Con motivo del Día Escolar de las Matemáticas

Música y Matemáticas

la Armonía de los Números

VICENTE LIERN CARRIÓN · TOMÁS QUERALT LLOPIS

FESPM

12 de mayo de 2008 • Día Escolar de las Matemáticas

"La música se ocupa de los números sonoros"

G. Zarlino, compositor y teórico italiano (1517 - 1590)

Descubrimiento de las razones de la consonancia por Tubal y Pitágoras.

Gaffurio, Theorica musice, 1492.

La relación entre **música y matemáticas** es mucho más estrecha de lo que podría pensarse a primera vista. Por un lado, las matemáticas son la herramienta fundamental para el tratamiento de los procesos físicos que generan la música; pero, por otro lado, las matemáticas están en la propia esencia de este arte. La manera de elegir las notas musicales, su disposición, las tonalidades, los tiempos e incluso gran parte de los métodos de composición son pura matemática.

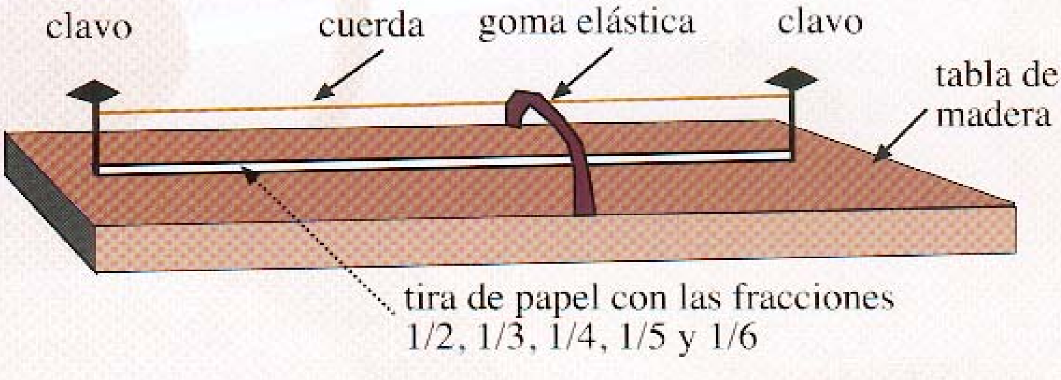
En el siglo VI a. C., los pitagóricos completan y difunden la práctica caldea de seleccionar las notas musicales a partir proporciones entre las longitudes de cuerdas tirantes. Crean así un vínculo entre Música y Matemáticas que no se ha roto hasta nuestros días. Muestra de esta relación es el uso, en ocasiones intuitivo, del número áureo en las sonatas de Mozart, en la Quinta Sinfonía de Beethoven, o, más recientemente, en algunas obras de Bartók, Messiaen y Stockhausen. Por su parte, matemáticos de todas las épocas han hecho de la música su objeto de estudio y, en la actualidad, tanto en revistas de Música como de Matemáticas o en Internet, pueden encontrarse multitud de documentos en los que la teoría de grupos, los fractales, la teoría del caos, o la lógica fuzzy, por ejemplo, se utilizan de forma práctica en la creación y el análisis de las obras musicales.

El monocordio

Aunque el hombre siempre se planteó con qué criterio la música admite unos sonidos y rechaza otros, nos remontaremos como mínimo a la Mesopotamia del siglo VI a.C. Allí, muchos fenómenos cósmicos eran representados por la comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro proporciones que regían tanto el Universo, como la música o el destino de los hombres: 1/1, 1/2, 2/3 y 3/4. Estas relaciones, llamadas actualmente unísono, octava, quinta y cuarta, respectivamente, proporcionaban los sonidos consonantes y daban lugar a la escala caldea que, probablemente, contenía 7 notas. Estas proporciones, vistas como la correlación entre ciertos intervalos musicales y los primeros números naturales, hacen de Pitágoras el descubridor del método para obtener la escala musical.

