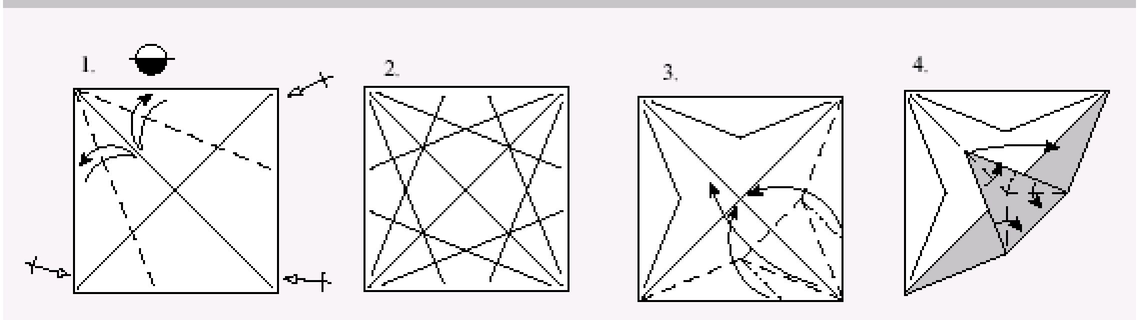


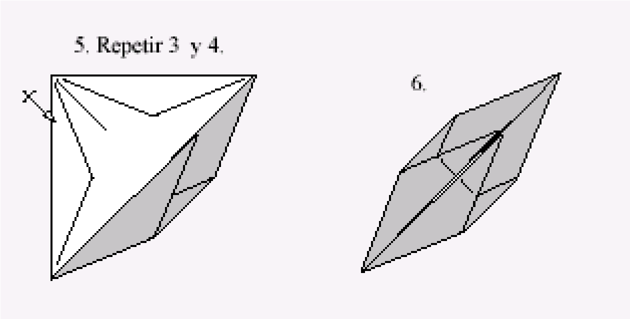
Base Rana:



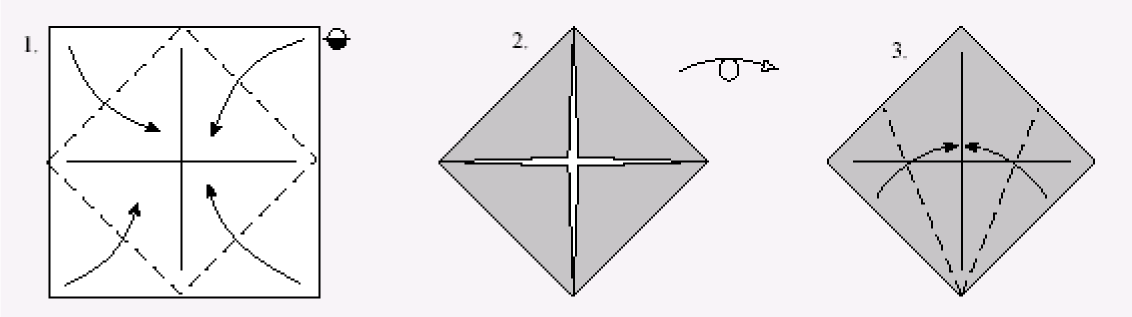


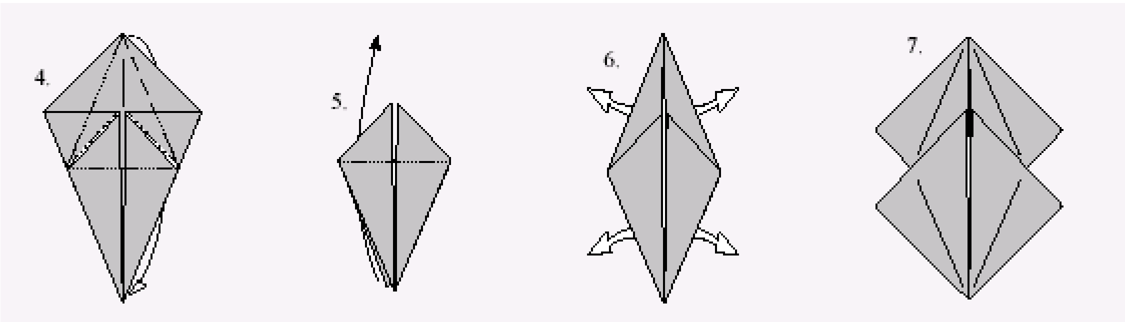
Base Pájaro estirada:



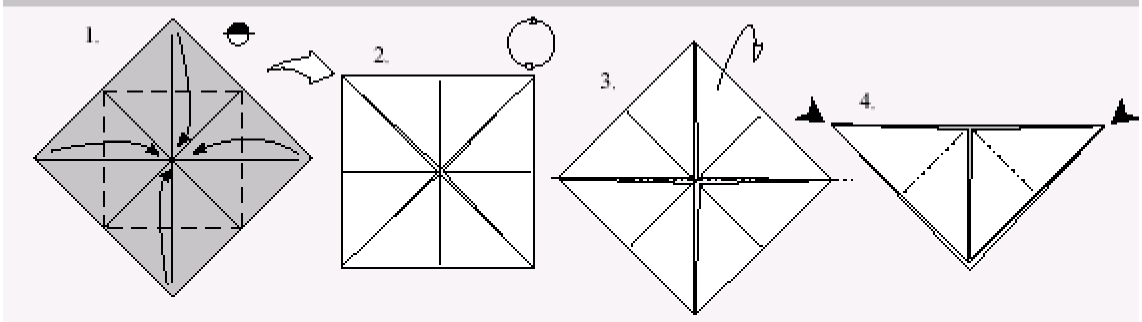


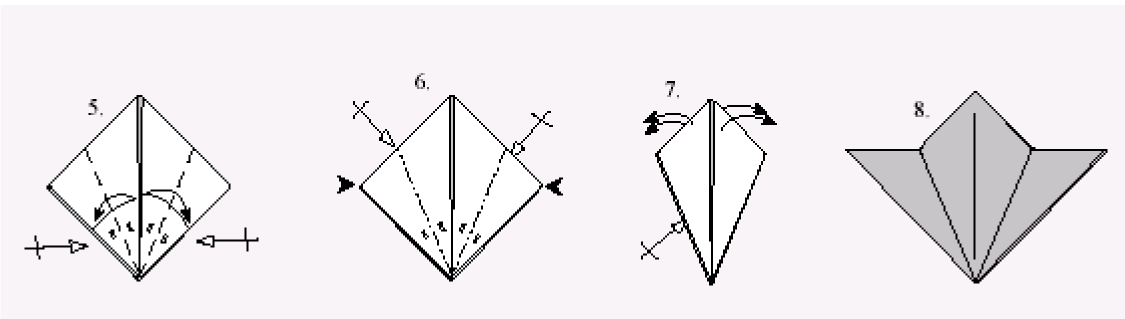
Base Blintz Pez:



