Depósito Legal M. 30.793. - 1977

GRAFICAS FEYJO. — LODOSA, s/n. — MADRID - 26

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DISCURSO

CORRESPONDIENTE A LA SOLEMNE APERTURA
DEL CURSO ACADEMICO 1979 - 80

POR EL

Excmo. Sr. D. Pedro Abellanas Cebollero

CATEDRATICO DE LA FACULTAD
DE CIENCIAS MATEMATICAS

MADRID
1979

UNAS REFLEXIONES SOBRE LA BIOGRAFIA DE LA MATEMATICA

Excmo. Sr. Rector Magnífico, señoras, señores:

Hoy comienza un nuevo curso en esta Universidad y le ha correspondido a un profesor de Geometría encargarse de la lección inaugural. Esto significa que esta lección va a tratar de Geometría. Es evidente que el acto que aquí nos congrega ha llegado a tener un carácter simbólico. Presentaría muchas dificultades materiales conseguir la participación en él de todos los profesores y alumnos de la Universidad; pero estas dificultades no son el mayor inconveniente para la realización de tal reunión. Lo que realmente impide que nos reunamos todos, aunque sólo fuese una vez al año, es el grado de distanciamiento intelectual alcanzado entre unos y otros,, como consecuencia de la superespecialización a que se ha llegado en la Universidad. El estudio de los problemas que constituyen la parte viva de la ciencia conduce a teorías, y éstas necesitan, para su adecuada formulación y desarrollo, de técnicas.

El hecho que se ha producido en este siglo, sin precedente en la historia del pensamiento, ha sido, por un lado, la constante proliferación de teorías y técnicas, y, por otro, el aumento de la velocidad de envejecimiento de unas y otras, especialmente de las últimas. Si la Universidad se dedica a enseñar teorías y técnicas puede llegar a encontrarse en una situación sin sentido, pues, además de que necesitaría un presupuesto incompatible con las posibilidades de la Nación, llegaría a producir unos licenciados que, en el mejor de los casos, serían especialistas en técnicas caducadas. Por ello, este acto, aunque simbólico, tiene el valor de un testimonio de la voluntad de la Universidad de buscar una solución a este grave problema de nuestro tiempo.

Parecería natural, en una primera lección, que comenzase por darles una definición de Geometría. Esto era posible cuando la Geometría estaba menos desarrollada, pero ahora no somos capaces de decir qué es la Geometría. Por una razón muy sencilla: porque la Geometría es un ser vivo y, por tanto, cambiante. El aspecto que presenta hoy es distinto al de ayer y al de mañana. Por ello creo que merece la pena que contemplemos la Geometría en diversos momentos de su vida, con lo que quizá se pueda obtener una cierta información sobre qué es eso que desde hace veintitrés siglos se llama Geometría; y esto con la secreta esperanza por mi parte de que esta contemplación de la Matemática pueda servir de término de comparación para otros especialistas, con objeto de iniciar el camino que pueda conducir a enterarnos, y, por consiguiente, interesarnos, de nuestros recíprocos problemas. Con este espíritu invito a ustedes a reflexionar conmigo sobre las diapositivas de la Matemática que he considerado más interesantes.

1. La Geometría, como los seres vivos, tiene una dimensión temporal, depende de la variable tiempo, pero no al modo de los hechos históricos, sino exactamente con las características de un auténtico ser vivo con su propio código genético. Su nacimiento son los Elementos de Euclides. La cantidad y calidad de conocimientos matemáticos a principios del siglo III (a. C.) exigían una ordenación para su utilización por una memoria limitada. Esta ordenación son los Elementos. El lenguaje de esta obra es geométrico, pero en ella se exponen también ideas y problemas aritméticos, algebraicos y de lo que hoy se llama análisis matemático. Los Elementos son toda la Matemática de la época; o, con otras palabras: la Matemática griega era Geometría. En los Elementos aparecen todos los problemas fundamentales de la Matemática. En esta primera fotografía del nuevo ser se reconocen de un modo preciso todos los rasgos del ser adulto. No es una pérdida de tiempo que dediquemos unos minutos a distinguirlos. Ya en la primera página del primer libro nos encontramos con estas definiciones:

Def. 2. Una línea es una longitud sin anchura.

Def. 5. Una superficie es lo que tiene solamente longitud y anchura.

Def. 6. Los extremos de una superficie son líneas.

La definición 2, con un lenguaje libre actual, corresponde a decir que una línea es el resultado de deformar, sin romper, un trozo de recta, lo que con la terminología matemática se expresa diciendo que una línea es un subconjunto de puntos del espacio homeomorfo a un segmento de recta. La definición 6 no es propiamente una definición, sino una proposición. Para entenderla es necesario, en primer lugar, tener presente que para los griegos no tenían sentido las figuras infinitas; a lo largo de toda la obra, una recta es siempre un segmento capaz de ser prolongado, por lo que constantemente se dice: «prolongando la recta AB». Por tanto, las superficies, para los griegos, tenían siempre un borde, cuando no

eran cerradas, como la superficie esférica. Con lenguaje actual, la definición 6 se diría: la intersección de dos superficies es una línea. Las condiciones de equivalencia de las definiciones 2 y 6 constituyen uno de los teoremas fundamentales de la Matemática actual: el teorema de la función implícita.

El libro V, atribuido a Eudoxo, es, seguramente, el libro más bello y acabado de los Elementos. En él se construye con gran perfección la teoría de las magnitudes, de un modo totalmente actual y, desde luego, muy superior al que figuraba en los libros de texto de hace cincuenta años. Una magnitud es un conjunto a cuyos elementos se les llama cantidades y que tienen la forma, por ejemplo, de 5 m, πm, etc., en donde aparece un número y una cantidad. Con las cantidades se definen dos operaciones: adición: $3\text{ m} + 5\text{ m} = 8\text{ m}$, y multiplicación por números: $2\,(3\text{ m}) = (2 \times 3)\text{ m} = 6\text{ m}$, que poseen propiedades bien conocidas. Estos conjuntos se designan hoy día con el nombre de semiespacios vectoriales. La mayor dificultad de la construcción de magnitudes está en definir el conjunto de los números, que debe ser el de los números reales. Lo sorprendente del caso es que el concepto de número real ha sido uno de los que más ha costado establecer con precisión, debiéndose a Dedekind, a finales del siglo pasado, la primera definición correcta de estos números. Pues bien, Dedekind, en el prefacio de su memoria: *Was sind and was sollen die Zahlen,* confiesa que la idea desarrollada en esa memoria no es suya, que se ha limitado a expresar en lenguaje actual la construcción dada en el libro V de Euclides. ¡Es sorprendente! El libro V de Euclides ha estado sin ser entendido durante más de veintidós siglos. Pero este hecho no es insólito, se repite muchas veces, aunque ya no por un período tan largo de tiempo. Los números que definen los griegos en el libro V no son los números reales positivos, como pensó Dedekind; pero los contiene como caso particular, como vio Krull. El conjunto de números negativos tardó mucho tiempo en alcanzarse, y durante el siglo XVIII todavía hubo grandes controversias acerca de los números negativos. Lo que actualmente se llama Algebra lineal, se encuentra, por tanto, perfectamente construida, para semiespacios vectoriales de dimensión 1, en el mencionado libro V. Pero hay más: el Algebra multilineal, construida sobre la idea de producto tensorial, que aparece desarrollada a mediados del siglo XX, como una de las teorías más «modernas» de la Matemática, está perfectamente desarrollada, siempre sobre espacios vectoriales de dimensión 1, en los libros II, VII, VIII y IX, y esto no es de extrañar, porque los griegos, como acabamos de señalar, no trabajaban con números, sino con magnitudes, por lo que se veían obligados, para definir la multiplicación, a usar el producto tensorial. En los mencionados libros VII, VIII y IX se obtienen también los resultados fundamentales de la Teoría de Números, estudiándose la divisibilidad y llegándose a dar una bella demostración de la infinitud de los números primos. En el libro IX se llega a sumar una progresión geométrica.

Los libros I, II, III y IV contienen la parte geométrica tradicional relativa al plano, y los libros XI, XII y XIII la geometría del espacio; paralelismo y perpendicularidad en el espacio, ángulos poliédricos, volúmenes de prismas, pirámides, cuerpos redondos y construcción y cálculo de elementos de poliedros regulares.

Prestemos un momento de atención al libro X. Comencemos por recordar que los griegos decían que el segmento AB era conmensurable con el segmento CD cuando existía un múltiplo entero (y positivo) de AB igual a otro múltiplo de CD. En caso contrario se decía que AB era inconmensurable con CD. Esto último se expresa también diciendo que la medida de AB con la unidad CD es un número irracional. Ya los pitagóricos conocían que la diagonal del cuadrado era inconmensurable con su lado, pero lo que Euclides se propone en este libro es ver cuántos números irracionales existen. Obsérvese que los números irracionales no se pueden representar mediante un número finito de cifras, y para los griegos, el infinito actual era impensable, por lo que estos números eran sorprendentes; pero, sin embargo, como ellos los podían construir mediante un número finito de construcciones geométricas, los podían admitir sin dificultad, pero únicamente aquellos que admitían construcciones de este tipo. De aquí el interés de analizar completamente este conjunto. Esta es la finalidad del libro X, y el resultado fundamental del mismo es demostrar que existen infinitos números irracionales, esto es, demostrar que, dadas varias cantidades irracionales, son capaces de construir otra distinta de las anteriores. Con la terminología actual lo que se consigue en este libro es construir ecuaciones cuadráticas o bicuadráticas cuyas raíces sean reales y positivas. La belleza de este libro y el ingenio empleado en él son extraordinarios. Sin embargo, a lo largo de los siglos han sido muchos los que se han preguntado para qué sirve dicho libro, cuyos resultados no se aplican en ningún momento, ya que no puede cnsiderarse justificado todo el esfuerzo de estudiar el problema de los irracionales cuadráticos reales por la aplicación al cálculo de los elementos de los poliedros regulares convexos del libro XIII. Veintidós siglos más tarde, a partir de la Disquisitiones Arithmeticae de Gauss, se ha podido comprender el significado del mismo. El problema de este libro es de la más estricta actualidad, ya que se trata de uno de los problemas que están actualmente sobre el tapete: estudio de propiedades algebraicas reales. Es muy difícil continuar nuestras meditaciones sin abrir un pequeño paréntesis para formular en él la pregunta: ¿qué hubiese pasado si Euclides hubiese tenido que rellenar unos formularios para justificar la importancia de su investigación? Se cierra el paréntesis.

Continuemos nuestra observación de la recién nacida Geometría. Al final del libro XI se aborda el problema de medir el volumen de los prismas. La idea es simplemente ésta: dos prismas tienen el mismo volumen cuando se pueden cortar en trozos, de modo que al recomponer de modo conveniente todos ellos resulte en ambos casos el mismo cubo. Este problema se resuelve totalmente en dicho libro. En el libro XII se trata de hacer lo mismo con la pirámide. Pero esto ya no es posible. Esto es, no se puede trocear una pirámide en un número finito de partes tales que al recomponer éstas se obtenga un cubo. Para resolver este problema es preciso utilizar la idea más importante de la Matemática, que es el concepto de límite. Este concepto está prácticamente contenido en el método de EXHAUSTACION, que se atribuye también a Eudoxo. Si esto fue así, el hombre genial de la antigüedad helénica sería Eudoxo, ya que resolvió los dos problemas más difíciles: creación de los números reales y concepto de límite. El concepto de límite es el fundamento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz, por lo que el método de exhaustación puede considerarse como el germen de este importante capítulo de la Matemática. Con el método de exhaustación se calculan en el libro XII los volúmenes de las pirámides y de los cuerpos redondos. Pero hay más: lo que realmente se consigue en este capítulo es reducir el cálculo de un volumen al cálculo de áreas, o con lenguaje actual, se reduce el cálculo de una integral triple al de una integral doble, lo cual es el importante teorema de Stokes de la Matemática de nuestros días.

Finalmente, el libro XIII está dedicado a la construcción de los cinco poliedros regulares convexos. Y de nuevo se puede volver a formular la pregunta: ¿para qué sirven estos poliedros? Excluido el cubo, puede decirse que en aquel momento para nada. Sin embargo, a partir de la introducción de la idea de grupo por Galois en el siglo pasado, los poliedros regulares han proporcionado modelos de grupos con aplicaciones al Algebra, a la teoría de funciones automorfas, a la cristalografía, etc.