El instrumento utilizado por Pitágoras fue el monocordio. El artilugio consistía en una simple cuerda de longitud proporcional a 12 tendida sobre una tabla, con una clavija o puente móvil deslizable entre cuerda y tabla, para obtener cuerdas de diversa longitud, en particular las proporcionales a 9, 8 y 6, manteniendo en tensión los dos trozos que el puente móvil dividía a la cuerda, y permitiendo además que uno de ellos pudiera vibrar independientemente del otro. Al pulsar la cuerda completa se producía un sonido que Pitágoras tomó como primario, el tono. Moviendo el puente y pulsando las cuerdas resultantes proporcionales a 9, 8 y 6, se producían respectivamente la cuarta, la quinta y la octava. Los sonidos producidos mediante otras posiciones del puente móvil resultaban disonantes, o al menos no tan consonantes como los anteriores.

Construye tu monocordio



Música y Matemáticas

Necesitarás: una tabla de madera de unos 40 cm. de longitud, dos clavos, una cuerda (preferiblemente de guitarra), y una goma elástica.

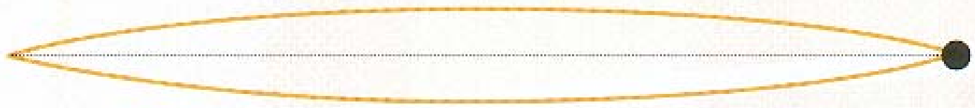
Construcción:

1. Clava los clavos sobre la tabla de manera que entre ellos haya 24 cm. de longitud (o bien una distancia que sea múltiplo de 12).

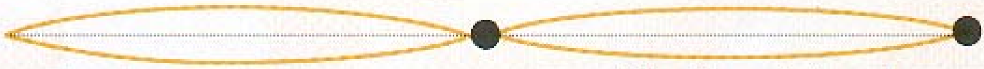
2. Pega sobre la tabla una tira de papel en la que dibujarás una línea recta marcando las fracciones 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6, en los puntos donde cada fracción indique lo que representa la distancia desde ese punto al clavo más próximo respecto de la distancia total entre ambos clavos.

3. Coloca la cuerda alrededor de los clavos de manera que quede bien tensada.

4. La goma elástica la introduciremos por uno de los extremos de la tabla y nos servirá para fijar un punto determinado de la cuerda.



Unísono 1:1



El primer armónico
2:1 - La octava

El primer intervalo
2:1 - La octava

El segundo armónico
3:1-Una quinta sobre la octava

El segundo intervalo
3:2 - Una quinta

El tercer armónico
4:1-Dos octavas

El tercer intervalo
4:3 - La cuarta

El cuarto armónico
5:1-Dos octavas y tercera mayor

El cuarto intervalo
5:4 - Tercera (mayor)

El quinto armónico
6:1-Dos octavas y una quinta

El quinto intervalo
6:5 - Tercera (menor)

Experiencia:

- Pulsa la cuerda del monocordio varias veces y escucha el sonido que ésta emite. Estás escuchando la nota principal.
- Coloca la goma elástica de manera que sujete la cuerda por el punto donde está señalada la fracción 1/2, y haz vibrar una de las dos partes de la cuerda. ¿Qué diferencia aprecias? Lo que has escuchado se corresponde con el mismo tono pero en una octava superior.
- Ahora desplaza la goma elástica sucesivamente hasta el punto donde están las fracciones 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6, y haz vibrar el lado más largo de la cuerda. Los sonidos que escucharás se corresponden con la quinta, la cuarta, la tercera mayor y la tercera menor, respectivamente.

Juegos con Música y Matemáticas

El objetivo de estos juegos es la familiarización del alumno con los valores de las notas, mediante un entorno lúdico que motiva al estudiante a participar activamente. Tanto con la baraja como con los dominós, lo que haremos es identificar el valor de cada nota y operar con dicho valor. Aunque permiten jugar con los colores, es inevitable conocer los valores relativos de las notas para poder contar puntos una vez finalizado el juego.