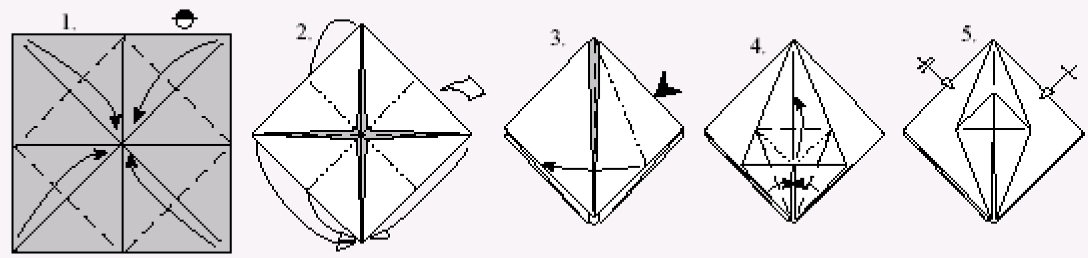


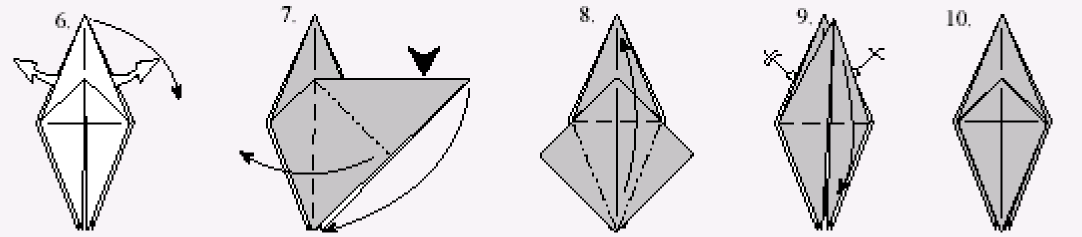
Base Blintz Pájaro:





Base Blintz Rana:





Desarrollo del taller

RECTÁNGULO FORMATO A

Este formato de papel nació en Alemania en 1922. De ahí su nombre más común de "DIN", por las siglas de Deutsches Institut für Normung (Instituto de Normalización Alemán).

Los formatos conocidos como A1, A2, A3, ... siguen la proporción: $1:1{,}414$ entre sus lados corto y largo. (Todos los Ai son semejantes)

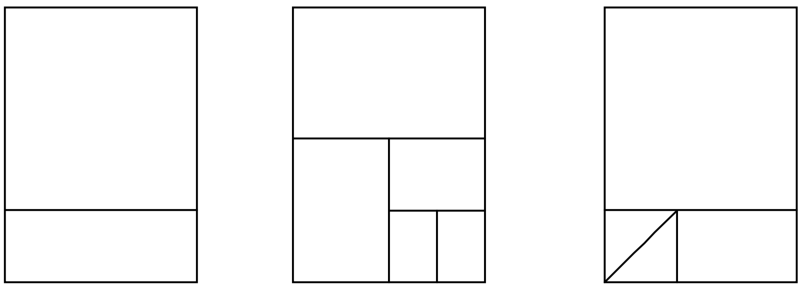
Este formato A, que también recibe el nombre de "silver rectangle" (el rectángulo de plata), tiene unas propiedades geométricas que lo hace muy útil desde el punto de vista matemático y desde el punto de vista del origami.

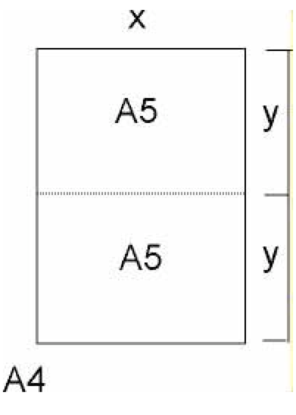
1.- El lado mas grande tiene una longitud igual a la diagonal de un cuadrado construido sobre el lado menor.

2.- La mediana del lado mas grande divide el rectángulo en otros dos cuyos lados tienen la misma proporción que los del primero. La regla se aplica hasta el infinito si seguimos dividiendo los rectángulos que se van obteniendo. (Al partir Ai por la mitad obtenemos dos A(i+1))

3.- Si se quita del rectángulo el cuadrado construido sobre el lado mas pequeño, y quitamos también el cuadrado construido sobre el lado mas pequeño del rectángulo que ha quedado, se obtendrá al final un rectángulo con las proporciones iniciales.

4.- El área de A0 es de 1 metro cuadrado.



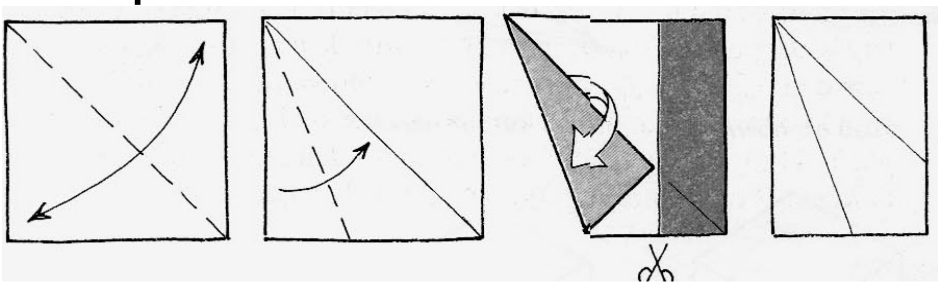


$$\frac{x}{2y} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

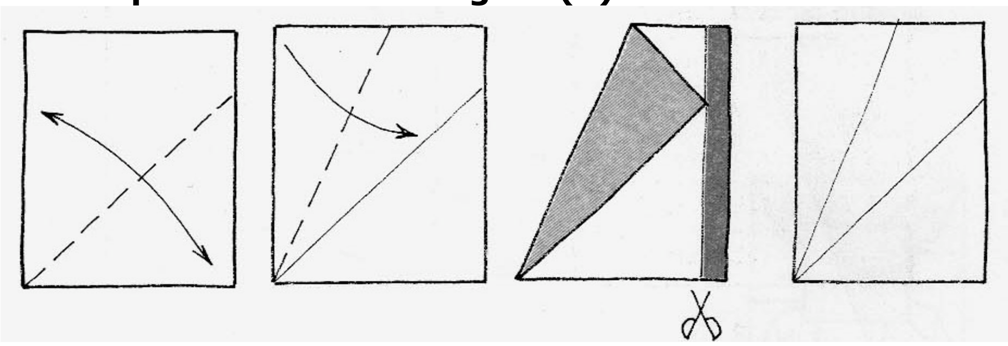
A4 = 297 x 210 mm

COMO OBTENER UN RECTÁNGULO FORMATO A

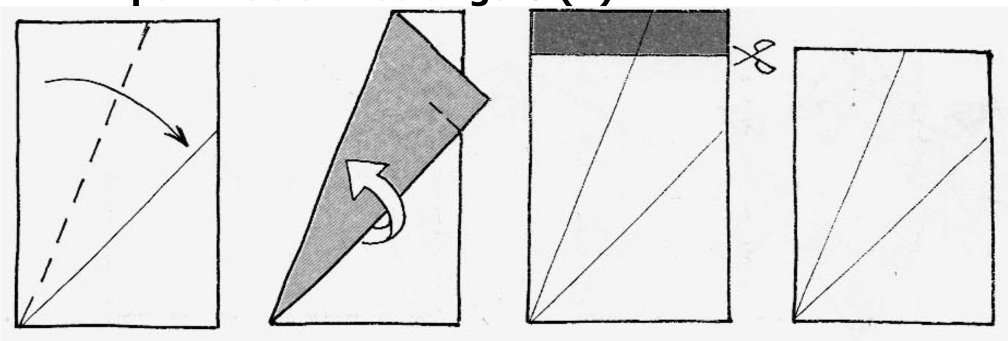
A partir de un cuadrado:



A partir de un rectángulo (1):

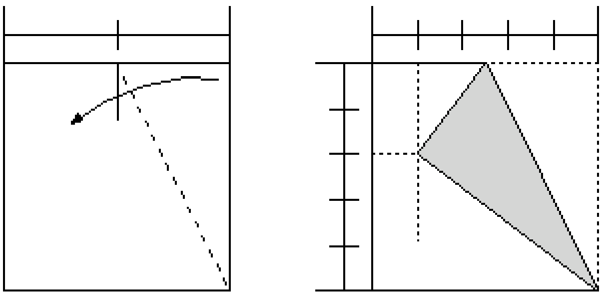


A partir de un rectángulo (2):

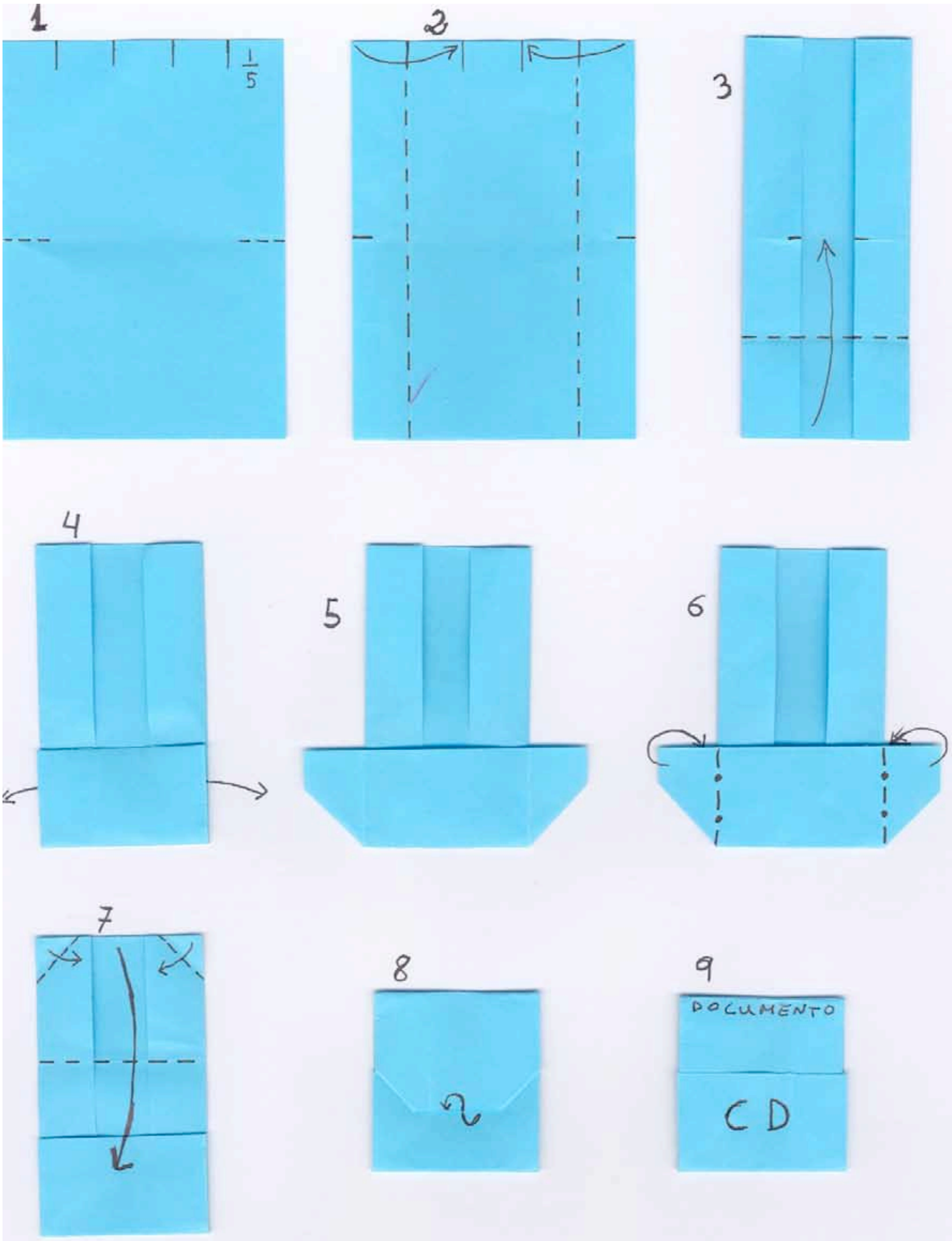


SOBRE CD

Se construye a partir de una hoja de tamaño DIN 4 y requiere previamente la división del lado menor en 5 partes iguales. Para esta división utilizamos el teorema de Haga:



El teorema de Haga nos proporciona técnicas para dividir una hoja de papel en un número impar de partes.

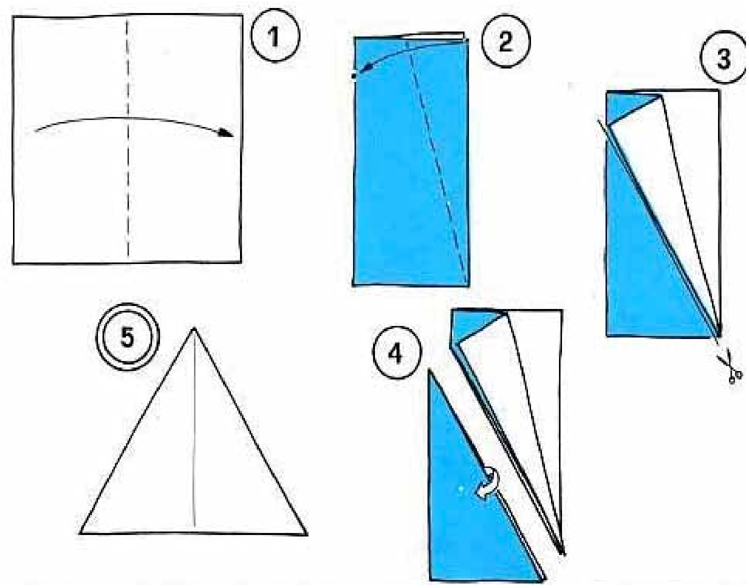


1
1/5
2
3
4
5
6
7
8
9
DOCUMENTO
CD

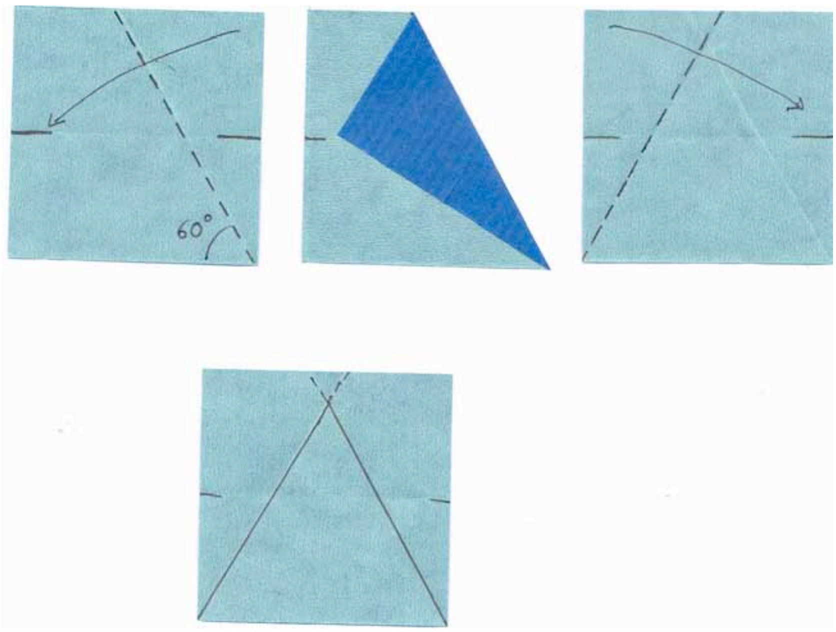
TRIÁNGULO EQUILÁTERO:

Veamos como se construye un triángulo equilátero partiendo de un cuadrado. Hay muchas maneras distintas de hacerlo utilizando la papiroflexia, a continuación exponemos dos de ellas en las que se obtiene el triángulo equilátero de mayor área posible:

Forma 1



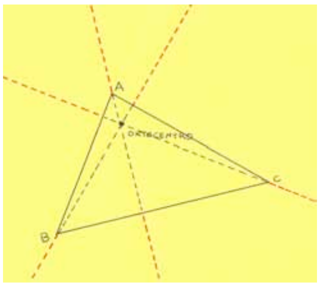
Forma 2



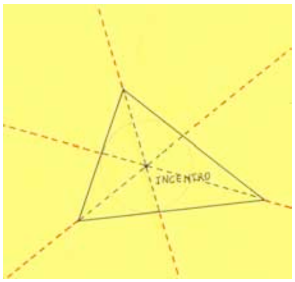
ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO DOBLANDO PAPEL

Baricentro: Punto de corte de las medianas. Centro de gravedad del triángulo

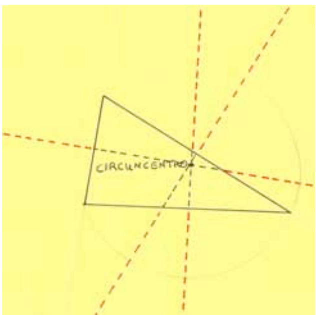
Ortocentro: Punto de corte de las alturas



Incentro: Punto de corte de las bisectrices



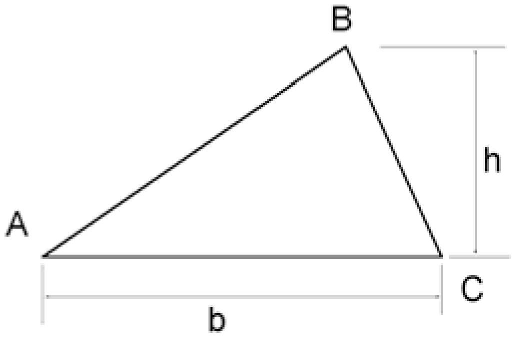
Circuncentro: Punto de corte de las mediatrices

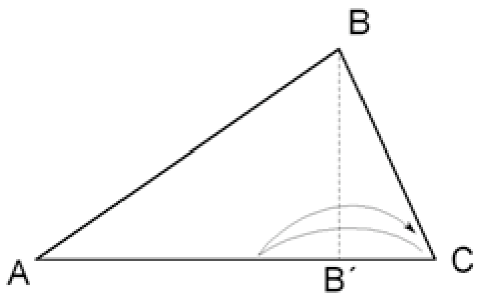


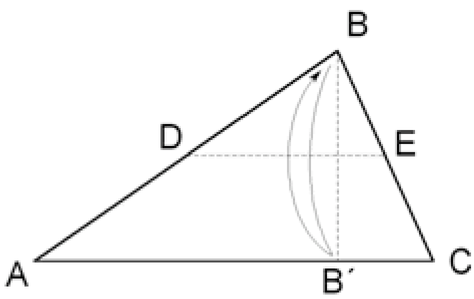
ÁREA DEL TRIÁNGULO

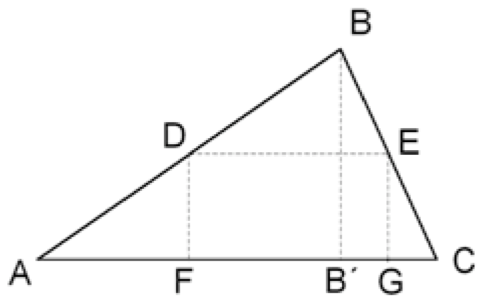
FÓRMULA DEL ÁREA: $A = \frac{base \times altura}{2}$

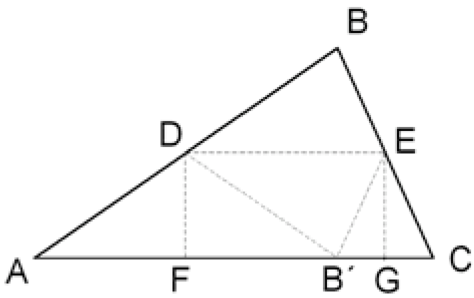
Consideremos un triángulo cualquiera de base b y altura h.



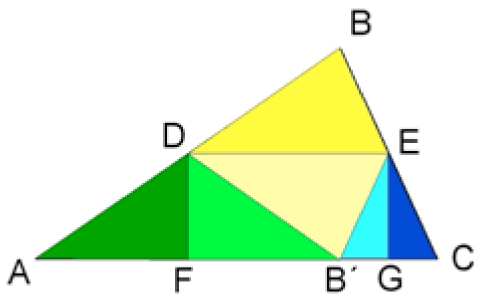




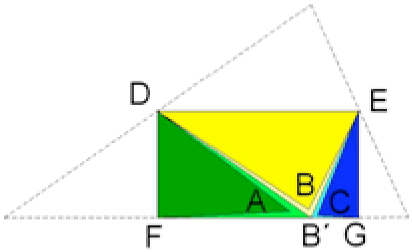




Coloreamos los triángulos parciales obtenidos en los pasos anteriores



- Los triángulos DBE y DB´E son idénticos. Lo comprobamos doblando uno sobre otro por la línea DE
- Los triángulos ADF y B´DF son idénticos. Doblamos por la línea DF y lo comprobamos.
- Doblamos por la línea EG y comprobamos que los triángulos CEG y B´EG son idénticos.

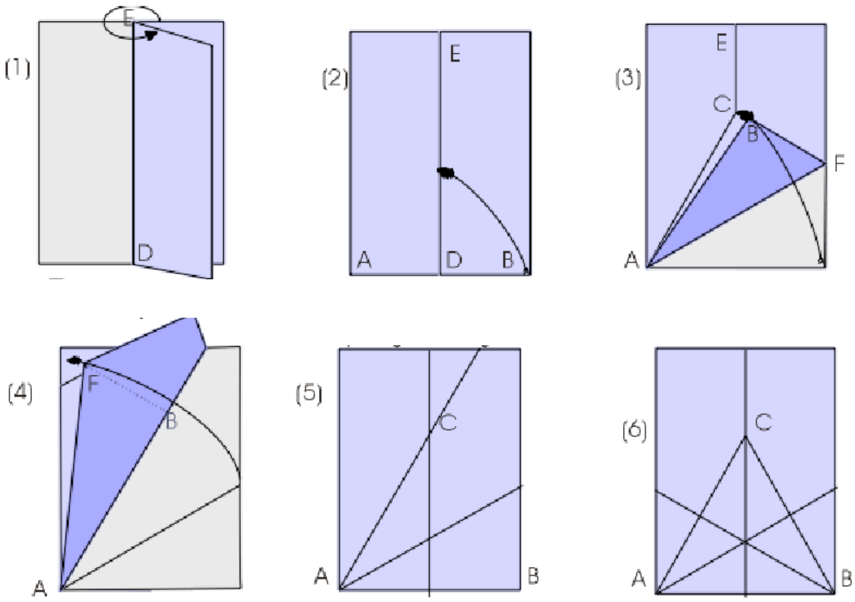


los vértices A, B y C, coinciden exactamente en el punto B´ por tanto, como el área del triángulo del que partimos, es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos en que le hemos dividido y los triángulos de colores más fuertes, son iguales respectivamente a los de colores más pálidos deducimos que el área del triángulo es igual a dos veces el área del rectángulo FDEG.

La altura de este rectángulo es $\frac{h}{2}$ y su base $\frac{b}{2}$, luego su área es $A_{rectangulo} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}$ y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente:

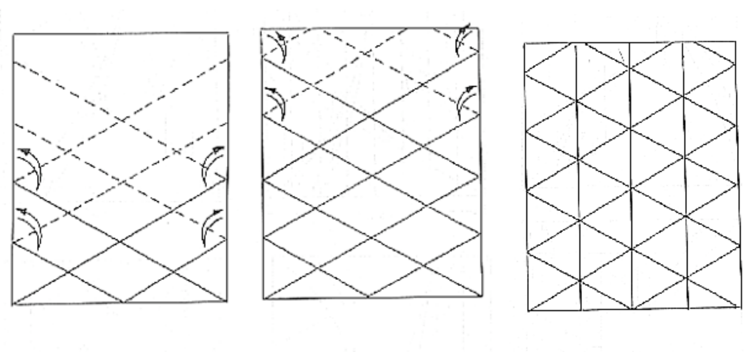
$$A_{triangulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO A PARTIR DE UNA HOJA RECTANGULAR



(1) Doblamos el lado más corto AB por la mitad.
(2) Desdoblamos la hoja y la doblamos nuevamente haciendo que B quede sobre la línea DE y dejando fijo A.
(3) Marcamos el punto C sobre la línea ED, de tal manera que la distancia AC sea igual a la distancia AB.
(4) Doblamos nuevamente sobre AC y marcamos esta línea.
(5) Hemos trisecado el ángulo recto con vértice en A.
(6) Si repetimos este proceso en el vértice B, obtenemos el triángulo equilátero ABC.

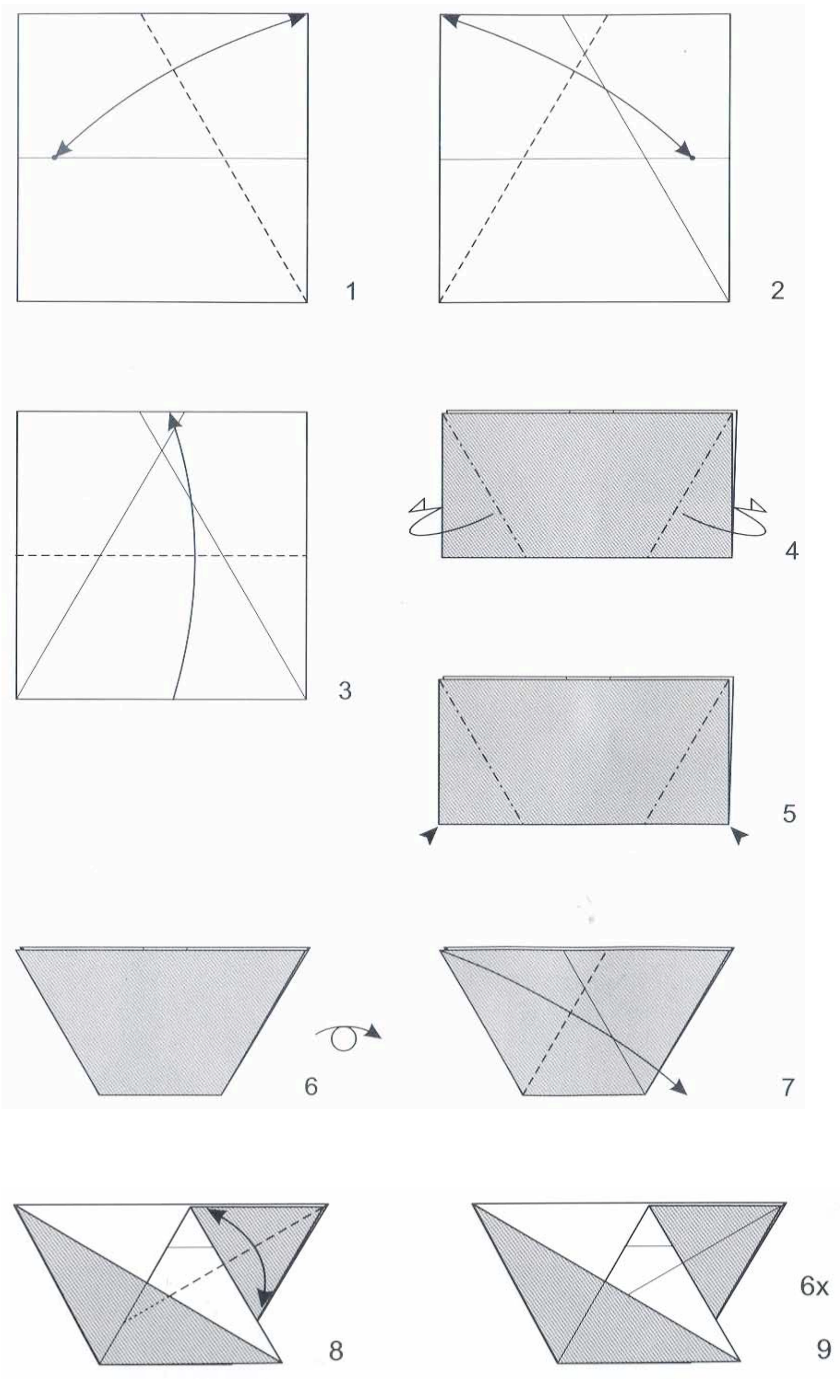
Construcción de triángulos equiláteros en "batería".



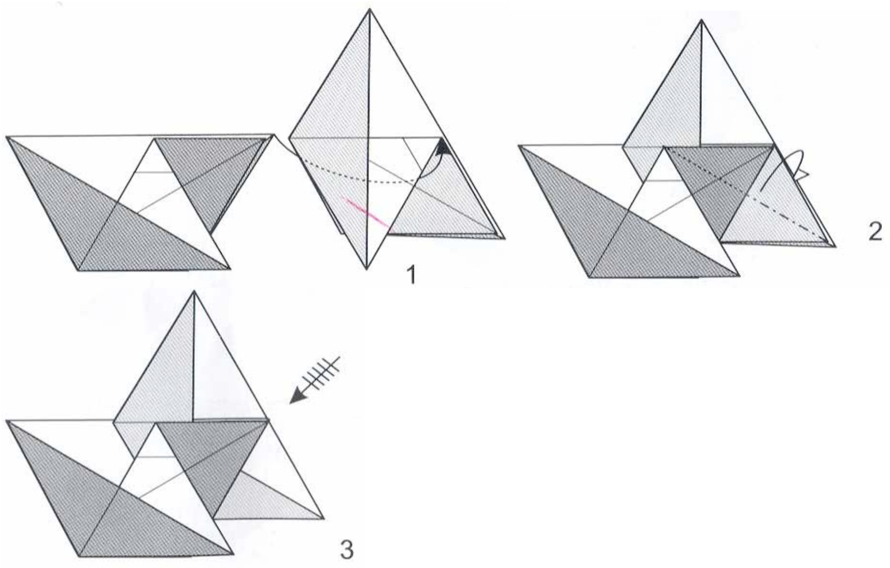
ESTRELLA DE 6 PUNTAS.

Como aplicación del triángulo equilátero vamos a construir una estrella de seis puntas, con seis módulos de papel cuadrado. Los pasos a dar serán un continuo repaso del triángulo equilátero y sus elementos, de los ángulos de 30º y 60º y del hexágono.

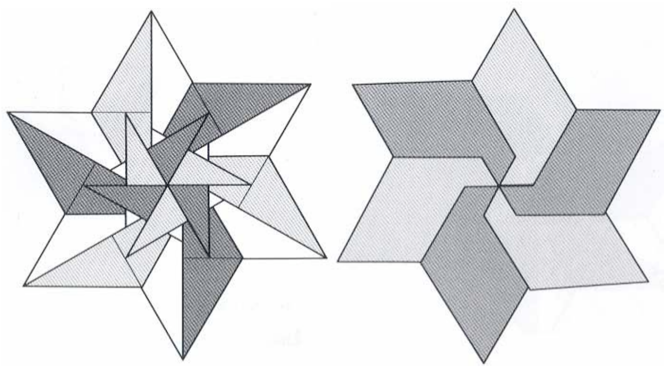
Diagramas del módulo:



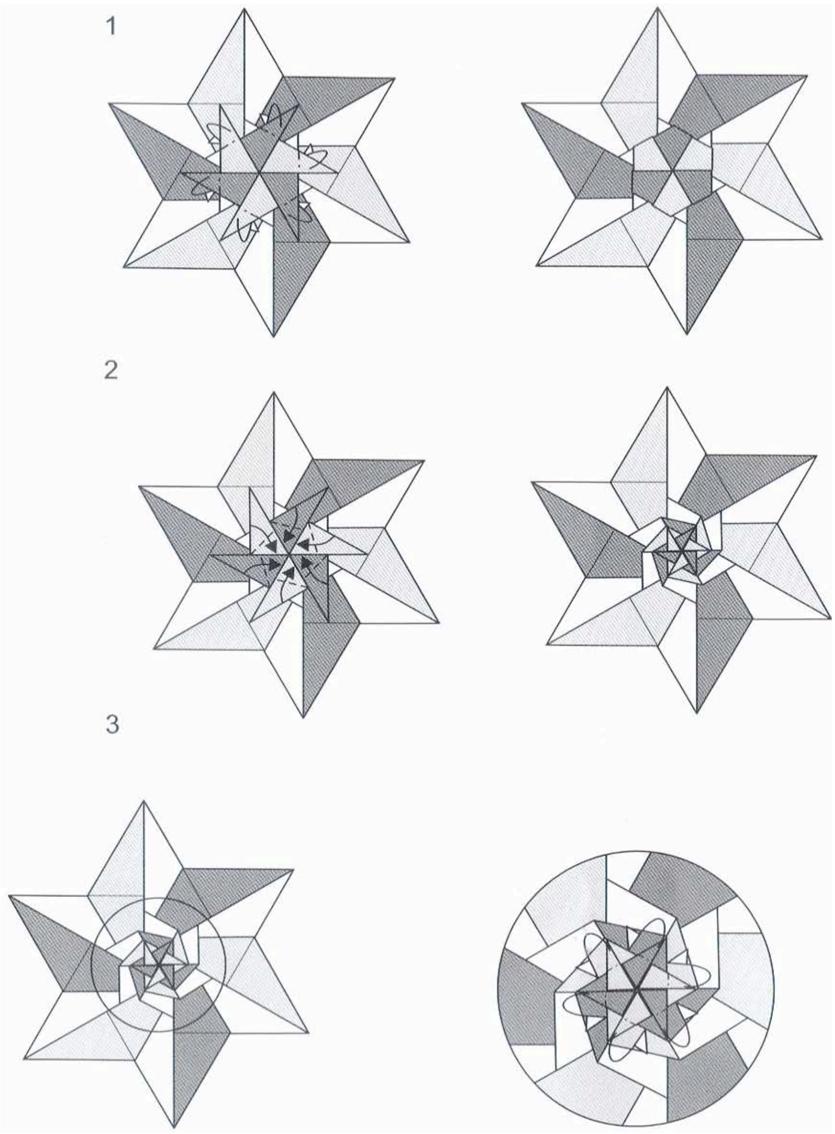
Unión de los módulos:

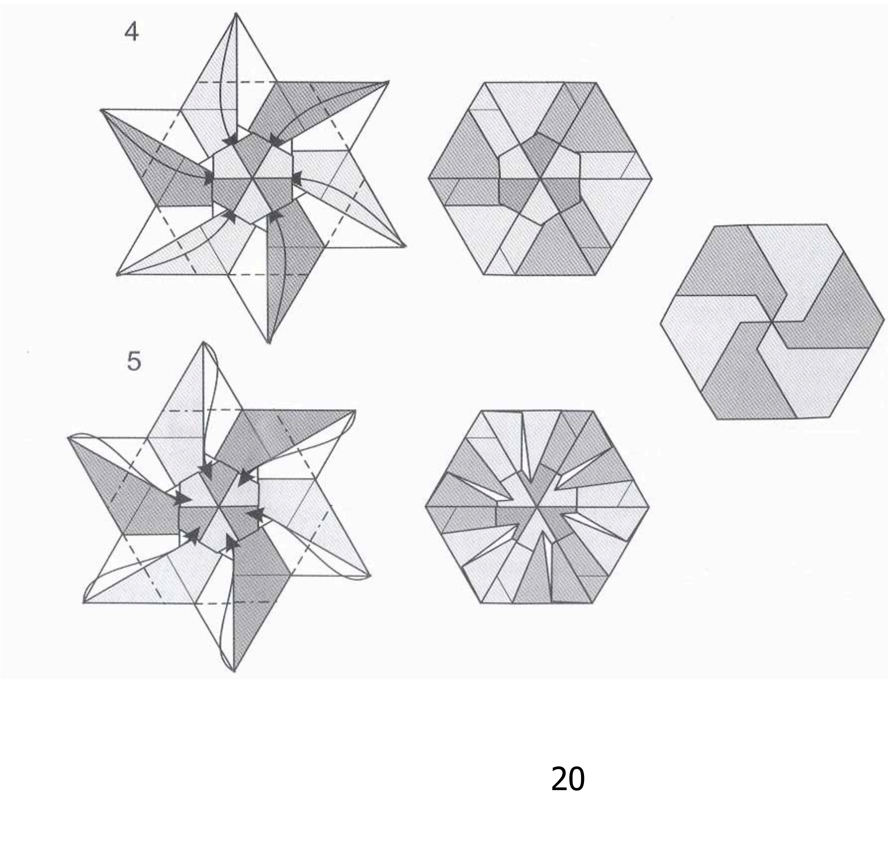


resultado



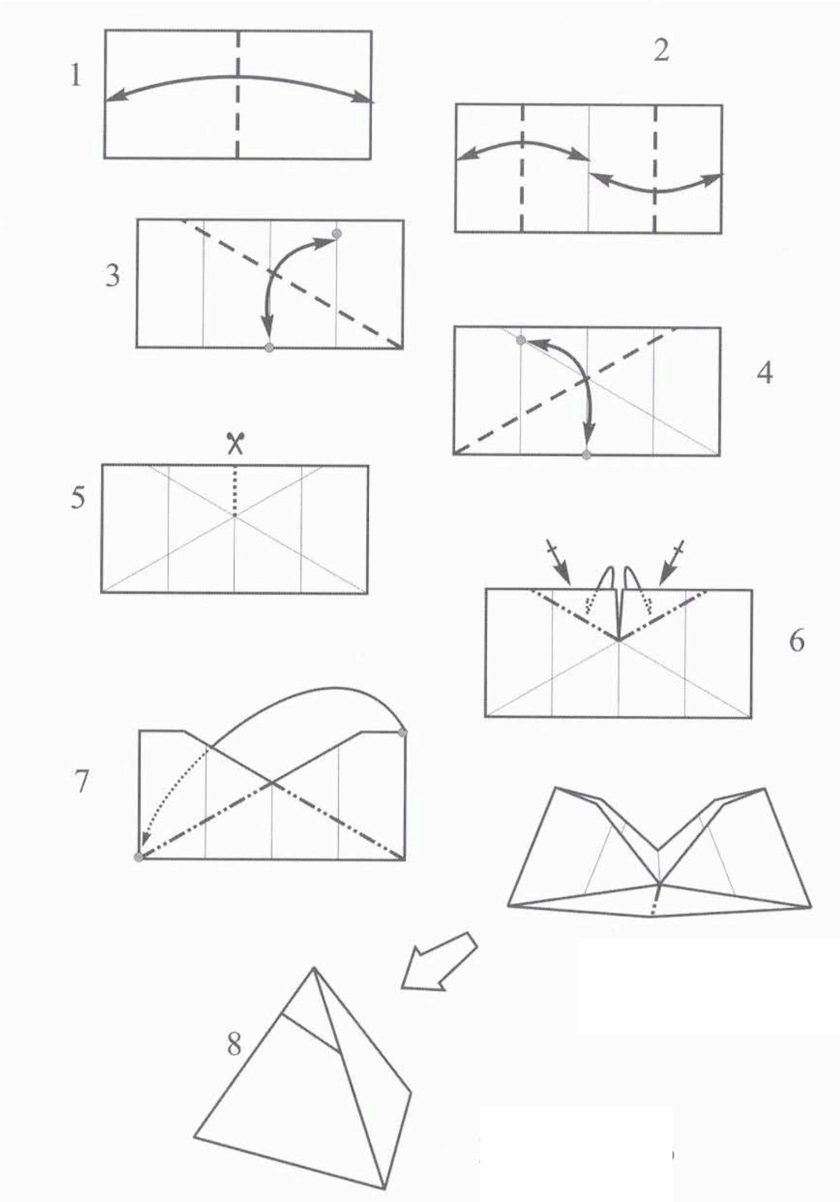
Con pequeñas variaciones obtenemos distintas estrellas y hexágonos que nos permiten plantear interesantes preguntas en el aula


1
2
3


4
5

TETRAEDRO CON SOBRE 2x1

Esta figura, con la que pasamos a dimensión 3, afianza aún más la construcción y comprensión de los ángulos de 30º y 60º y nos permite construir un poliedro regular cuyas caras son triángulos equiláteros.



DODECAEDRO RÓMBICO

CALENDARIO

Un dodecaedro muy interesante a pesar de no ser regular es el dodecaedro rómbico. El dodecaedro rómbico ya era conocido en el antiguo oriente, de hecho los cristales de granate, y en particular el Almandino, crecen en dodecaedros rómbicos; pero se considera a Kepler como su descubridor, aunque algunos historiadores opinan que Paccioli ya lo conocía.

El dodecaedro rómbico es un poliedro convexo con 12 caras uniformes que son rombos (la diagonal más larga del rombo que forma sus caras es $\sqrt{2}$ veces la longitud de la diagonal menor), y 14 vértices que no son uniformes.

Esta propiedad se apreciará muy bien en la construcción que vamos a hacer a continuación, en la que distinguiremos dos tipos de vértices:

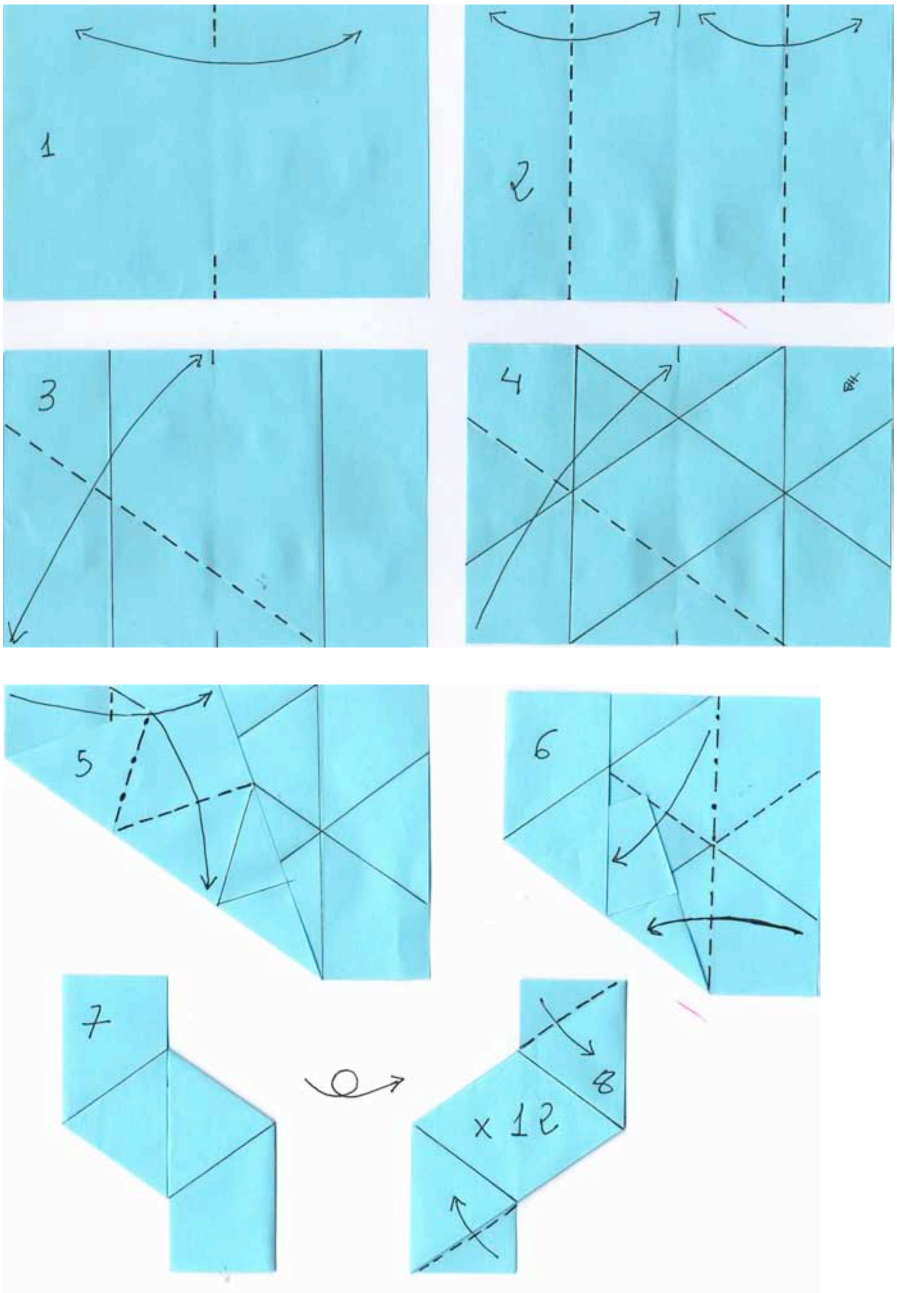
* 6 de orden 4 (4 caras, ángulos agudos)
* 8 de orden 3 (3 caras, ángulos obtusos)

Otra de sus características es que se trata de un poliedro de aristas uniformes, es decir: que todas sus aristas reúnen un mismo par de caras.

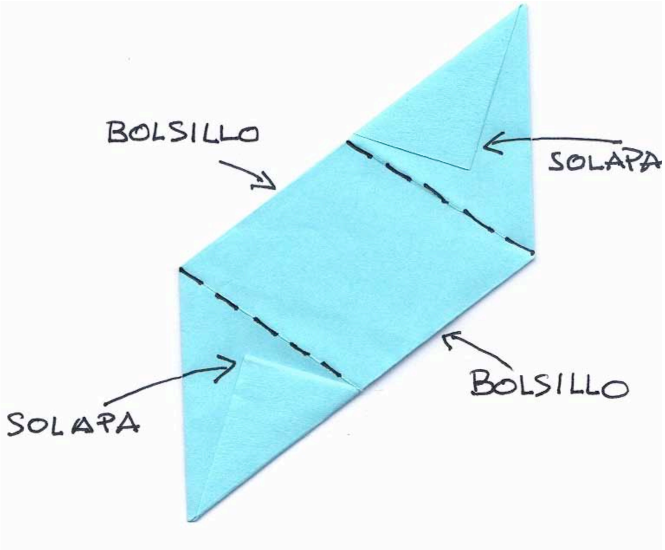
Pertenece al grupo de los llamados sólidos de Catalan que son una familia de poliedros que se generan con el dual de los sólidos de Arquímedes, fueron nombrados así por el matemático belga Eugène Charles Catalan que los estudió en 1865.

El Dodecaedro rómbico tiene además la característica de llenar completamente el espacio cuando juntamos varios de ellos. Las condiciones que debe cumplir un poliedro para que esto se verifique son: que tengan aristas de la misma medida, que tengan algún tipo de cara igual y que tengan ángulos diedros susceptibles de combinarse para sumar 360º y nuestro poliedro verifica todas ellas.

La unidad rómbica de la que damos los diagramas a continuación, fue diseñada por Nick Robinson. Se parte de un papel rectangular con la proporción DINA. Con 12 módulos se obtiene el dodecaedro cuyas caras son rombos.



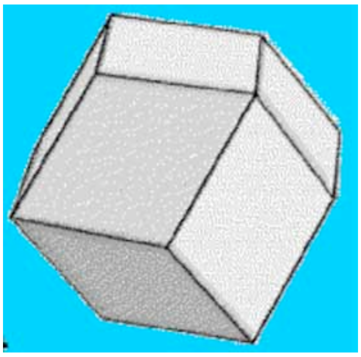
Una vez tenemos doblados los 12 módulos para su ensamblaje hay que tener en cuenta que:



y lo que se dijo anteriormente respecto a los dos tipos de vértices:

6 de orden 4 (4 caras, ángulos agudos)

8 de orden 3 (3 caras, ángulos obtusos)



La idea de utilizar este dodecaedro como calendario partió de Humiaki Huzita.