Vemos, pues, que en esta fotografía de la Geometría en su infancia se observan todas las características fundamentales que aparecerán desarrolladas en su edad adulta. Lo más importante es observar que los problemas básicos de la Matemática están perfectamente planteados en los Elementos, esto es: problemas lineales y multilineales, teoría de números, problemas de la aproximación local y problemas de la medida.

2. LAS ESTRUCTURAS ABSTRACTAS. Pasemos por alto dieciocho siglos y observemos el aspecto de la Matemática en el Renacimiento, concretamente en el siglo XVI. Posteriormente a Euclides se obtienen nuevos resultados, especialmente con las aportaciones de Arquímedes, Ptolomeo y Apollonio, pero no varía la concepción fundamental de razonar sobre magnitudes concretas. El hecho importante que se produce en el Renacimiento podría decirse que es un olvido. Hemos visto que las cantidades constan de dos partes: un número, su coeficiente, y una cantidad, que se toma como unidad. Pues bien, en el Renacimiento se olvidan de esta segunda parte, la unidad, y es sustituida por un signo, por ejemplo, la letra x, sobre el que no se quiere saber nada, únicamente se dice cómo se puede operar con él y se establece que con ese símbolo x se opera como si fuese un número natural. Este hecho tan sencillo produce una extraordinaria simplificación, porque al olvidarse de las cantidades, que eran vectores, y que no se podían multiplicar como números, lo que exigía para introducir una multiplicación recurrir al producto tensorial, al considerar el símbolo vacío de contenido y operar con él como si fuese un número, se obtiene inmediatamente un conjunto, a cuyos elementos llamamos hoy día polinomios, con los que se opera igual que con números enteros. Pero no sólo es esto, sino que este espíritu alegre y confiado lleva a manejar los números negativos sin saber exactamente qué sean estos números, sin excesivas preocupaciones rigoristas; simplemente porque las cosas marchan mejor empleando dichos números. Después vendrán las polémicas y las dificultades. Con lenguaje actual puede decirse que la gran aportación del Renacimiento fue sustituir el álgebra tensorial de los griegos por el álgebra de los polinomios. Evidentemente que esto es una trampa y veremos que hasta muy recientemente no ha salido a luz esta arbitrariedad, pero inexorablemente toda falsedad es descubierta más tarde o más temprano, y así ha sucedido con esta que podríamos llamar actitud de protesta de la primera juventud de la Matemática. Ahora bien, este fenómeno de olvido, esta falsedad, fue tremendamente positivo para el desarrollo de la Matemática, porque permitió avanzar al sustituir el álgebra tensorial, que es la que está ahí, en los fenómenos del Universo, por otra más sencilla: el álgebra de polinomios. Es curioso que los comentaristas que yo conozco no se dan cuenta del hecho que realmente se produce y piensan que se trata simplemente de haber descubierto una notación adecuada. Lo importante es admitir que con el símbolo x se pueda operar como con un número, lo que en el caso de las magnitudes no es cierto. El proceso de olvidarse de algunas propiedades y quedarse con una parte de ellas se llama abstracción. Por consiguiente, en el Renacimiento se produce un segundo proceso de abstracción. Este proceso, como resultado de lo que se lleva dicho, no afecta propiamente a la Geometría, sino a la parte no geométrica de los Elementos. El Algebra, que en los Elementos se trata geométricamente, se hace independiente de la Geometría.

El problema de los irracionales cuadráticos estudiados en el libro X de Euclides admite ahora, dentro del álgebra de los polinomios, una formulación precisa y más simple, con lo que se avanza notablemente y se obtienen las fórmulas de resolución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grados en las que intervienen Scipion del Ferro a principios del siglo XVI, y Cardano y Vieta con sus escuelas a lo largo del mismo. Con esto aparecía claro que no toda ecuación posee raíces que sean irracionales cuadráticos, que las ecuaciones de tercer y cuarto grados poseen raíces que son irracionales cúbicos y que, por tanto, no se pueden construir gráficamente con regla y compás. He aquí la razón por la que los griegos no podían ir más allá de lo que fueron.

Todo proceso de independencia va seguido de otro de anexión y sometimiento. Es natural que el Algebra comenzase pronto a invadir la Geometría. Este proceso se realiza al siglo siguiente por obra de Fermat y Descartes. La introducción de las coordenadas por estos sabios, y el desarrollo sistemático realizado por Descartes, permitió obtener propiedades geométricas a partir de propiedades algebraicas, iniciándose un nuevo proceso de unidad en la Matemática de signo contrario al de la época griega. Pero todavía era necesario mucho tiempo para llegar de nuevo a la unidad.

Resumiendo: la primera juventud de la Matemática está caracterizada por la aparición de la primera estructura abstracta: el álgebra de los polinomios.

3. EL PROBLEMA DE LA APROXIMACIÓN. Las razones trigonométricas, que no ofrecían dificultad de manejo dentro de la teoría de magnitudes del libro V, presentaban un grave problema de cálculo al sacarlas de ese marco y considerarlas como funciones numéricas, ya que entonces, como los números irracionales necesitaban para su representación infinitas cifras, y no hay posibilidad de escribir tantas cifras, se hace necesario acudir al concepto de aproximación. Como, por otra parte, las únicas operaciones que se saben realizar son la adición y multiplicación, que son las únicas que intervienen en los polinomios, para calcular tablas de funciones no polinómicas se necesitaba un proceso general que permitiese sustituir una función no polinómica por otra que lo fuese, y que se aproximara a la primera tanto como se desease. Este es el llamado problema de la aproximación local. Si se reflexiona un poco se verá que la solución de este problema era clave para el progreso no sólo de la matemática, sino de todas las ciencias experimentales. La gloria de construir la teoría de la aproximación local correspondió, como es bien sabido, a Newton y Leibniz, y la teoría se llamó cálculo infinitesimal. Un infinitésimo es simplemente una función definida en las proximidades de un punto, que generalmente es el origen de coordenadas, que tiene la propiedad de poseer límite cuando la variable tienda a dicho punto. El concepto fundamental, por tanto, que aquí interviene es el de límite. Es gracias a este concepto que la Matemática pudo seguir adelante superando las limitaciones del pensamiento griego, que se aproximó cuanto pudo a él con el método de exhaustación, como hemos visto antes, pero que no consiguió superar este estadio. El concepto de límite permitió comparar infinitésimos. Dos infinitésimos se llamaron equivalentes cuando el límite de su cociente era un número distinto de cero. Con esto, y tomando como familia canónica de infinitésimos las potencias de la variable, se puede

asignar a cada infinitésimo un número, que se llamó su orden, y de esta forma se obtuvo una medida de la aproximación local de dos funciones, que es el punto esencial de la teoría de la aproximación. Como caso particular se resolvieron de forma sistemática dos problemas que venían desde tiempos de Apollonio: el problema de trazar la tangente a una curva en uno de sus puntos y el problema de calcular el área de un recinto limitado por una curva, resultando que estos problemas eran el uno inverso del otro.

No hay duda de que Newton y Leibniz poseían clara la idea de límite, pero el desarrollo de la Matemática en aquel momento no permitía una formulación adecuada del mismo. Hubieron de transcurrir casi dos siglos para que apareciese la definición correcta de límite, debida a Cauchy. No obstante, a partir de Newton y Leibniz, la Matemática y la Física adquirieron un desarrollo desbordante como nunca se había conocido anteriormente.

Limitándonos a nuestro tema, la Geometría, veamos cómo le afecta este gran descubrimiento de Newton y Leibniz, y qué aspecto ofrece en esta época, que correspondería, más o menos, a los siglos XVII, XVIII y primer tercio del XIX, y que se podría considerar como segunda juventud de la Matemática y representarla por el nombre de Newton. A principios del siglo XVII aparece un geómetra extraordinario, Desargues, que construye un nuevo espacio, que después se llamó proyectivo, adecuado para estudiar propiedades globales de las figuras de primero y segundo orden. El ambiente matemático de la época no está preparado para recibir esta obra, por lo que pasa a perderse en las bibliotecas. El cálculo infinitesimal permitió el estudio local de curvas en todos los puntos de éstas en que aquél era aplicable, esto es, en aquellos en que existía una tangente única. En los puntos de las curvas con más de una tangente, el método no es aplicable, y fue el mismo Newton quien dio el método para estudiar estos puntos; método que está actualmente vigente, sin que se haya encontrado otro mejor, lo que constituye una prueba más de la genialidad de Newton. La contribución más importante para el estudio de la Geometría mediante los métodos del cálculo infinitesimal se debe al gran matemático de principios del siglo pasado, Gauss, que se puede considerar como el fundador de lo que hoy conocemos como geometría diferencial. Pero la geometría en el sentido de los griegos no se resignaba a morir. Además de la obra de Desargues, que acabamos de mencionar y que no influyó directamente, seguía cultivándose la que se llamó geometría pura, siendo de destacar la obra de Monge, creador de la geometría descriptiva.

Pero la contribución más importante a la geometría pura, esto es, geometría sin números, fue debida a Poncelet (1818), que redescubrió el espacio proyectivo de Desargues, pero ahora de un modo más completo y con plena conciencia de la finalidad propia de ese espacio, que es la de estudiar propiedades globales de figuras definidas por ecuaciones algebraicas. Para el estudio de estas propiedades globales enunció Poncelet el llamado «principio de continuidad», también conocido por «principio de la conservación del número», que no pudo formular con precisión, porque, como en otras ocasiones anteriores, no disponía de una estructura matemática adecuada para hacerlo. Las polémicas sobre tal principio fueron numerosas, no siempre llevadas con espíritu científico, y le sobrevieron. La creación de Poncelet fue un respiro para la geometría pura, que duró poco tiempo, porque Plücker introdujo pronto coordenadas para estudiar el espacio proyectivo. En resumen: en esta época la Geometría avanza, como toda la ciencia, de un modo sustancial, pero el progreso se consigue principalmente mediante el empleo de las coordenadas y del cálculo diferencial. Los intentos de mantener la Geometría independiente de la idea de número son rápidamente reabsorbidos por los métodos analíticos de las coordenadas.

4. La crisis. El paso de la juventud a la madurez de la Matemática se produce a través de una profunda crisis que se origina en la Geometría. El proceso se desencadenó, como el de todas las crisis, precipitadamente. En 1813, Gauss comunica por carta a un colega que ha obtenido un modelo consistente de Geometría sin el postulado de las paralelas de Euclides. En 1826, Lobachefsky, y simultáneamente Bolyai, construyeron otros modelos de geometrías no euclídeas, y lo mismo hizo Riemann en 1852 al estudiar la Geometría sobre una superficie. Por otra parte, V. Staudt publicó en 1848 su tratado de Geometría proyectiva, haciendo una construcción rigurosa de esta geometría apoyándose en la geometría euclídea, con lo que parecía consolidarse la geometría pura, independiente de la idea de número. No obstante, a la geometría pura se le hacía la crítica de no poder representar gráficamente los puntos, rectas y planos imaginarios. Con objeto de liberar a la Geometría de esta deficiencia construyó Staudt en 1852 un espacio proyectivo, definido axiomáticamente, en el que se podían representar gráficamente los puntos, las rectas y los

planos imaginarios. La construcción de Staudt fue perfecta, dentro de las posibilidades de rigor de la época; pero lo que demostró Staudt con su construcción fue todo lo contrario de lo que pretendía, que era liberar la Geometría de la idea de número, pues probó la identidad de la geometría pura con la geometría analítica sobre el cuerpo de los números complejos. Este resultado trascendental sumergía a la Geometría dentro de la Matemática. Se presentaba entonces el problema de salvar la personalidad de la Geometría dentro de la Matemática que la había absorbido. Ni Staudt ni muchos de los geómetras posteriores se dieron cuenta de la trascendencia del resultado alcanzado. Afortunadamente, Cayley, a mediados del siglo pasado, se dedicó a estudiar profundamente la Geometría proyectiva con el empleo de coordenadas y avanzó profundamente en su desarrollo, consiguiendo ver que muchas propiedades de la Geometría euclídea se podían obtener como casos particulares de propiedades proyectivas, lo que le llevó a exclamar: «La Geometría proyectiva es toda la Geometría.»

Posteriormente, Klein elaboró un poco más la idea de Cayley, llegando a formular su definición de Geometría en su famoso *Erlanger Programm*. Según Klein, una geometría era la parte de la Matemática que estudiaba las propiedades de las figuras invariantes respecto de un grupo de transformaciones. Con esto parecía que, si bien la Geometría había dejado de representar el papel principal, no había perdido su personalidad. La definición de Klein deja fuera de la Geometría una gran cantidad de propiedades geométricas, pero tuvo la virtud de desarrollar una teoría importante de la Matemática: la teoría de invariantes; ya que dicha definición reducía la Geometría al estudio de los invariantes del grupo de transformaciones.

Estas ideas llevaron a muchos matemáticos a la tarea de buscar invariantes del grupo de transformaciones que se conocían bien, que era el de las proyectividades. Esta caza del invariante condujo a cálculos simbólicos cada vez más complicados que indicaban que estaba mal planteada. Gracias a que un joven matemático de final de siglo, David Hilbert, se planteó y resolvió el problema fundamental de demostrar que todos los invariantes proyectivos se podían obtener de un número finito de ellos, lo que dio sentido a estos estudios y cerró el problema.

Otro camino para limitar los contornos de la Geometría era dar una nueva axiomática más rigurosa de ella. El primero en seguir este camino fue Pasch en 1882, que publicó su geometría moderna. Es la primera vez que aparece el calificativo de moderna en la Matemática y realmente es el indicador de lo que se había de llamar más tarde Matemática moderna. En efecto, el problema que con todos estos acontecimientos se había planteado era la necesidad de una nueva ordenación de la Matemática, y esto había que realizarlo desde los fundamentos. El libro de Pash no contiene ninguna propiedad nueva de la Geometría, se trata de proporcionar a la Geometría un apoyo más sólido. La axiomática de Pasch posee todavía muchas deficiencias, siendo Hilbert quien más tarde formuló una axiomática rigurosa de la Geometría. Pero esto no bastaba, porque el problema no era sólo de la Geometría, era de toda la Matemática. Era una crisis de crecimiento, que requería revisar toda la Matemática. Peano, con muy fina intuición, se dio cuenta que no sólo la Geometría, sino también la Aritmética necesitaba una fundamentación sólida y elaboró una axiomática del número natural todavía vigente. Pero, con todo esto, faltaba ocuparse del problema completo de obtener una fundamentación rigurosa para la Matemática. Afortunadamente, Cantor había comenzado a desarrollar una teoría de conjuntos, que presentba características idóneas para apoyar sobre ella todo el edificio matemático. Y así se hizo. Se partió del concepto de conjunto como concepto primitivo y sin definir, pero comenzaron a surgir paradojas. Algunas de estas paradojas se atribuyeron al uso del principio del «tertium non datur», por lo que surgió la escuela llamada intuicionista de Brouwer y su discípulo Heyting, que eliminaron dicho principio. Para Brouwer únicamente las demostraciones constructivas eran válidas. Es evidente que las demostraciones constructivas son las más deseables tanto desde el punto de vista utilitario como del estético; pero, desgraciadamente, dentro del intuicionismo, la Matemática queda reducida a casi nada, ya que un problema tan elemental como el de averiguar si dos planos son o no el mismo plano no tiene siempre contestación. Ahora bien, la mayor parte de las paradojas que se presentaron tenían su origen en que se trabajaba con conjuntos que no estaban bien definidos, como es el caso de la paradoja del puente que le presentaron a nuestro señor D. Sancho, el mejor gobernador de ínsulas que en el mundo ha sido, que resolvió aplicando las enseñanzas sabias y prudentes de su señor y maestro, que se concuerdan con la solución de Hilbert en su artículo «Sobre el infinito» de los Mathematische Annalen, en que decía: «Nadie nos arrojará del paraíso que Cantor nos ha creado. Si en él surgen paradojas, nos aplicaremos con todo entusiasmo a analizarlas para

detectar su origen y eliminar las causas.» Esta posición de Hilbert le llevó a atacar frontalmente el problema de la fundamentación de la Matemática. Observó Hilbert que las dificultades que se presentaban en la Matemática provenían, bien de manejar el infinito actual, bien de utilizar procesos infinitos. Por ello partió Hilbert de lo que denominó sistemas formales finitos. Consideró un sistema F formado por un número finito de símbolos, leyes lógicas y axiomas, que contuviera al sistema Z de los números naturales definido por Peano. El problema era demostrar que F no era contradictorio. A pesar de su esfuerzo, durante más de treinta años, no consiguió Hilbert su objetivo. Fue su discípulo Gödel, quien llegó a probar que dentro de F no se podía probar la consistencia de F. Este resultado, aunque negativo, cierra el período de crisis y abre un nuevo campo de trabajo permanente en la Matemática: el de los Fundamentos. Nos encontramos que al final de toda la crisis de la Matemática la solución de la misma coincide con la de nuestro gobernador de la ínsula Barataria, fundamentada en que todo problema tiene solución, por lo que debemos aplicar todo nuestro esfuerzo para encontrarla.

5. Retorno a la Matemática clásica. Fermat había afirmado que, para $n > 2$, la ecuación diofántica $X^n + Y^n = Z^n$ no tenía solución en números enteros. Este teorema, conocido con el nombre del último teorema de Fermat, no ha sido todavía demostrado, pero han sido numerosos los matemáticos de todas las épocas que se han ocupado de él. Uno de ellos fue Kummer, en los años setenta del siglo pasado. Al estudiar este problema introdujo Kummer unos números, que denominó números ideales, que permitieron demostrar la unicidad de la descomposición factorial en cuerpos cíclicos. Estos números fueron generalizados por Dedekind para el estudio de las funciones algebraicas de una variable, creando los llamados ideales, que le permitieron elaborar una teoría aritmética de las funciones algebraicas de una variable, que sistematizaba el estudio que se realizaba a finales del siglo pasado con métodos transcendentes, esto es, empleando las integrales que había introducido Abel sobre una curva algebraica. En el mismo volumen del año 1882 del Crelle's Journal aparecen la teoría de Dedekind de las funciones algebraicas, apoyada en los ideales, y otra algebraización de la misma debida a Kronecker. Estas dos memorias pueden considerarse como el origen de la Matemática

actual, que podríamos designar como de madurez de nuestro ser viviente. Los ideales introducidos por Dedekind permiten unificar el estudio de la teoría algebraica de números y de las funciones algebraicas de una variable, y lo más interesante del caso es que los ideales tienen la misma estructura que las magnitudes de los griegos, que habían sido olvidadas desde el Renacimiento, aunque no su nombre, pues seguía designándose en los libros de Análisis como magnitudes a los números. Los físicos, sin embargo, que están en contacto permanente con el Universo, no pudieron en ningún momento aplicar el funtor olvido a las magnitudes; por esta razón, los espacios vectoriales y el producto tensorial de espacios vectoriales tal como hoy los concebimos aparecieron en la Física mucho antes que en la Matemática. No obstante, las nuevas ideas de Dedekind tardaron en desarrollarse más allá del ámbito en que fueron concebidas. Fue a través de su discípula Emmy Nöther y de la escuela de ésta (E. Artin, Krull, v. d. Waerden) que llegaron a constituir lo que actualmente se denomina Algebra Conmutativa. Paralelamente se desarrollaba el Algebra no Conmutativa a partir de los grupos de permutaciones introducidos por Galois, para estudiar el problema general de la reducción de ecuaciones algebraicas, y de los grupos de transformaciones continuas introducidos por S. Lie. Este período de cuarenta años, en que permanecían latentes las ideas de Dedekind, Kronecker, Galois y S. Lie, acompasaron el desarrollo del Algebra al complementario de la Topología. En 1914 publicó Hausdorff su Teoría de Conjuntos, que impulsó el desarrollo sistemático y riguroso de la construcción de los espacios, tal como hoy los concebimos, llamados topológicos, y, con ello, la otra estructura fundamental de la Matemática actual, la topológica. Alrededor del año 1930 se publicaron los dos primeros libros organizados de acuerdo con la nueva ordenación de la Matemática: el *Algebra Moderna*, de V. der Waerden, dentro de la escuela de E. Nöther, y la *Introducción a la Topología*, de Seifert-Threffall. Estos dos libros facilitaron la formación de los estudiantes de matemáticas de aquellos años de acuerdo con la nueva ordenación de la Matemática y permitieron que esta nueva generación de matemáticos asumieran la labor propia del momento, cual era la reconstrucción de la Matemática a partir de las estructuras algebraicas y topológicas, que permitían demostraciones rigurosas. Hubo que plantearse todos los problemas desde el principio, hallar las nuevas formulaciones de los mismos dentro de dichas estructuras y dar demostraciones correctas de todos los teoremas ya conocidos. A esta labor contribuyó de un modo destacado un grupo de jóvenes matemáticos franceses, en los mencio-

nados años treinta, que se organizó bajo el pseudónimo de Nicolás Bourbaki. El plan de trabajo que se propuso este grupo fue muy ambicioso: comenzaron por escribir un capítulo sobre Teoría de Conjuntos, continuaron con el capítulo de Algebra Lineal, otro de Topología, otros de Teoría de Funciones, Algebra Conmutativa, Algebra y grupos de Lie, Variedades diferenciales y analíticas, etc., ya que todavía siguen apareciendo nuevos capítulos. A la obra le dieron, con justicia, el nombre de *Elementos de Matemática*, ya que pretendían, y en lo posible lo han conseguido, que fuese el sustituto de los *Elementos de Euclides* para el futuro. La aportación de esta monumental obra, algunos de cuyos capítulos constan de diez volúmenes, para la Matemática ha sido extraordinaria. La forma de trabajo del grupo ha consistido en reuniones periódicas del mismo, unas cuatro por año, a las que denominan Seminarios, en las que se exponen y estudian los resultados, tanto propios como ajenos, que se consideran de interés para el progreso de la Matemática, y que en su día pueden llegar a constituir un nuevo capítulo o un nuevo fascículo de algún capítulo ya existente.

El grupo se ha ido renovando al transcurrir los años y procuran incorporar al mismo a los jóvenes matemáticos con mayor capacidad creativa. En el último Seminario del mes de junio se llegó al «exposé» número 542. Afortunadamente para la Matemática, y aunque la idea de N. Bourbaki era mantener al día el libro actualizando las sucesivas ediciones, esto es prácticamente irrealizable como consecuencia del constante avance del pensamiento matemático, pero, en cualquier caso, constituye un punto de referencia sólido para el trabajo del matemático.

Pero no olvidemos que nos encontramos en una clase de Geometría, así que volvamos a nuestro tema. Lo primero que nos tenemos que preguntar es si la Geometría ha sobrevivido a todos estos profundos cambios de estructuras o si ha quedado desguazada en la tormenta y dispersadas sus cuadernas. Ya hemos visto que, a partir de la involuntaria contribución de Staudt, la Geometría se incorporó a la Matemática, que Cayley y Klein creyeron salvar su personalidad como Geometría proyectiva, y que después de la crisis no hemos vuelto a encontrarla. Esto ha sido intencionadamente, porque necesitábamos previamente el marco actual de la Matemática para poder situar en él las vicisitudes de la Geometría. Lo que murió con la incorporación de la Geometría a la Matemática fue la llamada geometría pura, pero en la última mitad del siglo pasado la Geometría continuó desarrollándose. Por un lado, se estudiaron figuras y transformaciones definidas por polinomios; por otro, se continuó el estudio de propiedades de curvas y superficies con el auxilio del Análisis Matemático. Los primeros estudios llegaron a constituir la Geometría Algebraica y los otros la Geometría Diferencial.

Las nuevas aportaciones de Dedekind y de Kronecker supusieron una algebraización de la Geometría Algebraica, que permitió, en manos de V. der Waerden y Zariski, su construcción sólida y rigurosa.

Lo primero que se consiguió fue resolver el problema planteado en la primera página de los *Elementos de Euclides* relativo a la definición VI de curva en el caso de variedades definidas por polinomios, alcanzándose una definición correcta y utilizable de variedades algebraicas y, como consecuencia, de correspondencias algebraicas. Por otro lado, en la Geometría diferencial se resolvió el mismo problema al llegar a definir las variedades diferenciables. El concepto de variedad diferenciable, por extensión, dio lugar al de variedad topológica y, por especialización, al de variedad analítica.

En el estudio de las variedades analíticas aparece de modo natural el concepto de haz estructural (Cartan-Leray), que Serre traslada al caso de las variedades algebraicas, quedando de esta forma resuelto de modo completo el problema de averiguar la relación entre las dos definiciones de curvas de los Elementos. Con todo esto no se había conseguido más que fundamentar las primeras definiciones de los Elementos de Euclides, pero la Geometría quedaba por hacer. Se estaba ahora en condiciones de comenzar a demostrar la gran cantidad de resultados obtenidos entre 1850 y 1950 tanto en el campo de la Geometría Algebraica, por las escuelas geométricas italianas y alemanas y, empleando métodos trascendentes, por la escuela francesa, y en el campo de la Geometría Diferencial, por franceses e italianos. En el campo de la Geometría Algebraica surge a mediados de este siglo un extraordinario matemático, A. Grothendieck, que se propuso, por sí solo, la inmensa tarea de organizar todos los conocimientos existentes de Geometría Algebraica y comienza a publicar una obra monumental, cuyo título lleva de nuevo la palabra «elementos». Se trata de los *Elementos de Geometría Algebraica.* En la introducción de este libro dice el autor que su objetivo es el de llegar a entender él la Geometría de la escuela italiana. Los trabajos de Serre le proporcionan ya elaborando el concepto de variedad algebraica, que él generaliza sustituyéndolo por el de «esquema». Pero para estudiar Geometría hay que añadir algo, correspondiente a las magnitudes que los griegos habían utilizado en el espacio euclídeo, y este concepto adecuado para poder formular y demostrar los resultados de la escuela italiana resulta ser el de haz de módulos. Ahora bien, un haz de módulos no es sino una generalización de la idea de magnitud de los griegos, con lo que se cierra el ciclo y nos encontramos con el sorprendente hecho de que al reconstruirse la Geometría tras la gran crisis de principios de siglo vuelve a tomar el mismo aspecto que tenía para los griegos.

Este retorno de la Geometría a su estructura original permite vaticinar que volverá a desempeñar un importante papel para el estudio de la Física y, efectivamente, ya ha comenzado a realizarse esta conjetura, pues hace poco más de un año, Atiyah consiguió, con sorpresa tanto de matemáticos como de físicos, unas interesantes aplicaciones de la Geometría Algebraica actual al estudio de un importante fenómeno físico.

Efectivamente, la Geometría no ha muerto. Lo que sucede es que para poder decir qué es la Geometría no bastan cien palabras. Es necesario emplear muchos libros de muchas páginas, del mismo modo que para definir a una persona es necesario verle actuar durante toda su vida. La Matemática actual se parece más a la Matemática griega que a la de los tres siglos precedentes, por lo que su nombre más adecuado es el de Matemática Clásica.

6. Epílogo. La nueva fundamentación de la Matemática se apoya en un principio bien simple, que se puede enunciar así: «Para poder demostrar con rigor las proposiciones es necesario vaciar de contenido a los conceptos primitivos, limitándose a establecer el mecanismo lógico permitido y las relaciones fundamentales entre dichos conceptos.»

La situación es la misma que la de los juegos de naipes: un juego está caracterizado por sus reglas y puede jugarse con cartas españolas o francesas indistintamente, siendo independiente del significado que se atribuya a las cartas. En estas condiciones siempre se puede comprobar si una jugada es correcta o no, con la única condición de que las reglas no sean contradictorias. Como hemos visto anteriormente, a estos conjuntos, formados por unos signos o nombres que representan los conceptos, por las leyes de la lógica que se utilice y por las relaciones entre aquellos signos, les denominó Hilbert sistemas formales. Por tanto, la Matemática trabaja con sistemas formales. Aunque, en principio, cualquier sistema formal no contradictorio puede ser objeto de estudio en la Matemática, únicamente aquellos que se han extraído de un problema de interés dentro de la Matemática ya construida o de las ciencias experimentales se consideran como sistemas de interés científico.

Los sistemas formales son importantes porque han permitido la nueva ordenación de los conocimientos matemáticos, así como conseguir demostraciones controlables, pero no hay que olvidar que no son la parte esencial de la Matemática. Hemos visto que la Matemática tiene una característica permanente: la de ocuparse de estudiar y resolver problemas. Estos problemas aparecen agrupados, a lo largo de toda la vida de la Matemática, en los siguientes tres grandes problemas:

1.º) *Problemas lineales.*—Esencialmente estos problemas tratan de averiguar si un conjunto de vectores, o de elementos de un módulo, son linealmente dependientes. Este problema comienza con la teoría de la proporcionalidad del libro V de Euclides y con los problemas multilineales que hemos señalado anteriormente. Continúan con los problemas lineales de la Geometría Analítica de Descartes, así como con los problemas lineales de la Geometría Proyectiva de Staudt, sistemas lineales de la Geometría Algebraica italiana, haces de módulos coherentes de la Geometría Algebraica de Grothendieck, grupos de cohomología, grupos abelianos, teoría algebraica de números, espacios vectoriales topológicos, etc.

2.º) *Problema de la medida.*—Comienza con la teoría de magnitudes del libro V de Euclides y el producto tensorial de los libros VI, VII, VIII y IX; el cálculo de áreas de polígonos y de volúmenes de poliedros, ya citado en los Elementos, con el método de exhaustación. Continúa con el cálculo integral de Newton y Leibniz, y el teorema de Stokes. Su formulación completa da lugar a la teoría de la medida. Por otro lado, dentro de este problema de medida figura el teorema de Pitágoras, los espacios métricos, etc.

3.º) *El problema de la aproximación local.*—Aparece este problema tan pronto como se usan números decimales en las operaciones aritméticas. Su primera formulación y resolución general dio lugar al cálculo diferencial de Newton y Leibniz, con el teorema de Taylor y, posteriormente, los de la función implícita y preparatorio de Weierstrass, el estudio local de las ecuaciones diferenciales, los problemas de acotaciones de la teoría trascendente

de números. La formulación más general del problema dio lugar a los espacios topológicos.

Es evidente que se pueden citar muchas teorías importantes de la Matemática actual que seguramente sería difícil incluir en alguno de estos tres grandes problemas, por ejemplo, la teoría de grupos finitos, los grupos de Lie, etc. Pero, no obstante, creo que estos tres problemas encierran aquella parte de la Matemática con más aplicaciones tanto dentro de la Matemática como en las otras ciencias, por lo que en ellos debe centrarse la formación del matemático y del utilizador de la Matemática. Otra cuestión es la del especialista en un determinado tipo de problemas.

La nueva estructuración de la Matemática planteó el problema de adecuar a ella su enseñanza a todos los niveles. A partir de 1960, el número de reuniones internacionales para el estudio de este problema fue creciendo extraordinariamente y en muchos países se llevaron a cabo importantes reformas de los planes de estudio, desde el jardín de infancia hasta la Universidad. Ha transcurrido ya suficiente tiempo para que pueda hacerse una crítica de los resultados obtenidos con esta reforma. Evidentemente que ha habido muchas diferencias en la reforma de un país a otro; pero, sin embargo, la crítica negativa tiene las mismas características en todos ellos, variando, naturalmente, las peculiaridades y su gravedad en cada país. Se pueden enunciar esquemáticamente los siguientes hechos: 1.º) En las enseñanzas primaria y secundaria se pasó de unos métodos memorísticos y dogmáticos apoyados en materiales de descomposición de los Elementos de Euclides a otros de las mismas características apoyados en la teoría de conjuntos.
2.º) En los mencionados grados quedó partida la enseñanza en dos partes sin conexión entre sí; la que se llamaba matemática moderna y la de la enseñanza tradicional, con lo que únicamente se consiguió alargar los programas y provocar más dispersión de conocimientos. 3.º) La enseñanza superior se atomizó en el estudio independiente de las nuevas teorías, inconexas entre sí y alejadas de los problemas que las habían originado. 4.º) En la enseñanza primaria y secundaria se implantaron los nuevos planes sin tiempo para que el profesorado pudiese asimilar y adaptarse a las nuevas técnicas.

Consecuencia de todo esto: el problema de la enseñanza de la Matemática necesita un estudio permanente. No existen fórmulas mágicas para resolver los problemas humanos, pero sí existe la posibilidad de ir corrigiendo defectos aprovechando la experiencia de los fracasos. La mayor enseñanza que se puede obtener de las reformas que se han efectuado es que hay que evitar las precipitaciones y los saltos en el vacío. Procuremos formar maestros cada vez mejores y lo demás vendrá dado por añadidura. En este momento habría que comenzar por precisar qué metas conviene alcanzar en cada grado de enseñanza y ponerse pacientemente a estudiar la forma de alcanzarlas. Este estudio debe relizarse conjuntamente por los maestros de todos los niveles, sin prisas y sin pausas. He aquí, alumnos de la Universidad, un trabajo importante que os espera, que vosotros no podréis terminar, ni los discípulos de vuestros discípulos, pero que por eso mismo no debe jamás abandonarse.

La nueva ordenación de la Matemática ha ampliado notablemente el campo de cuestiones que esperan ser estudiadas y proporciona útiles de trabajo más precisos y seguros para atacarlos, por lo que la investigación de iniciación, esto es, la correspondiente a tesis doctorales ha progresado y mejorado notablemente. En España, sin que pueda tachársenos de triunfalistas, se ha llegado en este aspecto a la elaboración de tesis doctorales de buen nivel internacional gracias a unas cuantas individualidades, distribuidas por toda nuestra geografía, que hicieron el esfuerzo de ponerse a la altura de los tiempos, a pesar de tratarse, como se habrá podido observar, de los tiempos más activos de la vida de la Matemática. Pero al lado de esta investigación existe la de los problemas importantes. Ahora bien: ¿cuáles son los problemas importantes? Esta pregunta se hizo Hilbert en su comunicación al Congreso Internacional de Matemáticos celebrado el año 1900 en París.

Hilbert comienza por reconocer que: «Es difícil, y frecuentemente imposible, juzgar *a priori* el valor de un problema; pues el premio final depende de la ganancia que la ciencia obtenga de su solución.» No obstante, más adelante Hilbert dice: «Permítaseme intentar formular a continuación algunos problemas concretos, de varias ramas de la Matemática, de cuya discusión cabe esperar un avance de la Ciencia.» Hilbert propuso entonces veintitrés problemas. La importancia de estos problemas ha quedado probada *a posteriori*. Los mejores talentos se han ido ocupando de ellos, pero muchos de los problemas quedan todavía por resolver. La mayor parte de ellos han contribuido efectivamente al avance de la Matemática. En el último Seminario Bourbaki, del pasado mes de junio, figura una exposición relativa al problema número dieciséis.

Todavía no se vislumbra la solución de este problema, que merece la pena enunciar como ejemplo. Dice Hilbert: «Creo de gran interés investigar la posición relativa de las componentes reales de una curva algebraica plana del plano proyectivo real cuando el número de ellas es máximo.» Todo esto prueba que los pocos creadores de pensamiento científico que aparecen en el mundo tienen una visión profunda de la ciencia que les permite ver qué problemas son importantes. Corroborando esta opinión, confirmada en el caso de Hilbert, la Sociedad Matemática Americana publicó hace dos años un par de volúmenes en los que se daba cuenta del estado actual del estudio de los veintitrés problemas de Hilbert y, además, se proponían otros veintisiete nuevos problemas, relativos a todos los campos de la Matemática, presentados por destacados matemáticos actuales, cuya solución se estima importante en este momento para el desarrollo de la Matemática. Este tipo de investigación en los grandes problemas de nuestro tiempo es el que, a mi modo de ver, no tenemos aún en nuestra patria. El estudio de estos problemas es un reto para la juventud actual. Hacen falta ingeniosos hidalgos que se lancen con ímpetu y entusiasmo a esta empresa; jóvenes con voluntad y talento, y, si hemos de hacer caso a D. Santiago, basta con la voluntad.

Nada más por hoy. Hasta mañana.