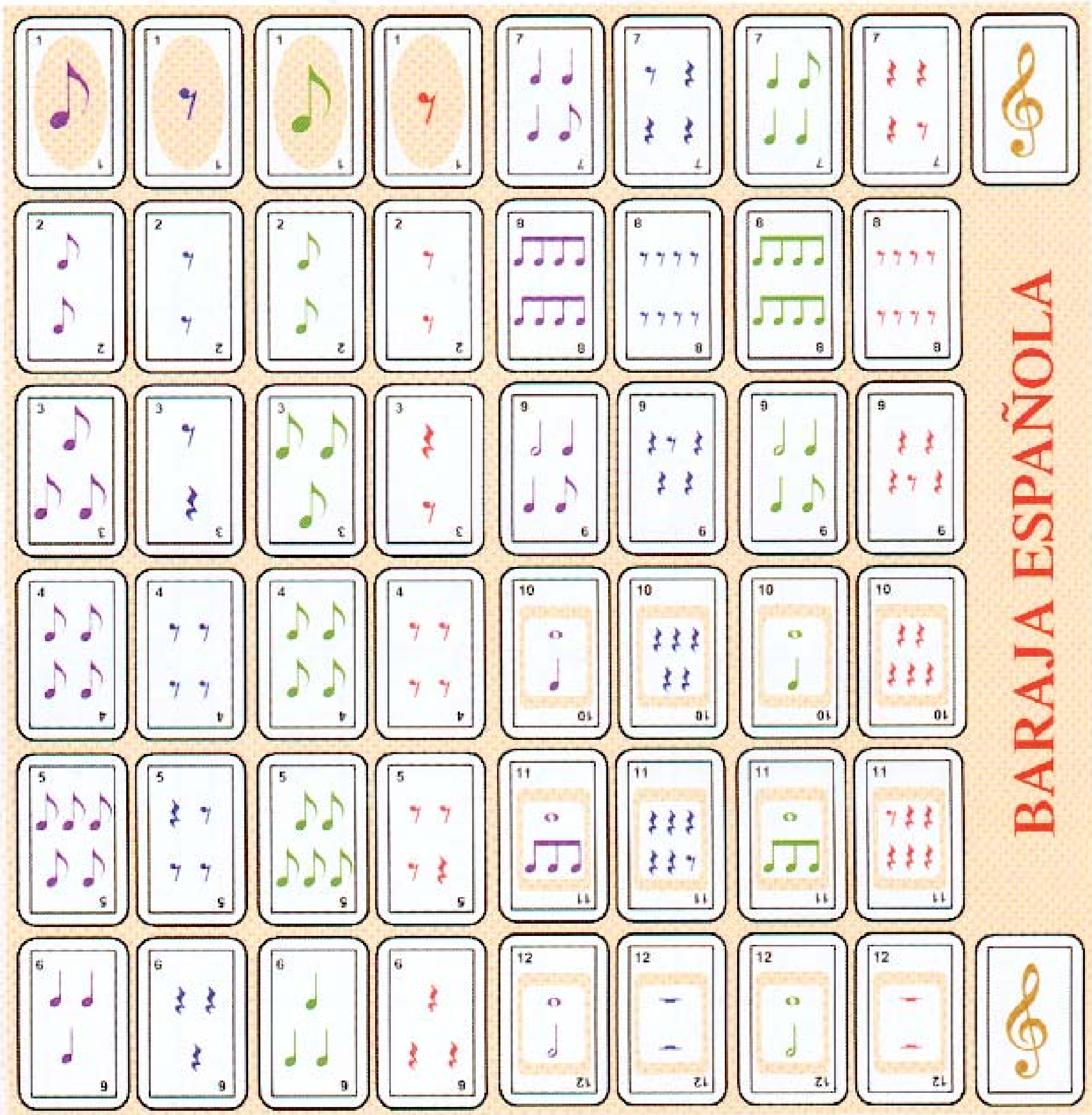
Las figuras tienen un valor relativo cuya relación viene dada por potencias de 2. Así, una redonda dura lo mismo que dos blancas, que cuatro corcheas, etc. Además, si a una nota (o silencio) se le añade un punto a la derecha, *puntillo*, ésta se incrementa en la mitad de su valor. Así, una negra con puntillo equivale a 3 corcheas. Las equivalencias entre notas son las siguientes:

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	𝅝 =	2 𝅗𝅥 =	4 ♩ =	8 ♪ =	16 𝅘𝅥𝅯 =	32 𝅘𝅥𝅰 =	64 𝅘𝅥𝅱
Silencios	𝄻 =	2 𝄼 =	4 𝄽 =	8 𝄾 =	16 𝄿 =	32 𝅀 =	64 𝅁

A partir de estos valores, podemos diseñar diversos juegos de los que aquí presentamos una muestra.

Baraja española

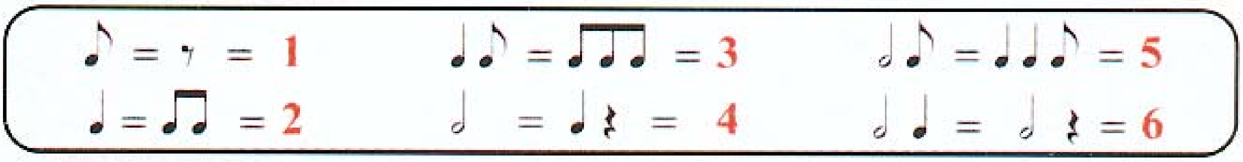
Está formada por 48 cartas clasificadas en 4 palos, numerados del 1 al 12, y 2 comodines. Los oros, espadas, copas y bastos tradicionales se han sustituido por figuras de notas (moradas y verdes) y por silencios (azules y rojos). El 1 es la corchea o silencio de corchea y el resto de valores se obtienen calculando su equivalencia en corcheas o silencios. Por ejemplo, dos corcheas (o sus silencios) son el 2, ♩♩♩♪ = 7 ♪ representa el 7 del palo ♪, etc. Con esta baraja se puede jugar a cualquier modalidad para la que se emplee la baraja española y las reglas de juego serán las mismas.



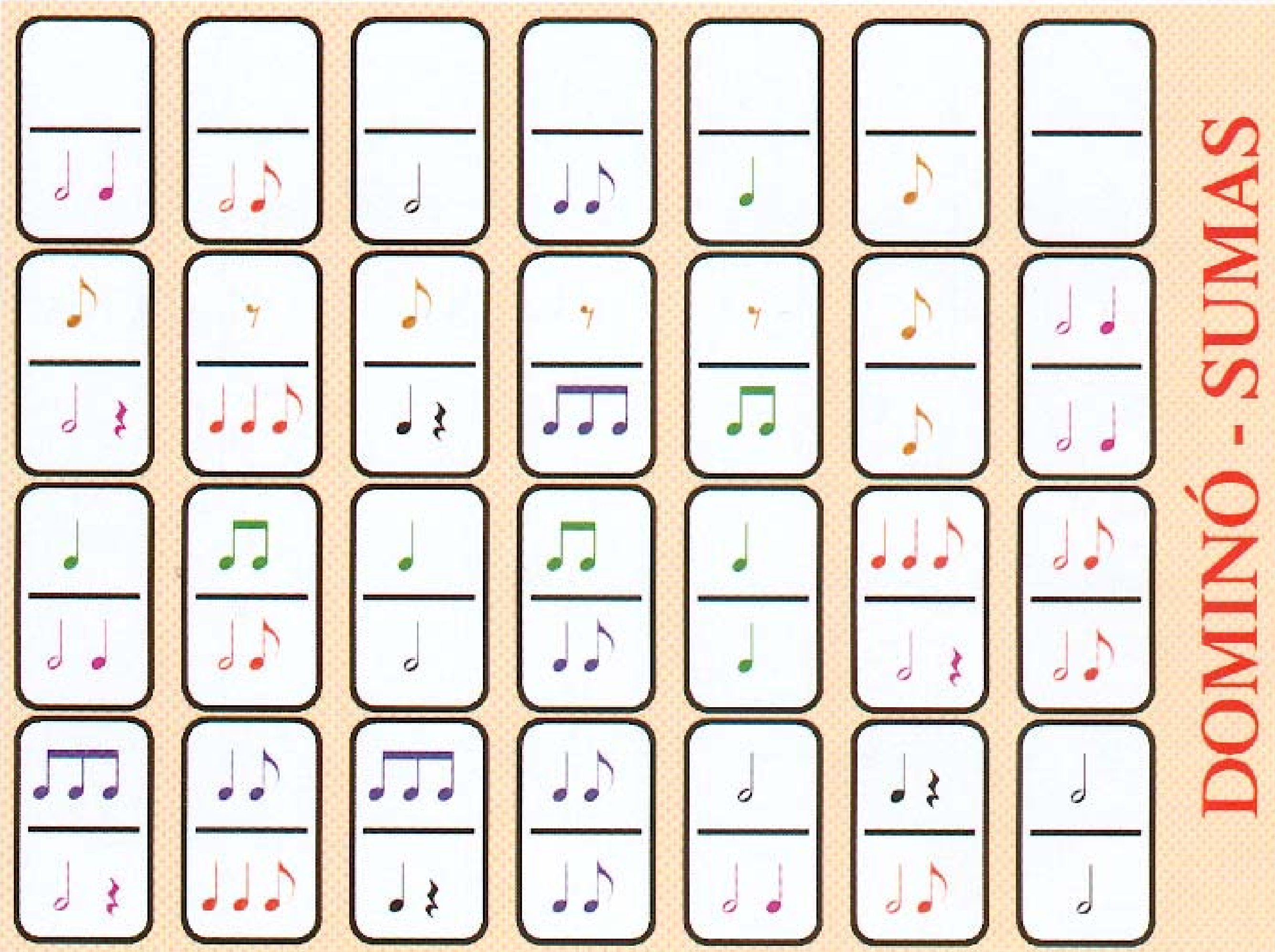
Dominó

Se han sustituido los puntos dominó por figuras de notas siguiendo el criterio de suma de tiempos o del valor relativo de las notas. Una vez establecida la equivalencia entre puntos y notas, las reglas del dominó son las habituales.

Dominó de sumas. Si tomamos el valor de la corchea como el 1, dos corcheas, o sus silencios, serán el 2, y así sucesivamente. En este dominó, los números no se expresan con una sola combinación de notas, pero para facilitar el desarrollo del juego se ha coloreado cada "número" con un color diferente. La equivalencia de puntos es



y las fichas de este dominó son las siguientes:



Dominó de potencias. Se basa en el valor de las figuras. Como hemos visto, una figura es equivalente a las demás multiplicándola por una potencia de 2 adecuada. Tomamos como unidad la semifusa y vemos a cuántas semifusas equivalen las demás notas. Por ejemplo, 2^3 semifusas son una corchea. En este caso los exponentes del 2 nos proporcionan los puntos del dominó, es decir, tenemos las siguientes equivalencias:

𝅘𝅥𝅲 $=2^0$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 0	𝅘𝅥𝅰 $=2^2$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 2	♩ $=2^4$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 4	𝅝 $=2^6$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 6
𝅘𝅥𝅱 $=2^1$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 1	♪ $=2^3$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 3	𝅗𝅥 $=2^5$ 𝅘𝅥𝅲 $=$ 5	

Puedes descargarte las fichas de este dominó en http://www.fespm.org.

Matemáticas y cuñas musicales

En la actualidad hay muchos músicos que dedican su producción a las cuñas publicitarias, las películas o los fragmentos musicales que aparecen en programas de radio y televisión. En esta actividad, la duración exacta de la música resulta fundamental porque, además de que todo debe estar sincronizado, las tarifas se establecen por el tiempo de emisión.

En la partitura hay varias indicaciones que sirven para medir los tiempos: el compás, el tempo, las figuras utilizadas, etc. Veamos algunas con más detalle:

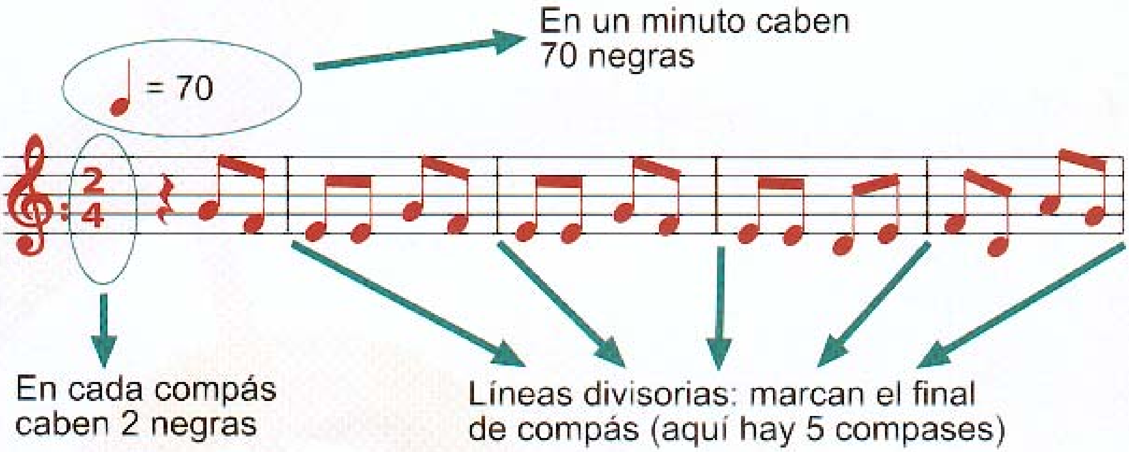
- El compás es una fracción: el numerador indica cuántos tiempos tiene y el denominador indica la pulsación o el tipo de nota que ocupa cada tiempo: 2 indica que una blanca ocupa un tiempo, 4 que es una negra la que lo ocupa, 8 que es una corchea, y así sucesivamente. En ocasiones, en el denominador se escribe directamente la figura que ocupa un tiempo, por ejemplo 2/♩.

- El *tempo* expresa la velocidad de una obra. Esta velocidad solía expresarse mediante términos en italiano que se corresponden, de forma aproximada, con las siguientes pulsaciones (tiempos) por minuto:

Nombre	Pulsaciones/minuto	Nombre	Pulsaciones/minuto
Largo	hasta 50	Moderato	108-120
Larghetto	50-66	Allegro	120-168
Adagio	66-76	Presto	168-200
Andante	76-108	Prestissimo	200-207

Actualmente, el tempo se expresa de forma más precisa indicando el número de notas por minuto. Por ejemplo, ♩ = 90 significa que en un minuto deben ejecutarse 90 negras. Una vez establecido el valor de una nota, el resto también queda fijado. Así, si en 1 minuto de un Largo caben hasta 50 negras, también caben 50/4=12,5 redondas. Es decir, que si el tempo es Largo, una redonda dura como mínimo 60/12,5 = 4,8 segundos.

Ahora bien, si nuestra intención es conocer cuánto dura una obra, independientemente del tipo de notas que forman cada compás, podemos calcular la duración de la música expresada en un pentagrama. Veamos un ejemplo:



En este fragmento hay 5 compases formados, cada uno, por dos negras, puesto que es un 2/4 , y conocemos el valor de la negra. Entonces,

$$5 \text{ compases} \times 2 \text{ negras} \times \frac{1}{70} \text{ minutos} = \frac{10}{70} \text{ minutos} = \underline{8{,}57143 \text{ segundos}}$$

Actividades:

1. Fijándote en los valores que se da en cada tempo a la pulsación, y suponiendo que la pulsación es siempre la negra, calcula cuánto duran como mínimo y como máximo las diferentes notas.

2. Operando como en el pentagrama anterior, calcula el tiempo que duran algunas obras conocidas. Si no sabes dónde conseguirlas, en http://www.fespm.org tienes ejemplos.

La aritmética de la música

En música, la *diferencia* de frecuencia entre dos sonidos recibe el nombre de ***intervalo***. Pero, cuando decimos diferencia no estamos hablando de una resta, porque la percepción del sonido no es lineal. Por ejemplo, sabemos que un sonido de frecuencia 880 Hz es una octava más alto que otro de frecuencia 440 Hz y, a su vez, éste es una octava más alto que un tercero de 220 Hz. Si la percepción fuese lineal, la diferencia entre estos sonidos sería diferente:

$$880 - 440 = 440 \text{ y } 440 - 220 = 220.$$

Sin embargo, en la práctica sabemos que el oído, en ambos casos, percibe la misma distancia: una octava. Este inconveniente quedó resuelto hace siglos por los músicos determinando la distancia a partir de un cociente. Así, se tiene

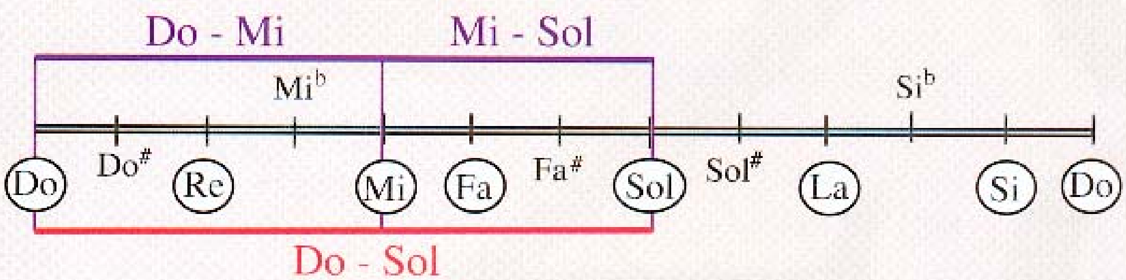
$$\frac{880}{440} = \frac{440}{220} = 2,$$

que proporciona el mismo valor.

Podéis calcular ejemplos de intervalos dividiendo cualquier par de frecuencias de las 12 notas de la octava central del piano:

Nota	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa
Hz	261,6265	277,1826	293,6648	311,127	329,6275	349,2282
Nota	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si
Hz	369,9944	391,9954	415,3047	440	466,1638	493,8833

Pero la percepción del sonido tiene más repercusiones en la aritmética. Si al intervalo Do – Mi le añadimos el intervalo Mi – Sol, el resultado debe ser el intervalo Do – Sol:



Por lo tanto, esta operación no responde a la suma de fracciones, sino al producto,

$$\text{Do}-\text{Mi} \;<+>\; \text{Mi}-\text{Sol} = \frac{329{,}6275}{261{,}6265} \bullet \frac{391{,}9954}{329{,}6275} = \frac{391{,}9954}{261{,}6265} = \text{Do}-\text{Sol}.$$

A continuación presentamos la manera de operar con intervalos. Dadas tres frecuencias f_1, f_2 y f_3 no nulas ordenadas de mayor a menor (de agudo a grave). Podemos realizar las siguientes operaciones:

SUMA de intervalos	**RESTA** de intervalos
$\frac{f_1}{f_2}\langle + \rangle \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1}{f_2} \times \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1 f_2}{f_2 f_3} = \frac{f_1}{f_3}$ Ejemplo: (Do-Sol) + (Sol-Si) = Do-Si	$\frac{f_1}{f_3}\langle - \rangle \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1}{f_3} : \frac{f_2}{f_3} = \frac{f_1 f_3}{f_2 f_3} = \frac{f_1}{f_2}$ Ejemplo: (Do-Si) — (Sol-Si) = Do-Sol
MULTIPLICACIÓN de p intervalos iguales	**DIVISIÓN** en q partes iguales
$\frac{f_1}{f_2}\langle \times \rangle p = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^p = \frac{f_1^{\,p}}{f_2^{\,p}}$ Ejemplo: (Do-Re) ×2 = Do-Mi	$\frac{f_1}{f_2}\langle : \rangle q = \sqrt[q]{\frac{f_1}{f_2}}$ Ejemplo: (Do-Mi) / 4 = Do-Do#

Actividades:

Teniendo en cuenta las frecuencias de las notas que aparecen en la tabla anterior y la forma de operar con intervalos, responde a las siguientes cuestiones:

1. Calcula los intervalos (Do-Do#) $\langle + \rangle$ (Do#-Re), (Do-Re) $\langle - \rangle$ (Do-Do#), (Do-Sol) $\langle : \rangle$ 3 y (Mi-Sol) $\langle \times \rangle$ 2

2. Resta a Sol-Si un tercio del intervalo.

3. Añade a Do-Fa# un cuarto del intervalo.

4. Divide la octava en 10 intervalos iguales

Afinación y matemáticas: La belleza de la imprecisión

Históricamente, los sistemas de afinación se basan en los conceptos de quinta, de octava y en su relación. Entre dos notas de frecuencias f_1 y f_2, de manera que $f_1 < f_2$ hay un intervalo de quinta si $f_2 = 3/2\, f_1$ y hay un intervalo de octava si $f_2 = 2\, f_1$. Si tomamos como referencia la nota Fa, el orden de las quintas es

Fa-do-sol-re-la-mi-si.

Pero siete son pocas notas para hacer música. