NÁCERE HAYEK
CATEDRATICO DE ANALISIS MATEMATICO
DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

Los orígenes de la matemática moderna

DISCURSO INAUGURAL
DEL AÑO ACADEMICO 1974 - 75

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
TENERIFE
MCMLXXIX

NÁCERE HAYEK

CATEDRATICO DE ANALISIS MATEMATICO
DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

Los orígenes de la matemática moderna

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADEMICO 1974 - 75

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
TENERIFE
MCMLXXIX

Magfco. y Excmo. Sr. Rector,
Excmos. e Iltmos. Sres.,
Claustro universitario,
Alumnos de esta Universidad,
Señoras y Señores:

Es tradicional que por estas mismas fechas, todas las Universidades españolas solemnicen con ceremonial análogo la inauguración de sus nuevos cursos académicos. En general, en los actos se repiten escenas de otros anteriores. A sus paraninfos, junto a las autoridades del distrito respectivo y de su Claustro universitario, acuden estudiantes que cruzan por vez primera un recinto de enseñanza superior con el afán de aprender en la mente, otros con experiencia de sus aulas; profesores que han cesado en su ejercicio para sentir la natural nostalgia, quizás avivada en el transcurso de los mismos; otros discentes también que se incorporan al quehacer universitario para los que se abren amplias perspectivas de promesas y esperanzas; y finalmente, un auditorio heterogéneo constituido por personas de dedicaciones varias. Y en esta hora, en esta Universidad de La Laguna que con este acto de hoy abre sus puertas, una vez más, a un nuevo ciclo educativo, un pensamiento me domina: el de mis otros colegas sobre los que ha recaído también el alto honor de pronunciar la lección magistral. Pues creo que la mayoría de ellos, se hayan representado igual que yo, cuando hubo llegado el momento de comenzar a redactar su discurso, la hermosa y tentadora visión de una sala, a modo de aula solemne, con ese público más ampliamente cuantificado y cualificado que el de sus clases usuales; y padecieran luego, lo mismo que yo, las horas de incertidumbre, de desorientación y de desánimo, en cuanto a la elección del tema y al lenguaje apropiado para exponerlo. Vaya para ellos el recuerdo emocionado por las vicisitudes sufridas, de este compañero que contendió en iguales lides, y que hago extensivo a los ilustres enseñantes que nos precedieron en similares circunstancias.

Comentaba hace poco con algunos de mis colegas, que sabían de mi estado de preocupación, que lo más fácil en estos muy extraordinarios casos, sería verter una lección del área de la propia especialidad de cada cual, sobre todo cuando, como en los momentos actuales, el tiempo de nuestras normales ocupaciones nos agobia y, ciertamente, en grado sumo. Mas debo confesar que, a la par que lo decía, interiormente sopesaba que para un matemático esto es decididamente temerario, porque se corre, sin duda alguna, el riesgo de someter a quien nos escucha, salvo en muy rara excepción, a unas desagradables fases de sopor, aburrimiento o exasperación, bastante incómodas para el discursista.

Convencido de ello, y seguramente al igual que otros ilustres colegas que han tenido que pechar con el entorchado de una especialidad matemática, no apta como verbo para la solemnidad de estas ocasiones, desterré por completo la posibilidad de desarrollar una lección con argumentos provistos de fórmulas y teoremas, integrales y ecuaciones.

Y decidí elaborar un tema, que luego denominaría «Los orígenes de la matemática moderna», el cual, si bien es verdad que en principio me situó con horizontes de redacción más esperanzadores en cuanto al temor que me embargaba, me hizo sumir no obstante más tarde, en un inquietante estado de cavilaciones, porque ni aún así pude sustraerlo del todo de algunas abstrusas complejidades. Esto constituyó desde luego, razón harto suficiente para que el contenido del tema elegido resultara peculiarmente aleatorio. Figura, en consecuencia, algo de matices superiores, por otra parte absolutamente precisos, una visión panorámica de sucesos históricos con las singulares herencias que nos legaron sus protagonistas, y también pinceladas diversas de adjunciones ilustrativas que no revelan más que la intención clara de eludir la árida y abstracta matemática obligada sólo al especialista. Con todo, la esencia y gran parte de su contexto, llegó a ser, en definitiva, algo así como la de una lección de clase. La primera lección que, con la venia del Rector y seguro de contar con su satisfacción, dedico a los alumnos de cualquier carrera que hoy aquí se encuentren.

Comenzamos esta lección con un preámbulo que nos encamina en forma natural a la iniciación del tema y además la justifica; y damos término a la misma, sin el habitual resumen de conclusiones que, en este caso y por la índole de lo tratado, estimamos innecesario, sustituyéndolo por unas simples, aunque serenas frases de reflexión en torno a la matemática del futuro.

Acabadas estas consideraciones preliminares, cabe sólo pedir para la exposición que acto seguido se inicia, vuestra benévola acogida.

* * *

La enseñanza de la matemática en la Universidad, si bien podía ser considerada excelente en 1900, no hubiese sido capaz de soportar la marcha del tiempo, por encontrarse invadida de hábitos caducos y falsas tradiciones, amén de algunos tópicos nocivos.

Hasta hace escasamente unos años, la matemática viviente, la savia de la matemática de la investigación, la matemática que hacía tiempo se creaba, no era inyectada prácticamente en ningún país a la matemática que se transmitía al estudiante universitario. Esto provocaba una decadencia progresiva que hacía presumir, en algunos casos, el advenimiento de una peligrosa parálisis.

Para mostrar un fiel que permita reflejar (y sin duda alguna, por exceso) el nivel medio europeo, digamos que en Francia, cuna de tantos genios matemáticos, en el año 1950 y un poco antes de las primeras reformas de la matemática en la enseñanza universitaria, el profesor André Revuz, feroz defensor de la corriente innovadora, esgrimía esta terrible balanza:

Un alumno de la escuela primaria sabe apenas más que los babilonios, que vivieron ocho siglos antes de Jesucristo.

Un bachiller quizás sepa algo más que Arquímedes, que vivió tres siglos antes de Jesucristo.

Un alumno de Matemáticas especiales, por el contrario, sabe menos que Euler, faro de esta ciencia en el siglo XVIII.

Un Licenciado en Ciencias sabe menos de Weierstrass, uno de los primeros analistas del mundo hacia los años 1870.

En consecuencia, incluso un estudiante que hubiese optado por matemáticas y recién acabara su licenciatura, no sabría nada o casi nada de la revolución que, en los albores del siglo XX, había agitado al universo de las ciencias exactas, conduciéndolo a esa realidad actual que se denomina matemáticas modernas.

Debiera entenderse bien, ya desde ahora, que el adjetivo *moderno* es inexacto, por cuanto si las matemáticas tituladas modernas han establecido su imperio en este siglo XX, sus orígenes son mucho más lejanos.

En general, no son sólo las coyunturas importantes en el fluir de la historia de las culturas del mundo, las que deciden su división en períodos; esta división depende también de los que la escriben (y de cómo la escriben).

Por ejemplo, según algunos viejos historiadores, 1453, fecha de la toma de Constantinopla por los turcos, separa las Edades Media y Moderna, y lo que aconteciera después de 1789 (Revolución francesa), se convino que perteneciera a la Edad Contemporánea, encontrándose así que la derrota de Napoleón en Waterloo y el primer alunizaje del hombre en 21 de Julio de 1969 constituyen acontecimientos de la Historia Contemporánea.

El transcurso del tiempo es natural que diluya el calificativo de *moderno*, y lo que en el período de transición actual se llama «matemática moderna» engloba, en realidad, algunos fragmentos de la matemática de los siglos XVII, XVIII y XIX e incluso quizás, la totalidad de la matemática de la Edad Media y de la Antigüedad. Mas, sin tener por qué ser tan ampulosos, digamos más estrictamente, que las raíces de lo que hoy se conoce como *matemática moderna*, se remontan a los alrededores de 1800, a una etapa singular en la que se introdujo el rigor en el análisis matemático. Y el rigor en nuestra ciencia no es otra cosa que el cuidado de no admitir más que lo que ha sido demostrado por un razonamiento y fijar con precisión las bases de todo razonamiento.

Resulta asaz sorprendente que ese cuidado no reinara en todo tiempo en la conciencia de la pléyade matemática. Testimonio fehaciente lo constituye el desarrollo de las matemáticas en los siglos XVII y XVIII, en los que la secuela de discípulos y continuadores de la obra de I. Newton (1642-1727) y G. W. Leibniz (1646-1716), si bien conduce a sus colosales creaciones, los cálculos infinitesimal e integral, a una encomiable cima de esplendor, inquieta seriamente a científicos y filósofos de la época por sus audacias en los resbaladizos dominios del infinito e infinitésimo, que se encontraban en la base de todo cálculo, particularmente promovidas por una incontrolada llamada a la intuición.

No obstante, los rápidos progresos alcanzados en los citados siglos, impelieron a que la matemática entrara en el siglo XIX (para muchos, el siglo de la matemática pura) en un período de tumultuoso desarrollo que aunque nos impida una caracterización fácil, cabe que le podamos endilgar como signos característicos suyos, la crítica de los fundamentos (primero en los del análisis, que bien pronto se extenderían a la geometría, y más tarde también a la lógica, llevando los resultados muy lejos del punto de partida) y una tendencia a la generalización que pugnaba por liberar a la matemática de presunciones intuitivas y físicas, considerándola como objeto de estudio en sí, nítidamente independiente de la filosofía natural.

Esos signos promoverían en algunos sectores matemáticos, en la primera mitad de dicho siglo XIX, una atenta preocupación por el rigor, esfuerzo que se desmelena en la segunda mitad, obligando al sabio a crear nuevos cauces. Prueba innegable son gestaciones tales como: teoría de grupos, geometrías no euclidianas, teoría de conjuntos, topología y, en síntesis, lo que hubo de ser precisamente la sustancia originaria fundamental de las matemáticas modernas.

Desde nuestro punto de vista, la modernización actual del vocabulario matemático, o si se prefiere, esa expresión que se ha titulado *matemáticas modernas,* exige invocar, hablando en forma concisa, justamente a los siguientes reductos que ligamos a sus artífices principales:

Evariste Galois, iniciador de la teoría de grupos; Augustin Cauchy, padre del rigor en análisis; N. I. Lobatchevski, pilar de las geometrías no euclidianas; Georg Cantor, creador de la teoría de conjuntos; David Hilbert, fundador de una construcción axiomática de la geometría, y Nicholas Bourbaki, presentador sistemático de la matemática contemporánea.

Una panorámica de esos reductos, de esas fuentes originarias, detenida en algunos de ellos, con visión necesariamente más rápida para el resto, mas persiguiendo un trato de conjunto que proporcione un concepto claro del advenimiento y motivación de la matemática actual, va a constituir el objetivo de esta lección. El objetivo principal. Porque nos anima otro deseo, importante también y que debiera llevarlo implícito el contenido de la misma. Y es el de que la temática tratada pretendemos que desemboque inequívocamente en una identificación absoluta entre *matemática* y *matemáticas,* en la visión de una matemática única, en una matemática que durante mucho tiempo ha permanecido dispersa y que ha llegado, al fin, a ser una sola.

Y en aras de ese deseo, permítasenos añadir unas breves consideraciones, para penetrar, acto seguido, en el tema.

Ciertamente, las matemáticas estaban en trance de convertirse en un maremagnum de disciplinas autónomas, esparcidas y divorciadas unas de las otras, no sólo en cuanto a sus misiones específicas, sino también en sus métodos y hasta incluso, en su lenguaje. La conexión con otras ciencias venía menguando visiblemente y para colmo, representantes de disciplinas matemáticas diferentes, en general casi no se comprendían entre sí. Se fraguaba una peligrosa pérdida de unidad y de cohesión, que hacía campar por sus respetos la visión de varias matemáticas con intereses divergentes.

Por otra parte, durante los últimos dos mil años las matemáticas habían experimentado un desarrollo de tal envergadura, que se tenía que proceder apremiantemente a una reestructuración y a una simplificación del material acumulado, por cuanto es obvio que el progreso científico no puede contentarse con un simple y continuo crecimiento de conocimientos; bastaría pensar, por ejemplo, en la enseñanza, y en el problema de transmisión que se le plantearía, hasta acabar por ahogarla sin remisión, si no se resumiera y canalizara debidamente la cosecha recogida.

Unificar, sintetizar, refundir y simplificar se hizo, por tanto, absolutamente preciso. Era terrible pensar, por sus graves consecuencias en las principales dos vertientes señaladas, que sólo los años transcurridos del siglo XX, posiblemente estaban contribuyendo al progreso científico más que todos los siglos precedentes juntos. Demostraciones nuevas más concisas y más simples y, al mismo tiempo, más asimilables y claras, debían conducir a un progreso más racional. De otra manera, el problema de pasar la antorcha a cada nueva generación llegaría a ser completamente imposible.

Quizás sin quererlo, acabamos de dar una definición de esa actual matemática reformada, que para muchos espíritus ceñudos e inquietos asume caracteres de auténtica revolución.

La matemática, naturalmente, es una sola. Convendría añadir que se prosigue haciendo matemática clásica y se continuará haciéndola en el futuro; mas debiera destruirse, como antes se dejó puntualizado, el sentido histórico de los calificativos «moderno» y «clásico», y considerar sencillamente (según se afirma ya en algunas publicaciones) como *polivalentes* a las teorías modernas y *univalentes* a las clásicas.

Está hoy fuera de duda, que el recurso a la teoría de conjuntos de Cantor para la cimentación de la matemática que ahora se enseña, ha sido la madeja esencial con la que se ha entretejido el bordado más sencillo, más elegante y más eficiente, con repercusión además, a todas luces, en grandes adquisiciones.

La matemática postcantoriana se hace, por ende, responsable de sí misma y de su valor en la historia. El tratamiento a través de la teoría de conjuntos que se inculca hoy a la juventud estudiosa prácticamente desde la cuna (y no se olvide que en ella se gestan futuros matemáticos), promete ser uno de los temas unificadores más poderosos de la historia de las matemáticas.

Y de esa historia, vamos a extraer las decisivas fuentes de esta matemática de nuestros días, iniciando así la panorámica anunciada.

La *matemática actual es una axiomática de la teoría de conjuntos*. Estudia principalmente estructuras, lo que equivale a decir, que analiza todas las consecuencias lógicas de sistemas de axiomas referidos a los conjuntos. Y la matemática se constituyó en la ciencia de las estructuras con Evariste Galois. Este joven matemático francés, fallecido en un duelo en la madrugada del día 30 de Mayo de 1832, cuando sólo tenía 21 años, se había enfrascado durante algún tiempo en el problema de encontrar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones algebraicas de grado cualquiera, por radicales. El ya sabía que sus predecesores, una vez que hubo sido descubierto el procedimiento de resolver ecuaciones hasta las de cuarto grado, presumían naturalmente que pudieran existir también fórmulas para la resolución de las de grado más elevado. Pero Galois tuvo la osadía de dudar de la existencia de tales fórmulas generalizadas, y emprendió otra senda distinta, decidiendo no afanarse en efectuar cálculos, sino mostrar sólo un proceso que condujera a algún resultado. Según su propia expresión, hoy ya célebre, quería hacer el «análisis del análisis», o dicho de llana manera [1], «reemplazar cálculos por ideas». Su trato nuevo del problema le permitió probar que no existía fórmula general alguna que representara la solución de todas las ecuaciones algebraicas, cualquiera que fuese su grado; y ése constituyó su gran resultado. Pero además,

---

[1] En frase de Lejeune-Dirichlet.

el trabajo innovador de Galois condujo a un concepto fundamental, el de la hoy considerada estructura más sencilla e interesante, la noción de «grupo» (conjunto de elementos para los cuales se define una operación similar a la multiplicación ordinaria), y que había de penetrar poco a poco en todos los dominios de las matemáticas.

De la obra de Galois, de escasamente unas 60 páginas, demasiado avanzada para su época, no podemos ocuparnos desde el punto de vista técnico. Sólo diremos que después de un largo letargo, le ha sobrevivido, y mejor aún, que se heredaron las esencias de su método, ese proceso de hacer bien el análisis del análisis, progenitor de las matemáticas modernas.

Da pena pensar que durante siglos los geómetras perdieran un valiosísimo tiempo empecinados en dar solución a problemas irresolubles [2]. El método de Galois logró dar el espaldarazo definitivo a todo intento de buscar unas soluciones generales para los, por ejemplo, antiguos famosos enigmas de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

No podemos evitar reproducir la singular definición siguiente, escrita por Galois: «La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad, como a encontrarla».

No sería Galois, sin embargo, quien le proporcionara a la matemática actual su entronque crucial, la teoría de conjuntos, cuyos matices generales esbozaremos con posterioridad; debemos tratar antes de procesos de axiomatización, porque nuestra ciencia acaba de ser definida como una axiomática de la misma.

Primero y por lo árido del tema, lo haremos en forma general; luego, con un trato más especializado.

---

2 Los griegos se encerraron en un laberinto absurdo al querer concebir toda la geometría con el empleo exclusivo de la regla y el compás. Y lo más curioso era que nadie se preocupó en indagar la imposibilidad de ciertas construcciones.

Una ciencia en la que *todo* se define y *todo* se demuestra era el ideal de Platón. Hoy se sabe que esto no pasa de ser una quimera. Basta pensar con detenimiento en las palabras definir y demostrar.

Si tomamos una obra científica, la abrimos por cualquier parte y nos afanamos en ir hacia atrás, esperando que todos los entes de naturaleza cualquiera que aparezcan, estén escrupulosamente definidos, y toda afirmación rigurosamente demostrada, desembocaremos en un callejón sin salida.

Nada mejor para adentrarnos confortablemente en la materia, que el siguiente ejemplo, elemental y enormemente gráfico, que leímos en una reciente publicación [3]:

Tomemos un diccionario. Se dice que en él están todas las palabras explicadas. Una palabra cualquiera se encuentra ciertamente expresada con otras palabras y el significado de cada una de estas últimas aparece ilustrado en una oportuna página. Mas si queremos seguir analizando cada palabra que vaya compareciendo, es obvio que el proceso no pueda continuarse indefinidamente, porque el número de palabras del diccionario, por voluminoso que éste sea, es siempre limitado, lo que implica que se deba incurrir en reiteraciones (o círculos viciosos). Ponderemos que el autor sólo ha perseguido objetivos de carácter literario y lingüístico; pero si se hubiese propuesto miras de índole lógica, tendría que dirigirse en el Prólogo al lector para decirle: Querido lector, te ruego des por conocido el significado de las siguientes veinte o treinta palabras (las que fuesen necesarias), y con su auxilio te explicaré todas las demás; pero aquéllas son absolutamente indispensables y constituyen el punto de partida.

Pensaríamos entonces no en el diccionario como tal, sino en su estructura, y podríamos decir que el diccionario estaría lógicamente construido.

Junto a esta idea de una construcción de tipo axiomático y para ofrecer una mejor visión de consideraciones generales en torno de esta nada fácil problemática, es oportuno mos-

---

[3] Luigi Campedelli —«Fantasía y lógica en la matemática»— Ed. Labor, 1970.

trar la perspectiva de una teoría científica a través del prisma de un sistema hipotético-deductivo, y a la matemática como al conjunto de todos los sistemas de este tipo.

En una teoría científica, los conceptos base o primeros asumen un papel de protagonistas en las afirmaciones contenidas en ciertas proposiciones que son las de partida y que constituyen lo que se llama postulados o axiomas. Desde un ángulo lógico son esenciales solamente las conexiones que los postulados establecen entre aquellos conceptos primeros. Estos postulados básicos adquieren de esta manera el valor de hipótesis absolutamente marginadas de circunstancias extrañas. De nuestra decisión depende aceptarlos o no, para en su caso, naturalmente, obtener o no, capítulos de nuestra ciencia. Quedamos orientados entonces hacia razonamientos hipotético-deductivos, en lugar de a razonamientos deductivos que apuntan sólo a generación directa de la deducción, para poner en evidencia que los razonamientos proceden esencialmente de las hipótesis. Se llega así a la noción de que nuestra teoría científica no es más que un sistema hipotético-deductivo, es decir, el conjunto de las consecuencias lógicas que se desprenden de un sistema cualquiera de postulados entre ciertos conceptos primarios prefijados.

Pues bien, la matemática de ahora quiere aparecer como el conjunto de *todos los posibles sistemas hipotético-deductivos*. Al término de una larga evolución en la que trató denodadamente de desprenderse de los conceptos fundamentales que le enraizó la intuición, opera hoy con entes que, en último extremo, son sólo elementos de naturaleza no precisada que pertenecen a uno o más conjuntos exclusivamente definidos por las propiedades afincadas en un *sistema compatible de postulados*, siendo por virtud de esto *cierta* una propiedad si es lógicamente deducible de este sistema.

Y no está de más ya adelantar que cuando la matemática se concibe como el conjunto de todos los sistemas hipotético-deductivos, se aprende en la actualidad (ya lo hemos dicho antes, y es oportuno repetirlo) que la teoría general de los conjuntos aparece como una doctrina preliminar a cualquier desarrollo matemático. Si a los entes de naturaleza abstracta, con los cuales se desenvuelve una teoría matemática, se les despoja de toda propiedad impuesta por los postulados de un sistema hipotético-deductivo, tales entes devienen finalmente, ni más ni menos que elementos de un conjunto. Los conceptos y resultados de la teoría de los conjuntos constituyen hoy, por tanto, la base de toda teoría matemática.

Es precisamente tal circunstancia la que hizo reinar la idea de sistematizar en un todo orgánico, los conocimientos matemáticos, partiendo de dicha teoría de conjuntos, para dar paso a la denominada matemática *abstracta*, la actual, en la que se encuadran varias teorías y conceptos, que ya se recalcó se desenvolvían antes de modo autónomo e independiente. El resultado obtenido incluye tal *economía de pensamiento,* que en verdad se revelaba como absolutamente necesaria ante el continuo cúmulo creciente de conocimientos y desarrollos matemáticos.

No extrapolemos más este inciso. A la teoría de conjuntos, a una necesariamente breve exposición de su origen y caracteres principales, ya hemos advertido que nos referiremos en un lugar posterior. Porque al hablar de sistemas hipotético-deductivos, de sistema compatible de postulados, de economía de pensamiento y de lo que, en definitiva, involucra un proceso de axiomatización, se hace imprescindible detenernos en una explicación, aunque escueta, lo más cuidadosa posible, de una estructura axiomática referida a nuestra ciencia. Ha de hacernos, sin duda, recorrer más fácilmente los reductos del abanico expuesto de sus orígenes, y para una aún mejor comprensión, permítasenos incurrir en algunas reiteraciones que, ciertamente, no están de más.

Cualquier disciplina matemática, como toda ciencia racional deductiva, tiene que reducirse a unos primeros conceptos que no se definen y a unas primeras proposiciones que no se demuestran. Ese esqueleto base es su Axiomática.

Ya nos detuvimos antes a considerar que la definición de un concepto (como toda definición lógica), es la reducción del mismo a otros conceptos anteriores, con lo que ateniéndonos al hecho de que el desarrollo de la ciencia hacia atrás no es indefinido, hemos de llegar a unos conceptos que deberán ser los primeros y que no se definen. A estos conceptos se les llama *primitivos*. De análoga manera, la demostración de un teorema o de una proposición, no es más que la deducción lógica de esa proposición por medio de otras anteriores. Habrán, por tanto, también, unas proposiciones primeras que no se demuestran, a las que se llama *axiomas*.

Si nos situamos en la base de una teoría matemática con la pretensión de edificarla[4], al ser exigido que se la construya mediante deducciones lógicas, se hace preciso pues inicialmente enunciar las afirmaciones de que partimos. Reside ahí la dificultad principal: la elección de los axiomas. Los axiomas que se fijen pueden ser cualesquiera, mas deben satisfacer unas ciertas reglas para que la teoría sea consistente. El problema más importante de la Axiomática es verificar, en primer lugar, la compatibilidad de aquéllos. En realidad, probar la no contradicción de los axiomas seleccionados, es un problema difícil, y se suele resolver utilizando el siguiente postulado filosófico: «Las propiedades de un ente cualquiera no pueden ser contradictorias entre sí». Ello obliga a intentar encontrar unos entes en los cuales se cumplan los axiomas establecidos, y entonces la compatibilidad de aquéllos quedaría demostrada. Investigaciones teóricas en cuestiones de esta índole, pertenecen a la denominada metamatemática.

Otra regla exigida es la independencia de los axiomas, cuyo objetivo, en el fondo, no es más que el de elegancia y economía. Los axiomas se dicen independientes, si ninguno de ellos es consecuencia lógica de los otros. La resolución de este problema se reduce al anterior, porque para constatar la independencia de un axioma respecto de los demás, basta probar la incompatibilidad de éstos con el contrario de aquél.

Se ha de ponderar también que la supresión de un axioma, o de parte del mismo, o la de su sustitución por otro, puede conducir a una teoría más general que la construida con el conjunto de axiomas elegidos. En este punto conviene de-

[4] Podemos suponer que para las demostraciones es factible emplear las reglas de la lógica clásica sobre la contradicción y el «tercio excluso». Es frecuente el tipo de demostración de teoremas a partir de los axiomas, llamado «por reducción al absurdo».

cir que una nueva concepción sobre la estructura de la matemática entera, fue ocasionada, como veremos luego, con la sustitución de un famoso postulado de la geometría clásica por otra hipótesis adecuada.

Las condiciones anteriores de compatibilidad e independencia para los axiomas, son las esenciales. Otras condiciones que se suelen imponer son las siguientes:

Los axiomas han de ser simples, esto es, enunciar en lo posible una sola propiedad.

Los conceptos primitivos y axiomas deben escogerse en el menor número posible, mas en número suficiente para garantizar la unidad de la construcción.

Simplicidad y unidad en la raíz de la ciencia que se construye, resultan ser, en resumidas cuentas, las miras de una exposición axiomática.

Situados más en el terreno que nos interesa, supongamos que queremos construir el Análisis matemático axiomáticamente. En último término, el Análisis se reduce al número natural y si se desea edificar una axiomática con base en los números naturales, se ha de partir de unos conceptos primitivos y de unos axiomas, habiéndose de probar, principalmente, según dijimos, la compatibilidad de éstos, buscando cuando fuere preciso, unos entes en que se cumplan, y nos bastará que nos ocupemos sólo de esta propiedad para los fines que perseguimos.

Siguiendo, por ejemplo, la conocida concepción de la escuela de G. Peano (1858-1932), en la teoría de los números naturales se toman como conceptos primitivos, el *cero*, el *número* y la *operación que hace pasar de un número al siguiente* (o sencillamente, lo que se llama *siguiente*), y como axiomas, los que a continuación se enuncian:

I) El cero es un número natural.

II) El siguiente de un número natural es un número natural.

III) El siguiente de un número natural no es cero.

IV) Si los siguientes de dos números naturales son iguales, los números también lo son.

V) Principio de *inducción* completa: Todo conjunto de números naturales que contenga al cero y tal que si contiene a un número natural contiene también a su siguiente, es el conjunto de *todos* los números naturales.

Estos axiomas que se acaban de postular, ciertamente son compatibles. Nuestro lenguaje presupone el concepto de número, y no podemos pensar ni hablar sin utilizar el concepto de número cardinal y el de número ordinal. Al llegar a estos primeros conceptos, sitos en la raíz de las operaciones de nuestra razón, es de todo punto imposible hacer demostraciones rigurosas. La compatibilidad de estos axiomas están pues, inmersos en nuestra lógica. El concepto de número natural involucrado en las primeras operaciones de nuestra inteligencia, impide llegar con la razón a un análisis exhaustivo de aquél hasta su último origen. En consecuencia, con nuestra Axiomática no se puede lograr el rigor absoluto.

Considérese, no obstante, que esto último fue y sigue siendo un exagerado anhelo de los recalcitrantes del método axiomático e incluso, quizás, de todo fiel devoto de la ciencia matemática, a quienes estremece la idea de que existe un rigor matemático *absoluto* y supeditan la validez de cualquier deducción al inexorable cumplimiento de aquél.

Independientemente de la sempiterna presencia de remanentes intuitivos inherentes a cualquier construcción lógica, debemos decir que no es conveniente desorbitar los límites de la exigencia más racional.

La tarea de axiomatizar una ciencia es un trabajo verdaderamente relativo, mutable con el tiempo, que debe satisfacer los imperativos de rigor lógico que correspondan a su momento histórico.

Y en realidad los fundamentos del análisis matemático, objeto de la visión axiomática anterior, como los de cualquier otra rama de la matemática, tal como son actualmente, se acoplan satisfactoriamente con los problemas contemporáneos de la ciencia y concuerdan con la concepción moderna de la precisión lógica.

Por último, se ha de observar que la Axiomática es sólo un método, un instrumento y como tal, no crea, y ese método no pasa de ser exclusivamente una *forma* de descripción que no se debe valorar hasta que se conozca el contenido esencial de lo que hay que describir. Ciertamente, una ciencia construida axiomáticamente es una ciencia en la que no se sabe de lo que se habla. El filósofo y matemático, amén de sociólogo, historiador, escritor y pedagogo, Bertrand Russell (1872-1970), premio Nobel de Literatura en 1950, enarbola, con ironía, esta desconcertante, aunque justa, definición paradójica de la matemática: «La matemática es una ciencia en la cual no se sabe ni de qué cosas se habla ni si lo que de ellas se afirma es verdadero o falso». Henri Poincaré (1854-1912), uno de los matemáticos más eminentes de todos los tiempos, conocido también como brillante y lúcido expositor de filosofía de la ciencia, matiza, diciendo más sutilmente: «La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas».

Con todo, el método axiomático presenta las muy importantes tres ventajas que siguen: 1) Aún sin conseguir el rigor absoluto, el rigor alcanzado es mucho mayor que con el método clásico; 2) La ignorancia en que nos situamos respecto a los conceptos primitivos, permite dar a la ciencia construida, múltiples interpretaciones; 3) Los axiomas son arbitrarios, con la especial limitación de que no sean incompatibles.

Hemos tratado de axiomática, de procesos de axiomatización. Y lo hemos hecho con el uso de un compás que quizás parezca algo angosto. Sin embargo, y junto a unas anotaciones de carácter diverso, inexcusables desde nuestro punto de vista y que exponemos acto seguido, era necesario para completar el panorama indispensable en orden a seguir penetrando, ya decididamente con holgura, en la problemática de la lección, como se apreciará luego al hablar de Lobatchevski, Hilbert y otros.

Históricamente, los orígenes de la axiomática[5] se entroncan en la tradicional obra «Elementos»[6] del geómetra Euclides (escritos el 300 a.C.). Es la axiomática *clásica.*

En la base de la matemática euclídea se presentaban grupos de nociones comunes y de axiomas o postulados[7]. Y no resultó raro que tras el fracaso de los absurdos intentos de demostración de esos conceptos primitivos y axiomas, llegara a reinar en mucho tiempo la creencia de que las verdades primeras tenían su evidencia en la metafísica. Para Platón, había que extraerlas de una especie de paraíso en el que eran salvaguardadas las ideas matemáticas; para Kant, esas verdades primeras pertenecían a las propias estructuras de nuestro espíritu.

Fue, a propósito de esto, ciertamente sorprendente la singular proliferación de tentativas vanas destinadas a demostrar algunos de los axiomas de partida. De modo especial, los esfuerzos en probar el V Postulado, del que hemos de hablar seguidamente, durarían dos mil años a partir de la aparición de los «Elementos», dedicándose a esta tarea notables geómetras, desde Proclo (siglo V), Wallis (1616-1703), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), entre otros, hasta el francés Legendre (1752-1833). El resultado fue siempre invariablemente negativo. Más tarde veremos porqué. En extremo curioso, de igual manera, aquel desmesurado empeño, en los primeros

[5] «Toda ciencia demostrativa tiene que partir de principios indemostrables; de otro modo, los pasos de la demostración serían infinitos» (Aristóteles, 384-321, a.C.).

[6] Se dice ser éste el libro que ha circulado más que otro alguno, a excepción de la Biblia.

[7] Conviene señalar que «la axiomática clásica, que durante mucho tiempo se ha tomado como modelo para la construcción de todas las ramas de la ciencia exacta, se caracteriza por una sutil confusión de definiciones aparentes y postulados explícitos que, de hecho, no pueden considerarse independientes unos de otros». Breve idea de esto la da el que «dos mil años más tarde, en la mecánica de Newton (1686), fundamento de la física matemática, donde se encuentra la misma esquemática constructiva que la de la obra euclídea, se empieza con una serie de ocho definiciones para los conceptos de masa, fuerza, etc..., y luego se halla la afirmación de que palabras como tiempo, espacio, lugar y movimiento, no necesitan definición, sino sólo algún afinamiento» (Richard von Mises —Los postulados matemáticos y el entendimiento humano— Colección SIGMA, El mundo de las matemáticas, t. 5, pág. 114; Edic. Grijalbo S. A., Barcelona-México, 1969).

tiempos, de algunos matemáticos y científicos de la época, en reducir a toda costa a sus últimas esencias la selección de términos básicos (o conceptos primitivos) que figuraban en la obra de Euclides como «indefinibles» [8]. La cuestión era más ardua y sutil de lo que se suponía [9].

No fue más que a raíz de las investigaciones axiomáticas de los siglos XIX y XX, cuando todas aquellas «abstracciones» ideales de la experiencia sensible creadas por el problema de la naturaleza de los «entes» matemáticos, hubieron de ser sustituidas por una concepción unitaria, que reduce progresivamente todas las nociones matemáticas, primero a la de número entero, y luego en una segunda etapa, a la noción de *conjunto* [10].

Lo que está fuera de duda, sin embargo, es que durante

---

[8] Véase, p. cj., F. Enriques —Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna— C.S.I.C., Public. Inst. J. Juan, 1954 (Madrid).

[9] A título de breve muestra de las elucubraciones que se hicieron, citemos por ejemplo y en forma escueta, la que pretendía probar las definiciones de los conceptos de cuerpo, superficie, línea y punto, a partir de la noción de «volumen», comenzándose por afirmar que cada cuerpo ocupaba en el espacio un volumen, que el elemento de separación de ese volumen del resto del espacio era una superficie, el de dos superficies contiguas una línea y el de dos líneas un punto. La consistencia de ese razonamiento básico de la citada teoría habría de verse luego definitivamente turbada al no podérsele considerar como estrictamente matemático, por iniciarse desde un concepto *físico* (volumen) en el cual se iban imaginando una serie de abstracciones, con la enorme dificultad de apreciación, por otra parte, del posible grado de rigor obtenido con las mismas. Aunque mejor aún, y cuando se meditó más detenidamente, aquel concepto no era realmente físico, sino más bien *intuitivo* y, en consecuencia, todo aquello conducía a que los conceptos geométricos primeros, no eran conceptos matemáticos, ni tan siquiera físicos, sino simples productos de la intuición; así, a la postre, el nivel de certeza que pudiera extraerse escaparía necesariamente a nuestro entendimiento. Pero como también las otras teorías sufrieron análoga desafortunada suerte, ello hizo que en las mentes antiguas, los conceptos primitivos y axiomas infundieran el misterioso carácter que hemos señalado y que entrañaba una necesidad lógica.

[10] Esta última noción, considerada durante mucho tiempo como «primitiva» e «indefinible», ha sido objeto de tanta polémica interminable, que se ha culminado en una nueva concepción (a raíz de recientes investigaciones sobre el formalismo lógico) según la cual las *estructuras* matemáticas son los «únicos objetos» de las matemáticas (N. Bourbaki, La arquitectura de las matemáticas —«Las grandes corrientes del pensamiento matemático— Ed. F. le Lionnais, Eudeba (1962), pág. 41»).

siglos se pensó que los teoremas que dedujo Euclides eran conceptualmente meras calcomanías del mundo externo, lo que orientó a los matemáticos a deducir verdades fundadas sobre las verdades de la naturaleza. No obstante, algunos acontecimientos, entre ellos la introducción de los números negativos por los indios y la creación de un monstruo posterior, la del número imaginario (solución extraña de algunas ecuaciones de segundo grado) que tendría gran trascendencia, convulsionaron aquella pasividad ancestral. Pero había de ser, por encima de todo, un suceso decisivo el que empujó al matemático hacia nuevos caminos: el descubrimiento de las geometrías no euclídeas (Lobatchevski, Bolyai, Riemann, Gauss).

El matemático antiguo era como esos espíritus incontrovertibles a los que no se puede llevar la contraria. Para él toda proposición matemática era irrebatible. Y era natural que con ese sentir, no se preocupara en descubrir, por ejemplo, si era cierto afirmar, como se afirmaba en la geometría euclídea, que toda figura era susceptible de desplazarse en el espacio sin deformación. Esto presuponía inexorablemente la construcción de una geometría que no era más que una idealización de las propiedades observadas en los cuerpos sólidos, geometría válida en un determinado espacio *intuitivo* y que se apoyaba principalmente en uno de los axiomas euclídeos, el famoso postulado V, que Euclides formuló así: «Si una recta que corta a otras dos rectas forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos [11]. El postulado equivalía a afirmar que «por un punto de un plano se puede trazar una y sólo una línea recta, que no corte a otra recta dada en aquel plano» (Postulado de la paralela).

Nadie llegó a dudar de la certeza *física* de este axioma hasta los alrededores de 1800, en que un matemático ruso, Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856), profesor en la Universidad de Kazán y que habría de ser luego Rector de la

---

[11] T. L. Heath —«The thirteen books of Euclid's Elements», págs. 154— Cambridge (Inglaterra), 1908.

misma, elabora un plan que consistía en eliminar el postulado euclídeo de la paralela, sustituyéndolo por este otro: se puede trazar a través del punto dado más de una recta que no encuentre a la recta dada. Lo usa, en conjunción con los restantes axiomas euclídeos y edifica una geometría (Geometría hiperbólica) de la que fue publicada un primer esbozo en 1826, aunque en honor a la verdad, debamos mencionar también al húngaro János Bolyai (1802-1860), quien en otro lugar del planeta realizó casi simultáneamente el mismo descubrimiento. Igual proceso, en cuanto a sustitución del axioma V por otra hipótesis adecuada (precisamente, la de que por el punto dado no pasara «ninguna» paralela a la recta dada), conduciría más tarde al alemán Riemann a la denominada Geometría «elíptica» (o riemanniana). Se sabe hoy que Karl Friedrich Gauss (1777-1855), «*princeps mathematicorum*», conocía los elementos esenciales para la construcción de una geometría no euclídea (en parte desde 1792), pero que no se atrevió a publicar sus investigaciones por miedo al «Geschrei der Böotier» (Clamores de los beocios), lo que denota hasta qué punto puede afectar el criterio escolástico tradicional al verdadero progreso de la ciencia. La observación fundamental de Gauss fue la de que de los diez axiomas básicos euclídeos, el axioma de las paralelas podía negarse y, sin embargo, construir una geometría perfectamente autoconsistente, o lo que es lo mismo, que el citado axioma era *independiente* de los nueve restantes. El gran matemático alemán habría de decir a Bolyai la siguiente frase no muy alentadora para el joven renovador: «No puedo alabar su trabajo sin alabarme a mí mismo, porque hace tiempo que había pensado lo que Vd. dice».

Pero volvamos a Lobatchevski. Su geometría, al no ser contradictoria, promovió que de repente, drásticamente, los axiomas euclidianos dejaran de ser necesidades del pensamiento y perdieran su supremacía casi metafísica. No eran verdades obvias, se las podía violar impunemente. ¿Significaban sólo meras reglas de un quizá divertido, juego de salón, que los humanos podían escoger arbitrariamente a tenor de sus caprichos o, mejor aún, de sus necesidades?

En el seno de un estupor general, brota un pensamiento temerario, el de que la geometría de Euclides pudiera no responder a las propiedades reales del espacio.

Entiéndase bien. No se trataba sólo de asimilar unas nuevas enseñanzas o, más precisamente, de quedarse maravillados por que en la geometría hiperbólica la suma de los ángulos de un triángulo resultara siempre menor que dos rectos, y por otras proposiciones que contradecían estrepitosamente a los de la geometría euclídea; ni tampoco habría de suavizar luego aquel estado de estupefacción el hecho de que se lograran expresar como teoremas de ambas geometrías verdades geométricas en el interior de un círculo, por cuanto un mismo fenómeno se sabía que podía responder perfectamente a procesos distintos, unidades desiguales ser igualmente aptas para la medición de una sola cantidad, y una misma curva representarse con distintas ecuaciones, sin más que elegir oportunos sistemas de coordenadas.

La cuestión era más delicada. Se tenía que averiguar a qué carta quedarse. ¿Cuál de las dos geometrías, consistentes una y otra, pero contradictorias una de la otra, era la verdad acerca de la naturaleza? Si era perfectamente razonable admitir que la coherencia de una geometría podía quedar asegurada por el espacio físico al que correspondía, y cuyo fundamento está en nuestro mundo tal como es y existe, y en el que, por supuesto, se reconocía y aún hoy se reconoce, que no pueden haber contradicciones, era lógico suponer que sería la geometría verdadera aquélla que respondiera realmente a las propiedades del espacio. Pero al no existir un criterio sólido que inclinase decididamente la balanza a un lado o al otro, la duda quedó en suspenso. ¿Cuál de las dos?

Así las cosas, una contradicción notabilísima en física, a fines del siglo XIX, inicia una senda que permitiría aclarar las perspectivas del problema. Fue el famoso experimento de Michelson: Al medirse la velocidad de la luz en la dirección del movimiento de la Tierra a lo largo de su órbita alrededor del Sol, como también a lo largo de la perpendicular a esa dirección, quedó probado que todos los cuerpos que se mueven en la naturaleza, incluso moviéndose en el vacío, se contraen en la dirección del movimiento. La investigación minuciosa de esa contracción dio origen a la conocida teoría de transformaciones de Lorentz.

Y sería en 1915, Einstein, al analizar las propiedades del espacio como forma universal de existencia de la materia, quien con su teoría de la relatividad corroboraría las ideas de Lobatchevski (como asimismo, las de Gauss y Riemann). El fundamental descubrimiento einsteiniano, alarido revolucionario de la física y de la filosofía, de que «el tiempo absoluto no existe», motivó, en efecto, que en su famosa teoría fuese proposición básica la de que el espacio sea absolutamente inseparable del tiempo o, lo que es lo mismo, que lo que haya de ser investigado experimentalmente es un conjunto de espacio-tiempo tetradimensional. La geometría de ese espacio de cuatro dimensiones quedaba determinada precisamente por el grupo de transformaciones de Lorentz; y la coherencia de la geometría espacial de Lobatchevski se confirmaba considerando transformaciones de Lorentz en el caso general del movimiento de un punto en el espacio [12].

Mas entonces, si la geometría no euclídea podía representar el espacio físico con tanto derecho como la euclídea, aún difiriendo ambas tan radicalmente entre sí, no era lógicamente explicable que las dos fuesen la verdad a la vez acerca de la naturaleza. Paulatinamente, los matemáticos comprenderían la explicación de este hecho. Las matemáticas eran un simple artificio. No estaban escritos en el universo, ni los axiomas primeros ni sus consecuencias lógicas. Tampoco se trataba de que partiendo de verdades evidentes de la naturaleza se dedujeran otras verdades acerca de la naturaleza, sino de que la geometría no era la verdad respecto del espacio físico, sino el estudio de los espacios posibles. En el grado en que la experiencia lo decidiera, varios de esos espacios, matemáticamente construidos, aún siendo profundamente distintos entre sí, se podrían adaptar igualmente bien al espacio físico.

---

12 La primera interpretación intuitiva de la geometría de Lobatchevski data de 1868, cuando el matemático italiano Beltrami le dio realidad a aquélla geometría no euclidiana sobre la superficie llamada *seudoesfera*.

V. «La Matemática: su contenido, métodos y significado» — Edit. Alianza Universidad, Madrid (1973).

De esta manera, quedó claro que todo era relativo. La consistencia de la geometría no euclídea se apoyaba sustancialmente sobre la de la geometría euclídea, resultando que si aquélla era inconsistente también habría de serlo ésta; lo cual suponía, curiosamente y quizá en forma de paradoja, que debía probarse antes que la geometría euclídea era realmente consistente (y no se olvide que consistencia significa estar libre de contradicciones).

Ello trajo como consecuencia que la geometría se independizara de la física y más tarde, que esa independización abarcase a toda la matemática. Pero esto no fue, desde luego, ningún impedimento para la validez de las teorías, porque ciertamente y como se acaba de ver, las matemáticas eran independientes de la realidad. No en vano diría entonces Einstein: «En la medida en que se refieren a la realidad, las leyes de la matemática no son ciertas; y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad».

Se trataba pues, en el fondo, como si efectivamente la matemática se redujera a un difícil juego, un puro juego abstracto y simbólico, lo que añadido a las anteriores razones impulsó a que se revisara el concepto de geometría y a que, más en general, todas las ramas de la matemática, a finales del siglo XIX y principios del XX, tuvieran que ser *axiomatizadas.*

Aparte de esto, aquel engaño en el que estuvieron sumidos los matemáticos durante dos milenios, acerca de la naturaleza de lo que estaban haciendo, enseñó muchas cosas.

Hoy podemos afirmar que la certeza de un fenómeno no depende en absoluto de nuestra capacidad para comprenderlo. Se debe ponderar que nuestra intuición puede engañarnos. Por ejemplo, nuestra visión intuitiva del espacio será siempre euclidiana. Y fue la imposibilidad de imaginar a los antípodas andando cabeza abajo la que sirvió durante mucho tiempo de argumento en contra de la redondez de la tierra.

Decía el destacado matemático E. T. Whittaker: «La observación de fenómenos no puede decirnos sino que las ecuaciones matemáticas son correctas; las mismas ecuaciones podrían representar igualmente el comportamiento de cualquier otro sistema material. Por ejemplo: las vibraciones de una membrana de forma elíptica pueden calcularse mediante una ecuación diferencial conocida por ecuación de Mathieu; pero a esta misma ecuación se llega cuando se estudia la dinámica de un artista de circo que sostiene a un ayudante en equilibrio en lo alto de un mástil mientras él mismo se sostiene encima de una pelota esférica movida por el suelo. Si imaginamos ahora a un observador que descubre que el curso futuro de cierto fenómeno puede predecirse mediante la ecuación de Mathieu, aunque sin ser capaz de percibir, por una u otra razón, el sistema que produce el fenómeno, entonces es evidente que ese observador sería incapaz de decirnos si el sistema en cuestión es una membrana elíptica o un artista en variedades».

Al morir los tres creadores de la geometría hiperbólica (Gauss en 1855, Lobatchevski en 1856 y Bolyai en 1860), es necesario decir que su original obra no estaba suficientemente divulgada, mas la publicación de la célebre tesis de Bernhard Riemann (1826-1866) «Uber die hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen» [13], ensancharía holgadamente el nuevo panorama de la geometría, constituyendo el punto de partida de la citada revisión de conjunto del edificio geométrico clásico y, en especial, de sus cimientos. Riemann fundaría también la topología, rama de la geometría en la que se indaga hoy extraordinariamente [14]. Su importancia queda patentizada, no está de más decirlo, por la afirmación nada ampulosa de que coadyuvaría notablemente a la consecución de resultados nada triviales en el proceso de una investigación científica actual de no importa cuál especialidad, el descubrimiento por parte del investigador, de una forma natural de introducir en aquélla la noción de proximidad, porque ello le permitiría recurrir al colosal engranaje de los espacios to-

---

13 Sobre las hipótesis implícitas en la Geometría (1854).

14 En la actualidad, la geometría como disciplina autónoma, ha desaparecido. Se la estudia como una parte del *álgebra* (geometría algebraica) o como una parte del *análisis* (geometría diferencial), quedando como tercera de las ramas fundamentales en que se divide hoy la matemática, la *topología*, que se puede definir groseramente como una teoría abstracta de la continuidad.

pológicos con su secuela de espectaculares avances en estos últimos años.

Después de Riemann, el término *espacio* adquiere un sentido más vasto, estudiándose nuevos espacios, sus correspondientes geometrías, y posibles significados o interpretaciones en el mundo real.

Mas había de ser David Hilbert (1862-1943), el que define y estudia por vez primera el espacio de un número *infinito* de dimensiones que lleva ahora su nombre, de gran importancia en el análisis funcional, principal utensilio de la mecánica cuántica. Estos espacios abstractos, donde los elementos pueden no ser puntos sino funciones, muestran la abstracción de la matemática moderna. Para dar una brevísima idea gráfica, baste decir que el conjunto de todos los posibles estados (no sólo estacionarios) de un sistema atómico —por ejemplo, un átomo de hidrógeno— se puede considerar desde un punto de vista abstracto como un espacio de Hilbert.

La revisión de la axiomática clásica encuentra, por otra parte, en Hilbert su máximo exponente. Mostró de manera concluyente que la famosa lista de los quince axiomas de Euclides, estaba lejos de ser completa. Hacían falta nada menos que veintisiete. En 1899 y junto a una notable síntesis de resultados, presenta en sus «Grundlagen der Geometrie» [15] una nueva forma de axiomática geométrica, destacándose en su clasificación de axiomas que hace en cinco grupos, la singular constitución del cuarto, exclusivamente con el axioma de la paralela, así como el conjunto de los de continuidad, componentes del grupo quinto, axiomas ausentes en la base de la geometría de Euclides. La axiomática material euclídea queda revestida de un mayor rigor con la axiomática formal de los «Grundlagen». El sistema de Hilbert aparece caracterizado además en que no arranca, como el euclidiano, con definiciones de elementos del espacio, sino que estos últimos se consideran implícitamente definidos por los axiomas. Ya desde el principio de su obra, entonces tan revolucionario, evita todo recurso a la intuición: «Imaginemos tres sistemas de cosas, que llamaremos puntos, rectas y planos».

---

15 **Fundamentos de la Geometría.**

Acomete este gran matemático más tarde, el problema más amplio de los fundamentos lógicos de *todas* las teorías matemáticas (en particular, de la aritmética) y el de la *no-contradicción* de esas teorías.

El conocía más que ningún otro la gran influencia en el ámbito científico en que se desenvolvía, de las dos importantes escuelas de pensamiento que surgieron por aquella época sobre la fundamentación de la matemática: la *logicista,* que establecía la tesis de que la matemática no es otra cosa que una rama de la lógica, sosteniendo en consecuencia, la definición de las nociones matemáticas en términos de nociones lógicas, y la prueba de sus proposiciones como teoremas de lógica, construcción que se canalizaba con el uso de un simbolismo lógico desarrollado en la monumental obra en tres volúmenes «Principia Mathematica» (1910-1913), debida a los grandes artífices de la escuela, los ingleses Russell y Whitehead, obra que había de dejar indeleble huella posterior; y la *intuicionista,* fundada por el holandés Brouwer, al que se agrega luego Weyl, gran pionero también, quienes subrayan a la intuición como única fuente de conocimiento matemático, y que obligaría a plantear por vez primera desde hacía siglos, problemas de lógica elemental, al no vincularse con la creencia de que las reglas aristotélicas de la lógica clásica poseen una validez absoluta, independientemente de la materia a la que sean aplicadas [16], y siendo una característica principal de dicha teoría la de no aceptar la ley del «tercio excluso» para conjuntos infinitos (aún reconociendo su incuestionable validez cuando se razona sobre conjuntos finitos).

Hilbert, enardecido por una fuerte reacción contra la corriente de matemáticos seguidores de Brouwer y Weyl [17] especialmente, y para salvar a la matemática clásica, como asimismo a la teoría conjuntista de Cantor (de la que luego hablaremos) que se estaba quebrantando por el mal de las paradojas, de la demoledora crítica intuicionista, propone que aquella matemática sea formulada como una teoría axiomática

---

16 Brouwer —«La no fiabilidad de los principios de la lógica»— (1908).

17 «Despojar al matemático de la ley del tercio excluso equivalo a negar al astrónomo el telescopio o el uso de los puños al boxeador», declararía en 1924.

formal, propulsando así la ya famosa escuela *formalista*. Dicha escuela se sustenta en el hecho de que todo el contenido de la matemática puede transformarse en principio, en un sistema de fórmulas simbólicas; junto a este sistema formal existe algo más, llamado *metamatemática*, especie de dominio separado que sirve de justificación para el sistema de fórmulas.

En la concepción hilbertiana se distinguen netamente, y en eso radica gran parte de su importancia, los enunciados «reales» de los «ideales», según que su uso implique o no, la posesión de un significado intuitivo (en estos últimos se encuadran los que tratan con el infinito denominado actual), siendo de interés destacar que la anexión de «elementos ideales» a un sistema a fin de completar su estructura y simplificar el desarrollo de la correspondiente teoría, supone precisamente un fructífero procedimiento de la matemática de nuestros días.

Como auténtico maestro de la axiomática, el espíritu de Hilbert ejerce la más profunda influencia en el universo matemático, enseñando como nadie a los devotos de esta ciencia una nueva forma de pensar de inconfundible sello axiomático, lo cual equivale ni más ni menos que al intento de reducción de cada teoría a su esqueleto lógico intrínseco, absolutamente despejado de toda la embarazosa algoritmia del cálculo. La aplicación de esta doctrina ha conducido a la actual matemática. La matemática *formalizada*.

Debiera ponderarse bien, por último, para captar el alcance que en esta brevísima panorámica hacemos del preclaro matemático alemán, que cuestiones planteadas por Hilbert forman aún parte de la investigación actual. De los 23 problemas que parecían irresolubles, que propuso en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900, estudiados desde entonces profundamente por la considerable repercusión que presuponían sus soluciones en algunas ramas de la matemática, una buena parte ya han sido resueltos, mientras los restantes siguen siendo ferozmente investigados.

Hilbert fue uno de esos grandes hombres que dominan y caracterizan una época. Por el rigor de su lenguaje y la maravillosa perfección de su razonamiento, el trabajo de Hilbert es el modelo de actividad del matemático moderno y lo será sin duda durante muchos siglos.

Y se hace necesario un paréntesis retrospectivo.

En realidad, todos los matemáticos que vivieron los dos mil años siguientes a Euclides, consideraron sus *Elementos* como el límite práctico del rigor lógico. Hoy aquellos sagrados fundamentos de la geometría se reconocen como bastante superficiales, y este ejemplo histórico debiera bastarnos para no dejarnos seducir jamás por la idea de la existencia de un rigor *absoluto* exclusivo de la matemática al que ya nos hemos referido con anterioridad.

Sin embargo, aunque el rigor de la matemática no sea absoluto, en los resultados de la misma brilla con luz auténticamente propia su elevado grado de rigor lógico. Hubo una etapa en que la atención al mismo alcanzó un punto álgido. Fue aquella, entroncada en el siglo XIX, en la que como se dijo al principio de esta lección se promovió una creciente exigencia de rigor (y por tanto de lógica formal), que traducía una tendencia a generalizar que liberase a la matemática de presupuestos intuitivos y físicos. Era la etapa en la que hubieron de someterse a una seria revisión conceptos fundamentales de la matemática, manejados a veces por algunos con una alegre desenvoltura propia de la entrega incondicional a la potencia del algoritmo; en la que los principios del análisis infinitesimal clamaban imperiosamente ser fundados sobre definiciones abstractas o analíticas independientes de la intuición geométrica; aquélla, en definitiva, donde al barruntarse ya el peligro de derrumbamiento, una necesaria idea de consolidación de bases tenía que formalizar su aparición.

Un matemático francés, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), pareció haber venido al mundo en el momento histórico preciso para iniciar esta grandiosa tarea. Aunque era un hombre de orden por antonomasia y un poco prototipo del gran burgués de su siglo, sus profundas convicciones le condujeron a una vida inquieta, ya que con motivo de la situación política de aquel tiempo, negó el juramento al nuevo gobierno siguiendo a su rey, Carlos X, al exilio, cuando éste se vio sorprendido por los acontecimientos de 1830, para regresar a Francia, bajo el Imperio, en 1838, tras haber enseñado en la Universidad de Turín y en Praga. Tenía un carácter en extremo tenaz, que le hacía argüir interminablemente, en muchas ocasiones incluso hasta en cuestiones triviales. Aún siendo, sin género de dudas, un auténtico genio, de una habilidad científica asombrosa, quizás el secreto de sus notables descubrimientos procediera, aparte desde luego de sus otras facetas señaladas, de aquel empecinamiento anejo a su naturaleza que le forzaría a analizar hasta extremos profundos, cualquier problema con el que se enfrentaba.

Cauchy fue el primero en imponer el rigor en la matemática con un libro suyo que apareció en el año 1821 y que recopilaba las enseñanzas que impartiera como profesor de la École Polytechnique de París desde su nombramiento en 1815. Desarrolló sistemáticamente los fundamentos del análisis matemático, con deducciones claras, concisas, modélicamente rigurosas. Clarifica la noción algo nebulosa de «infinitésimo» en forma de paso al límite, establece la formulación definitiva del concepto de límite en su forma actual y expone con absoluta precisión la convergencia de las series (con algunas reglas notables), dando el famoso criterio de las sucesiones que llevan su nombre y que habría de ser absolutamente decisivo en el ulterior desarrollo de la matemática moderna. Define la continuidad de las funciones de modo aritmético con independencia de toda intuición geométrica, introduce la primera definición general de integral (definida) de una función, siendo indiscutible paladín también en la prueba de teoremas fundamentales de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, además de fundador nato de la teoría de funciones de variable compleja, con notabilísimas contribuciones en dicho campo.

Desde el punto de vista de la matemática pura, gran parte de los resultados de Cauchy son de una proyección inmensa, en particular en el análisis; pero no lo es menos su repercusión en la ciencia aplicada (Optica ondulatoria, Astronomía, Acústica, Mecánica, Hidrodinámica, Electromagnetismo, ...)

la cual cabría reflejarla diciendo, a modo de ejemplo, que gracias a la última teoría de variable compleja citada de la que nuestro matemático, repetimos, es genuino creador, y a la representación conforme, se hizo posible la teoría de la comunicación por radio y la aerodinámica moderna. Piénsese que ningún avión volaría sin el conocimiento de la teoría matemática de las funciones analíticas.

Sin embargo, y nos atrevemos a decir que por encima de todo el valor preponderante y de la extrema fecundidad de sus investigaciones, el trabajo de Cauchy quedaría señalado por un estigma peculiarísimo, el del *rigor*, que en todo momento preside su exposición. La obra de este supremo e infatigable matemático, autor de más de 700 trabajos de investigación, habría de ser durante mucho tiempo un clásico símbolo de rigorismo matemático que no tardó en extenderse en forma de raudal a todas las ramas de esa ciencia, influyendo notoriamente en que se originase un movimiento crítico de revisión de tal magnitud, que se desbordarían los cauces del cálculo infinitesimal y seguidamente de otros ámbitos, transformando los horizontes del análisis más allá de lo previsible, en el período comprendido en la segunda mitad del siglo XIX. Uno de los primeros revuelos fue el causado con la construcción (en abstracto) en 1861, por Karl Weierstrass (1815-1897), de una curva continua que carecía de tangente definida en cada uno de sus puntos; pero es oportuno decir que ese otro gran jerarca del rigor [18], durante más de treinta años profesor en Berlín, dejaría también una imborrable secuela en la juventud matemática de aquel tiempo, no sólo por la calidad de sus investigaciones, sino por la muy cuidadosa presentación de sus cursos de análisis, impregnados de un sello severo y eminentemente deductivo.

Problemas cada vez más delicados, para los cuales la intuición se revelaba como fatalmente engañadora, indujeron a que se degradara ésta a extremos insospechados en el período aludido, hasta olvidarse incluso de una de las mayores verdades históricas en el desarrollo de las ciencias: la de que muy grandes descubrimientos habían brotado por los razona-

[18] «Nuestro maestro en todo», en frase de Hermite.

mientos intuitivos de algunos genios. El rigor, entendido en su sentido más puro, se puso de moda. Era cuestión de honor científico, el destierro de la intuición de los argumentos matemáticos; y decididamente inexorable, que disminuyeran las intuiciones geométricas, aunque para que, a pesar de todo, destacaran mejor intuiciones aritméticas. La frase, histórica luego, del matemático de aquella época, Kronecker, «Dios creó el número entero, el hombre hizo el resto» [19], resumía lo que más tarde se llamaría *aritmetización* de la matemática. En esta corriente sobresaldría la escuela del ya citado matemático italiano Peano, y aunque en su célebre obra «El Formulario», con la que se introdujo la terminología simbólica, se perseguía establecer la matemática de forma absolutamente lógica marginando todo elemento intuitivo, quedaron de todos modos remanentes de esta naturaleza. En matemática, ya lo dijo Poincaré, había *algo más* que lógica, y en líneas generales, no debiera olvidarse que la lógica reducida a sus términos exclusivos, es estéril por definición. La axiomática brevemente expuesta con anterioridad, relativa a la teoría de números naturales, no está de más recordar que constituye la base de la obra de Peano.

Hoy, sin embargo, la fundamentación axiomática del análisis matemático y, en definitiva, de toda la matemática, no descansa sobre los mismos pilares. El número natural ya no representa la primera expresión de las abstracciones matemáticas. Los obreros de nuestra ciencia se vieron obligados a sustituir el tradicional arranque de ésta, su subestructura lógica inicial, debido a que, entre otras razones, la sistematización anterior no era ya la más adecuada para desempeñar un consistente papel en aquel apuntalamiento unificador de cuya necesidad no ha mucho dimos breve cuenta, descubriéndose que la mejor respuesta (posible) a las dudas y perturbaciones que surgieron en la moderna filosofía de las matemáticas, era la de una teoría que se estaba gestando y que, si bien en principio, dividiría a los matemáticos en dos grupos,

---

19 G. C. Rota, matemático actual, diría en cambio, recientemente: «Dios creó el infinito, y el hombre, incapaz de comprenderlo, tuvo que inventar los conjuntos finitos».

entusiasmando a unos e irritando a otros, logró al fin imponerse: se trataba de la teoría de conjuntos.

Ha de señalarse al respecto que al querer erigir el análisis matemático sobre el número natural, se había ganado, sin duda alguna, en rigor, pero era obvio que seguían manteniéndose, poco menos que impertérritas, dificultades irresolubles inmersas en conceptos importantes, tales como la noción de infinito, concepto que apasionó siempre al matemático de todas las épocas perturbando su espíritu (según Hilbert, más que ningún otro), y que intervenía hasta en los primeros balbuceos del análisis en la cuestión del paso al límite, haciendo las más de las veces acto de presencia en forma de paradojas. Estas dificultades constituirían parte de la que luego sería famosa «crisis de fundamentos» ya aludida y de la cual, bien está decirlo, no acabaría nunca la matemática de sacudirse del todo.

Momentos desconcertantes no faltaron en los que el científico claudicaría reconociendo incluso que el sentido común (el más repartido entre los hombres, como ironizó Descartes) no era un instrumento idóneo para la tarea matemática.

Naturalmente, las cosas se serenaron. No demasiado. El ansia desaforada de rigor y la desconfianza en la intuición quedaron situadas en un más equilibrado término tras un oportuno nuevo análisis de las definiciones de los conceptos de partida, pero se hizo imprescindible un detenido estudio previo del lenguaje y de las reglas de deducción que manejaba el matemático. Esto condujo a unas nuevas concepciones que modificaron el panorama de nuestra ciencia, tales como las ya citadas tendencias de axiomatización y formalismo por una parte, y las de logicismo e intuicionismo por la otra, en las que jugó un papel primordial la sistematización de conceptos poco menos que revolucionarios de la anunciada nueva teoría conjuntista de la que ahora, y dando aquí término al inciso retrospectivo, se hace preciso esbozar siquiera sea su origen y características elementales principales.

Adelantemos que la antigua noción de mónada, aniquilada con el advenimiento de los números irracionales, había sido ya desplazada por el continuo, cuya investigación habría de gestar una muy discutida hipótesis en la doctrina de la que vamos a ocuparnos.

El autor decisivo en el nuevo campo fue un matemático nacido en San Petersburgo en 1845, en el seno de una familia israelita de origen portugués, George Cantor, quien moriría en 1918 en Halle (Alemania) en un asilo de alienados.

Muy al contrario de otras muchas teorías científicas, la teoría de Cantor se basaba en una noción sumamente simple y familiar: la de conjunto. Esta noción primitiva que denota una colección de objetos en número finito o infinito, sea cual fuere la naturaleza o especie de los mismos, precede lógicamente a cualquier otra y se hace imposible dar una definición básica precisa en términos de otras nociones más básicas. Subyacente en nuestra intuición, apoyada implícitamente en nuestra experiencia, no tardaría en asumir el papel de soporte unificador para las diferentes ramas de la matemática y de rechazo, para todas las de la ciencia.

La definición dada por Cantor (1897) precisando que «conjunto es toda reunión M de objetos de nuestra concepción m, determinados y bien distintos a los cuales llama *elementos* de M ...», y que restringía necesariamente a objetos claramente descritos o diferenciados, así como a que no suscitase duda alguna el hecho de poderse determinar si un cierto objeto pertenece o no al conjunto, era una definición desde luego aceptable, pero sufriría más tarde algunas matizaciones, al ser mezclada con las de número y magnitud. Es inútil decir, que la teoría hubiese sido relativamente sencilla, si no se limitase más que a los conjuntos finitos (conjuntos con un número finito de elementos). Mas no fue esa la ambición de Cantor; el interés de éste se concentraba en los conjuntos infinitos y más particularmente, hacia el infinito llamado «infinito actual» o «transfinito» [20], clase ésta de infinito ya men-

20 En lenguaje grosero, ese infinito no apuntaba hacia lo inmensamente grande ni hacia lo inconcebiblemente pequeño; era una especie tercera de infinito, la de un *infinito lógico*, que habría de constituir una piedra angular de numerosas paradojas. Quizás, la más célebre de ellas, la bien conocida de Aquiles y la tortuga, ejemplifique ese concepto de *transfinito*, en cierto modo.

cionada en la concepción hilbertiana y que es conveniente ilustrar un poco.

Digamos, para ello, que dos conjuntos tienen *igual potencia* o que son equipotentes, si entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca (es decir, que haga asociar de algún modo a cada elemento de uno de ellos, uno y un sólo elemento del otro conjunto); y cuando son finitos, esta noción corresponde exactamente a la del número cardinal. En lo finito, una misma pluralidad engendra el mismo número cardinal y el mismo número ordinal. Este último, de igual origen que el primero, fue el que llevó a la noción de conjunto ordenado, como así también a la de conjunto bien ordenado, uno de los descubrimientos más originales de Cantor. Pero lo sustancial y constructivo era que las dos nociones (cardinal y ordinal) se separaban completamente una de la otra en lo infinito, y un mismo conjunto podía dar origen a dos ordinales diferentes. Esta diferencia tenía su raíz en otra distinción entre lo finito y lo infinito, que cabe condensar así: Un conjunto finito no puede tener el mismo número que una de sus partes y, por el contrario, un conjunto *infinito* puede poseer la misma potencia que una de sus partes; piénsese, por ejemplo, en que el conjunto de los números naturales tiene igual potencia que el de los números naturales pares porque, por lo dicho antes, puede establecerse una correspondencia de uno a uno que hace corresponder al número n del primer conjunto, el $2n$ del segundo. En términos amplios, en el dominio del infinito, la parte podría ser igual a un todo, curioso hecho que, en honor a la verdad, constituye tan sólo uno de los primeros teoremas que se prueban en un curso elemental de aritmética de los conjuntos infinitos (o aritmética transfinita). Fue entonces en este orden de cosas, probado por Cantor, que hay «infinitos» mayores que el «infinito» del conjunto N de los números naturales como, por ejemplo, el de aquel que los matemáticos denominan conjunto R (conjunto de los números reales o el de puntos de una recta indefinida), y que daría lugar a la famosa hipótesis lanzada por Hilbert (hipótesis del continuo [21]) acerca de la imposibilidad

21 Problema número uno de la lista de sus aquéllos 23 famosos presentados al Congreso Internacional de Matemáticas en París. Lo de «continuo» provenía de ser

de encontrar ningún conjunto (por supuesto, infinito) con más elementos que N, pero con menos que R, singular problema atacado sin éxito hasta tiempos relativamente recientes.

Esa audaz aritmética de números ordinales y cardinales transfinitos que pretendía (y al parecer, permitía) numerar las colecciones infinitas tuvo repercusiones mayúsculas y suscitó en principio tales controversias, que hasta incluso no matemáticos aportaban ideas y criterios que agitaron aún más las olas de aquel mar inquieto de los cimientos de la matemática. Ya destacamos anteriormente, el antagonismo del alemán Kronecker (maestro que fue de Cantor) que, a la par de buen matemático, era gran polemista, quien al estar imbuído de la mística del número entero, no concebía en modo alguno la construcción de los números naturales sin la invocación a alguna divinidad [22]. La creencia generalizada, poco menos que ciega convicción en aquella época, en torno a la imposibilidad de hacer nada en nuestra ciencia, sin apoyarse in extremis en la teoría de los números naturales, intocable punto de partida (antes de la invención de la teoría de conjuntos) de las matemáticas, reforzaba aún más la posición anticantoriana de Kronecker y de sus seguidores.

Estos ataques quebrarían la salud de Cantor acarreándole los primeros síntomas de una enfermedad nerviosa que le obligó a abandonar durante algunos años sus investigaciones sobre los conjuntos. A pesar de ello, otros grandes matemáticos y en especial el alemán R. Dedekind (1831-1916), que había seguido siempre con considerable interés aquellos descubrimientos, trabajaron incansablemente para que la obra innovadora de Cantor fuera luego reconocida y, sobre todo, para que adquiriera el vigor necesario para combatir la tormentosa crisis posterior de las paradojas.

Porque sucedió, en efecto, que los principios lógicos im-

---

esa la designación genérica habitual del conjunto R. Los conjuntos con igual potencia que el conjunto N de los números naturales fueron llamados conjuntos «numerables» y se dice que tienen como cardinal el número *alef-cero*. Al número transfinito *alef-uno* que seguía al alef-cero, y que designaba la cardinalidad del conjunto R, se le conocería como «la potencia del continuo».

22 Recuérdese su famoso aforismo ya citado.

plícitos en el razonamiento matemático usual incluían contradicciones, hasta entonces inadvertidas, y que se pusieron nítidamente de manifiesto a causa de un cierto tipo (sin duda, el más importante) de paradojas, el de las llamadas «paradojas lógicas»[23]. Consagrada oficialmente la teoría de conjuntos en el primer Congreso Internacional de Matemáticas (Zurich, 1897), época que coincide con la aceptación universal del método axiomático, nadie —incomprensiblemente— había caído en la cuenta hasta el último lustro del siglo XIX, de que ciertos conjuntos, incluso *finitos*, eran contradictorios. Eso hizo que aquella teoría, en apariencia tan sencilla y presuntamente llamada a fundamentar la matemática con conceptos lógicos, planteara problemas de antinomias que cuestionaban la naturaleza de ésta y la de la lógica, forjándose ingeniosas paradojas, más tarde célebres, como las de J. Richards (1905), K. Grelling (1908) y B. Russell (1905) por ejemplo[24], que conminaron apremiantemente a reexaminar el ba-

---

23 En matemática existen paradojas de tres tipos: Las nacidas de proposiciones contradictorias procedentes de razonamientos falsos; las que resultan de teoremas extraños, irreprochables desde el punto de vista lógico, más ininteligibles para nuestra intuición e imaginación, y las paradojas lógicas que aparecen en conexión con la teoría de conjuntos (V. SIGMA —El mundo de las matemáticas— James R. Newman, t. 5, pág. 323).

24 En su famosa obra «Principia Mathematica» (1910-13), Russell anota paradojas que no implican precisamente la noción de infinito. La más notable de ellas es la siguiente: Supóngase que se distingue entre conjuntos *normales* y *anormales*. Por *normales* entendemos aquellos conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros; por ejemplo, la clase de los matemáticos, ya que es evidente que esta clase no es ella misma un matemático y, por tanto, no es miembro de sí misma. Los conjuntos *anormales* son aquellos que se contienen a sí mismos; sin ir más lejos, la clase de todas las cosas pensables es anormal, porque la clase de todas las cosas pensables es ella misma una cosa pensable y, por tanto, es miembro de sí misma. Russell se planteó el siguiente interrogante. ¿Era normal o anormal, el conjunto de todos los conjuntos normales? Si era normal, no se contenía a sí mismo, con lo que formaba parte del conjunto de los conjuntos normales y, por lo tanto, era anormal, pues se contenía a sí mismo. Contradicción. Si era anormal, se contenía a sí mismo, con lo cual formaba parte del conjunto de los conjuntos normales y era por lo tanto, normal. Contradicción de nuevo. Esta ingeniosísima paradoja sumió en un estado de alta tensión a los matemáticos durante algunos años, provocando una riada de discusiones ente sus profesionales como pocas veces se ha visto en la historia de la ciencia. Ello era del todo justificado, pues se acababa de encontrar una paradoja *en la matemática* y no en cues-

samento de las matemáticas con el fin de extraer de sus dominios algunos gérmenes nocivos que lo contaminaban.

Mas si hubo consenso general en cuanto a la necesidad inminente de revisión, no ocurría lo mismo para la manera de llevarla a cabo. La dificultad (quizás más importante) residía en que las paradojas creaban una situación incómoda de características similares a la que ya padeciera la geometría ante el descubrimiento de las geometrías no euclídeas. Toda esta problemática abre un profundo surco en las matemáticas, que hizo temer por el derrumbamiento de sus partes más clásicas y que se conocería más tarde con el nombre de «crisis de fundamentos». Lógicos y matemáticos se enfrascan en un período de confusión y consternación, con brotes de tal violencia que conmoverían al mundo de nuestra ciencia durante varias decenas de años.

Es la época reflejada ya en otros lugares, enclave de enconadas controversias y en la que brillaron con luz propia tres principales corrientes de opinión. Sólo cabe añadir aquí para completar la visión de ese complejo panorama sin romper el hilo ni la finalidad principal de esta lección, unas escuetas consideraciones ulteriores. Son las siguientes: Russell y Whitehead intentaron evitar las paradojas analizando más profundamente su estructura y el sistema ramificado de «tipos» que introducen en sus «Principia» para excluir las llamadas definiciones impredicativas [25], inmersas en cierta clase de antinomias, tiene más éxito entre los lógicos que entre los matemáticos; los de la tendencia intuicionista, no otorgarían más importancia a la lógica que al lenguaje, para llegar a resultados muy diferentes de los teoremas clásicos, negando Brouwer la inducción transfinita, así como la mayor parte de la

---

tiones de semántica más o menos intrascendentes. Estas últimas (Richards, Epiménides) se clasificaron luego en el grupo de las paradojas «epistemológicas»; la de Russell (como también las de Burali-Forti y otra asimismo célebre del propio Cantor) se encuadraron en el de paradojas «lógicas» que citamos ya con anterioridad (V. La Nueva Matemática - Editorial Salvat, 1973; págs. 44-45).

25 Definiciones tales que lo que es definido participa en su propia definición. Tanto Poincaré como Russell estaban convencidos de que ellas eran las culpables de las paradojas.

teoría de Cantor [26]. Finalmente, la actitud de la escuela de Hilbert, la cual, como ya dijimos, era radicalmente opuesta a la de esta última, fue la de no renunciar, ni siquiera parcialmente, a la herencia del pasado, desentendiéndose, desde el punto de vista filosófico, de la cuestión planteada por las paradojas; absortos en todo instante en el problema de la no-contradicción de la aritmética [27], los formalistas además de contribuir notablemente a difundir las ideas de Cantor (sobre todo en Alemania), sostuvieron la tesis de dar inapelablemente una base axiomática a la teoría de conjuntos aunque con la cautela de no propiciar la aparición de conjuntos paradójicos.

De todos modos, el influjo de las antinomias había ya desplegado una creciente sospecha de que los sistemas matemáticos establecidos estaban plagados de contradicciones y de una manera u otra, no quedó más remedio que aceptar serias limitaciones a los razonamientos matemáticos.

En este último sentido, el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953) consiguió dar un enorme respiro en la dramática crisis anterior planteando axiomas que eliminaron aquellos conjuntos capaces de engendrar paradojas. El más famoso de ellos, conocido como *axioma de elección,* afirmaba que en una colección arbitraria de conjuntos, es posible elegir un elemento de cada uno de ellos [28]. Cabe asegurar que con este axioma y las reglas de la lógica formal, se puede deducir del modesto sistema de Peano, el contenido de toda la

---

26 Según N. Bourbaki (véase «Elementos de historia de las matemáticas» —Edit. Alianza Univ., Madrid— pág. 62), «el recuerdo de la escuela intuicionista subsistirá a título de curiosidad histórica, aunque habrá tenido la utilidad de obligar a sus adversarios a precisar sus posiciones y a tomar conciencia más claramente de las razones (de orden lógico unas, y sentimentales las otras) de su confianza en las matemáticas».

27 Problema que creyeron incluso estar a punto de resolver en la década 1920 al 1930, tras haber demostrado la no-contradicción de algunos formalismos parciales de aquélla.

28 Si se trata de un número finito de conjuntos, el axioma es trivial. Cuando la elección de un elemento de cada conjunto ha de hacerse tomándolos de una colección infinita de conjuntos, las cosas se complican; hasta el punto de que el mundo matemático se separó en dos grupos, los *idealistas* (que aceptaban el axio-

matemática, pero no se crea que esto cerrara de una vez por todas la carpeta de las discusiones, especialmente en cuanto a la sistematización y clarificación de fundamentos, como luego se hizo patente.

La teoría ideada por Zermelo (1908) y perfeccionada más tarde con Fraenkel (1922), se apoyaba en nueve axiomas, el octavo de los cuales era el axioma de elección. Constituye la primera axiomatización de la teoría de conjuntos y fue de hecho suficiente para el uso ordinario en matemáticas [29]. Los trabajos de Zermelo condujeron después a otras axiomatizaciones de la teoría conjuntista, como las de Skolem (1922, 1929) von Neumann (1925-, 1928) y otros, con las cuales y aún a costa de incluir restricciones, algunas aparentemente arbitrarias, parecía haberse despertado de la pesadilla cruel de las paradojas.

Ello motiva que a partir de ahí, los matemáticos adquirieran la absoluta convicción de que toda la vasta área de razonamiento de su ciencia, podría fundamentarse mediante el método axiomático.

Sin embargo, en 1931, un joven matemático de escasamente 25 años llamado Kurt Gödel [30] asestó un terrible trallazo a toda esperanza con la publicación de un artículo que llevaba el singular título de «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme» [31]

---

ma) y los *empiristas* (que lo rechazaban), debido a la incertidumbre que suponía la designación del elemento primordial correspondiente a cada conjunto.

Nadie pudo sospechar el notable resultado matemático que obtuvo Zermelo relativo a la existencia de una buena ordenación en todo conjunto, tras la aparente inofensividad de su axioma.

[29] Es digno resaltar que en su definición de «conjunto» se prescinde de cualquier elucubración intuitiva anterior, viniendo dado meramente como aquella cosa o ente que verifique el sistema de axiomas básicos.

[30] Miembro, desde hace algunos años, del Institute for Advanced Study of Princeton, Gödel es probablemente el lógico más famoso del siglo y quizás de la historia.

[31] «Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines». El término de proposiciones «indecidibles» señala a proposiciones que no pueden ser ni demostradas ni refutadas dentro de un sistema dado; con «Principia Mathematica» se refiere al monumental tratado ya citado en tres volú-

y que luego sería conocido con el sobrenombre de «teorema de Gödel». La sorprendente conclusión del mismo fue la de que las matemáticas no podían ser encadenadas por la lógica; dejando sentado que la aritmética y, a fortiori, la ciencia matemática es una teoría *incompleta*. Esto venía a significar nada menos que lo siguiente: Dado un conjunto *cualquiera* de axiomas, que incluya los axiomas de la aritmética, no existe ningún proceso de demostración con fuerza bastante que nos permita probar que tal conjunto sea simultáneamente consistente y completo. Es decir, si fuese completo, tendrá que ser autocontradictorio, y si no contiene contradicciones, existirán siempre enunciados matemáticos verdaderos que no pueden derivarse de dicho conjunto.

Con ello, Gödel hacía ver que la matemática no era una ciencia todopoderosa, y que aún estaba lejos de (como pretendían algunos) probarlo todo, ya que ni tan siquiera era capaz de constatar su propia consistencia. Ciertamente, no era muy reconfortante admitir que si un sistema matemático no conducía a contradicción, dicho hecho no pudiera demostrarse con procedimientos del propio sistema.

Se ponía igualmente en evidencia, que si la teoría de conjuntos basada en su sistema de axiomas (donde no figure el axioma de elección) no es contradictoria, entonces tampoco lo es la teoría obtenida añadiendo a estos axiomas el axioma de elección y la hipótesis del continuo. No pudo demostrarse, en consecuencia, ni la veracidad ni la falsedad del axioma de elección y de la hipótesis del continuo [32].

Nos apresuramos a decir, por último, que el análisis de Gödel no excluía la existencia de una demostración metamatemática de la consistencia de la aritmética. De hecho, ya se han construido pruebas matemáticas de este tipo, principalmente en 1936 por Gerhard Gentzen, miembro de la escuela de Hil-

---

menes de Alfred North Whitehead y Bertrand Russell, sobre la lógica matemática y los fundamentos de la matemática.

32 La disyuntiva sería zanjada definitivamente en 1963 por Paul Cohen (n. 1934), quien hizo ver que se trataba de dos axiomas *independientes* del resto, cuya inclusión o supresión (de uno o de ambos), y hasta la negación de cualquiera de ellos, daría origen a matemáticas diferentes.

bert, haciendo intuitivo uso de la inducción transfinita hasta un cierto ordinal numerable.

Tras los descubrimientos de Gödel se sucedieron otras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, destacando la de Bernays (1937-48), con propósitos firmes de perfeccionarla. Los tratos axiomáticos primeros sufrieron, a la postre, dos modificaciones sustanciales, a saber: la inclusión de un formalismo-clase en el sistema y la fusión de los axiomas conjuntistas con los de un cálculo lógico. Estos cambios produjeron una teoría mejor elaborada, generalmente bien acogida por Bernays y por el propio Gödel[33], y que habría de alcanzar a los tiempos actuales.

Poco más o menos éste era el estado de cosas en el segundo lustro de los años treinta, en el cual un hecho predominante terminó para el científico por no ser cuestionable: el triunfo de las ideas de Cantor.

La teoría conjuntista había llegado a adueñarse de toda la matemática; hoy en día, podemos decir que con la escalada sin freno hacia una cada vez mayor abstracción, norte de las investigaciones matemáticas actuales, aquélla dispone ya de un bagaje precioso de vestiduras entre las que destacan la topología, el álgebra de Boole y el análisis general de Moore, que le vaticinan un reinado duradero.

Con la teoría cantoriana se encontraron demostraciones nuevas de verdades antiguas y sobre todo, una nueva perspectiva de la matemática, con resultados tan halagüeños que lograron estimular enérgicamente a los matemáticos de las generaciones siguientes.

En resumidas cuentas, la teoría de conjuntos que dejara estampada cumplidamente una indeleble huella en las cuestiones filosóficas más profundas de los fundamentos de la matemática, impulsaba a que los problemas más intrincados de sus principales ramas no tardaran en acusar igualmente los efectos de sus poderosos bríos innovadores. Pero he aquí

---

33 Esta teoría de Bernays-Gödel puede verse en la obra «Axiomatic Set Theory» (Bernays-Fraenkel, 1958).

que se produce un momento crucial en la andadura de este imperio conjuntista.

Podríamos situarlo en el año 1939[34].

Es en los albores de la sangrienta contienda que dio en llamarse Segunda Guerra mundial, cuando se gesta un singular proyecto de transformación de las matemáticas que ha de jugar un papel decisivo en los nuevos derroteros de nuestra ciencia, con repercusiones sin precedentes.

Nos referimos a la elaboración, a cargo de un reducido cónclave de inquietos estudiosos, de un ingente proceso de sistematización y de unificación, apoyado en la teoría de conjuntos, que tuvo la virtud de conseguir que se hablara por vez primera de *la* matemática y *no* de la secular denominación plural de *las* matemáticas.

Se trataba de la obra incipiente de los miembros de una escuela de alta matemática francesa agrupados bajo el seudónimo colectivo de «Nicholas Bourbaki». Constituiría la axiomatización más radical y, sin duda alguna, la axiomatización más extraordinaria en la historia de las matemáticas.

La razón por la cual esa corporación de jóvenes genios, que pocos años más tarde figurarían entre los más grandes matemáticos del mundo, se ocultó bajo aquel disfraz ateniense, ha quedado diluída en el misterio. La coincidencia del nombre elegido con el de un general de la guerra franco-prusiana, cuya suerte era en extremo adversa en las batallas que le tocó protagonizar, y otras circunstancias que igualmente confluyeron, motivó algunas leyendas, pero citarlas, nos desviarían de nuestro tema. Son pioneros del grupo, auténticos baluartes fundadores de la fantasmagórica entidad, André Weil (n. 1906), Jean Dieudonné (n. 1906), Claude Chevalley (n. 1909), Henri Cartan (n. 1904), Jean Delsarte (n. 1903) y algunos

---

[34] En opinión de G. T. Kneebone, el período clásico en el estudio de las discusiones sobre la lógica matemática y los fundamentos de la matemática comprende desde 1879 a 1939. Un documentado Apéndice titulado «Desarrollos desde 1939 en el estudio de fundamentos de Matemáticas» figura en su obra «Mathematical Logic and the foundations of mathematics» - Ed. Van Nostrand, 1963 (págs. 379 y sigs.).

otros, hasta quizás una docena escasa en los principios del mito bourbakista.

La asociación impuso a sus adeptos unas normas durísimas sin posibilidad alguna de ser sujetas a revisión, entre ellas, una curiosa: quienquiera de ellos que cumpliera los cincuenta años, sería expulsado y reemplazado por una joven promesa, quedándole a aquél sólo la esperanza de que le asignaran la categoría de consejero. La savia fresca incorporada nunca impidió que el estilo y el espíritu de la obra emprendida siguieran siendo los mismos.

Hasta ahora han aparecido alrededor de cuarenta volúmenes del monumental proyecto. Téngase en cuenta que la preparación de uno de ellos entraña una gran labor de equipo. Confiada la redacción de un manuscrito a uno del grupo, la misma es replanteada y criticada implacablemente por otro, dándose más tarde a un tercero, e incluso a un cuarto, con los mismos fines. Las decisiones estratégicas importantes son determinadas en algún sugestivo lugar francés (los alrededores del lago Côme o algún chalet de montaña, a tenor de las estaciones) en donde debían reunirse una o varias veces al año.

El objetivo inicial de Bourbaki fue el de la reforma total de la enseñanza de las matemáticas, imponiéndose la formación de un método axiomático que capacitaría para la iniciación de su estudio. Los primeros fascículos de su obra que titularían «Elementos de Matemática», aparecieron en el citado año de 1939. El empleo del singular, hacemos de nuevo hincapié, no es una elegancia de estilo; más bien simboliza un signo de distinción que llega a ser, a veces, hasta un grito de guerra. Permítasenos citar, a propósito de esto, que Dieudonné, en un Congreso Internacional de matemáticos celebrado en Royaumont en 1959, exclamó en voz alta ¡Abajo Euclides!, causando una fuerte sorpresa que luego se comprendió. Quería dar a entender que la enseñanza de la geometría no podía seguir sujeta a sus tradicionales normas, porque hoy ya ésta se apoya en principios básicos diferentes (teoría de conjuntos, estudio algebraico de los espacios vectoriales, ...) y, por ejemplo, el famoso postulado V (axioma euclidiano) se reduce en el contexto actual a un teorema de demostración sumamente elemental.

Es conveniente puntualizar que el proceso bourbakista de demostración aúna dos características, una morfológica y la otra sintáctica. Se crean unos símbolos y palabras, y además unas reglas para relacionarlos. Una *demostración* resulta entonces de la manipulación de esos símbolos y del vocabulario siguiendo estrictamente aquellas reglas; al proceso así desarrollado se le denomina *formalización.* Y ya hemos adelantado que en este lenguaje formalizado se fundamenta el *método* axiomático característico de la matemática moderna o actual [35], la cual recibe por eso el nombre de *matemática formalizada.*

Anegados en todo momento de un espíritu de reminiscencias leibnizianas [36], preocupa a los bourbakistas, amén de esa axiomatización formal como método expositivo, que sustentan en la caracterización de las estructuras formales (algebraicas, de ordenación y topológicas), la creación de un medio o sistema que agilice al máximo la comunicación entre las diversas ramas y escuelas matemáticas, introduciendo una nomenclatura que ha sido ya aceptada universalmente.

Bajo el aspecto filosófico, Bourbaki rechaza la concepción de Russell (y del filósofo Frege) de una matemática fundamentada sobre una base estricta de lógica pura, así como el esfuerzo hilbertiano por alcanzar la estabilidad de la matemática a través de una prueba metamatemática de su consistencia. Utiliza, en cambio, el tratamiento de Bernays-Gödel de los conjuntos como base para un estudio unificado de las estructuras matemáticas y somete implacablemente, como se ha dicho, sus «Elementos» al método axiomático, adoptando

---

35 El método no constituye nada nuevo. Por el contrario, referencias del mismo se remontan, como ya sabemos, a veintiún siglos atrás, con los «Elementos» de Euclides. Lo verdaderamente nuevo es su empleo sistemático *en todo* el proceso matemático.

36 El matemático G. W. Leibniz es considerado como el primer especialista serio de la lógica simbólica. Concebía la reforma de la ciencia a través de dos instrumentos: un lenguaje científico universal (characteristica universalis) y un cálculo del razonamiento (calculus ratiocinator) para la manipulación de aquel lenguaje.

una actitud *realista* para los fundamentos de la matemática, que le permite enfrentarse con seguridad con las contradicciones que pudieran ocurrir en el futuro, al igual que con las que comparecieron en el pasado. Este hecho resulta ser tan trascendental para la matemática misma como para toda la filosofía matemática.

Es imprescindible añadir para una serena ponderación de nuestras últimas afirmaciones, que Nicholas Bourbaki tiene adictos forofos, aunque también importantes detractores que predicen ya un contraproducente influjo, pero de todos modos se reconoce, que el esfuerzo indudablemente penoso de axiomatizar la matemática entera, emprendido por el grupo, se ha de traducir en una admirable enciclopedia, sin la cual las matemáticas del siglo XX serían totalmente distintas de lo que son.

Con Bourbaki como sistemático presentador, finaliza nuestra exposición de orígenes, de artífices y enclaves principales que, a nuestro juicio, han conducido a la matemática contemporánea. Y en la línea que la hemos trazado, confiamos que haya llevado consigo la visión de una matemática robustecida y unificada, cimentada sobre una fuente única: la teoría de conjuntos.

Esta es la matemática actual. La preconizada por Hilbert. Una matemática axiomatizada, con una importante adjunción: La que había surgido de la tentación que llegó, con el tránsito de los últimos tiempos, a hacerse demasiado grande, de sustituir a los objetos matemáticos por puros símbolos sin contenido intuitivo y a los enunciados por simples reglas de empleo de estos símbolos. De esa manera se encuentran hoy simultáneamente fundadas e inextricablemente mezcladas, la lógica y la teoría de conjuntos, pero de tal forma que todo juicio que sobre estas teorías deba emitirse se excluye de la matemática y se lleva a otro contexto distinto, el de la ya mentada *metamatemática*[37]. Mantenido el propósito de formalizar, acto seguido, esta última ciencia, se mengua en gra-

---

[37] El término *metamatemático* tiene hoy un sentido más amplio del que fijó Hilbert, y podría traducirse en el sentido actual, en *teoría de los sistemas formales.*

daciones sucesivas aquel contenido intuitivo absolutamente inmerso a que aludíamos con anterioridad y del que, recordemos dijo Poincaré, jamás nos podremos desprender del todo.

No está de más añadir que, por ello, la actitud que se adopta en una obra moderna de iniciación de nuestra ciencia, queda definida especificando desde sus primeras páginas, el dominio intuitivo de base, que comprende usualmente:

Reglas de la lógica de las proposiciones convenientemente precisadas.

Nociones de conjunto, de elemento, de pertenencia, intuitivamente aceptados, ilustrándolos con ejemplos.

Admisión de la existencia del conjunto de los números naturales.

Esto último por razones, en general, de simplificación del curso a que competa la obra, puesto que esa existencia se desprende de la teoría de conjuntos.

Señalemos finalmente que aún quedan ramas de la matemática que, fundamentadas sobre los principios básicos de la teoría de conjuntos, deben ser axiomatizadas. Pero si esto no se ha hecho es porque todavía no se dispuso del tiempo preciso para ello y, a no dudarlo, la axiomatización será ya en breve total.

Ahora bien, aunque las matemáticas apunten hacia una abstracción progresiva y hacia una generalización cada vez de mayores perspectivas, no podremos olvidar jamás que sus más importantes intereses y estímulos estribarán siempre en sus aplicaciones. Klein decía que «pretender desterrar de la Matemática sus aplicaciones, equivaldría a querer concentrar la vida de un animal en su osamenta únicamente, sin parar atención en sus músculos, nervios y vísceras» [38] y puede venir a colación señalar que la aparición en los años 1940 a 1945 de las máquinas de calcular electrónicas ha significado

---

[38] Félix Klein —«Matemática elemental (desde un punto de vista superior)»— C.S.I.C. (Bibliot. Mat. n.° 3 - Madrid: vol. I, pág. 21).

una revolución tan importante para la ciencia como el descubrimiento de las cifras.

Abramos una pausa e indiquemos, por último, que para poder tomar conciencia de la vida interna de nuestra matemática de hoy, de su (a la vez) unidad y diversidad, debemos imaginar con Bourbaki [39] «una gran ciudad, cuyos suburbios no cesan de progresar, de manera un poco caótica, sobre el terreno circundante, mientras que en el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa, echando abajo los viejos barrios y sus laberintos de callejuelas para lanzar hacia la periferia, avenidas cada vez más directas, más amplias y más cómodas».

Mas ¡cuidado!, la propia rememoración trazada de orígenes y de encrucijadas de grandes controversias de nuestra actual ciencia, nos brinda buenas razones para, al menos, dudar de que se esté realizando el último plan de reordenación del universo matemático. Cabe suponer que no existe argumento supremo y definitivo que permita considerar al método axiomático como la postrera concepción de la ciencia, ni tan siquiera que la base conjuntista en la que se sustenta haya adquirido derechos inalienables de eternidad.

En consecuencia, no podemos evitar sumirnos en esta reflexión final:

Presumimos que las estructuras no sean definitivas ni inexpugnables. No en vano afirma Piaget acertadamente: «El estructuralismo es un método, no una doctrina». La nueva concepción de la teoría de las categorías [40] surgida hace escasamente unos años (década de los 50), generalización aún más abstracta y de lenguaje algo más cómodo y unificador que el puramente conjuntista, induce en efecto a pensar en el adve-

[39] N. Bourbaki (La arquitectura de las matemáticas) —«F. le Lionnais— Las grandes corrientes del pensamiento matemático» (Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1965; pág. 47).

[40] Teoría de la que es uno de los principales creadores el polacoamericano Samuel Eilenberg (n. 1913), única excepción no francesa de la asociación bourbakista.

nimiento de una supermatemática categorial; más quizás, las directrices futuras trunquen esta previsible marcha y contemplen sencillamente un desarrollo ulterior de la matemática con un mayor número de estructuras fundamentales que persiga mostrarnos las facetas de una mayor fecundidad en unos axiomas nuevos.

Pudiera suceder también que algún día sobreviniera algún genio de nuestra ciencia estableciendo la singular demostración simultánea de un teorema y de su contrario (incuestionable absurdo admitido durante dos milenios) quebrando la trayectoria triunfal del método axiomático o tal vez que insignes investigadores de la lógica descubran sorprendentes contradicciones sutilmente ocultas en la maraña de formas empleadas por nuestro intelecto; es posible incluso, que algún excepcional congénere llegara a revelarnos ignotos elementos de juicio incompatibles, matemáticamente hablando, con el desenvolvimiento actual de la teoría de conjuntos; o, por último, que sea tan sólo nuestra propia experiencia la que haga aflorar anomalías notables que hoy no se perciben al estadio magno de nuestras percepciones mentales.

Será entonces necesario volver a rehacer la ciudad construida y, si es preciso, reconsiderarla desde las raíces de sus primeras edificaciones. Pero no será cuestión de quedarnos atónitos ni petrificados. Téngase por seguro que nuestra ciencia no habrá alterado un sólo ápice sus objetivos estrictamente fundamentales. Basta solamente pensar en que los espectaculares logros de todo tipo que ha proporcionado en el transcurso de los tiempos, no han podido ser originados más que por el arrollador impulso de una ciencia muy sabiamente construida.

De cualquier forma, quedaremos siempre en condiciones de citar las palabras de Galileo: «Nadie sabrá entender el gran libro del Universo si ignora su lenguaje, el lenguaje matemático».

SE TERMINO
DE IMPRIMIR
EN LOS TALLERES
ARTES GRAFICAS
"GROSSI"
DE OVIEDO
EL DIA 30 DE MAYO
FESTIVIDAD
DE SAN FERNANDO
DEL AÑO
MCMLXXIX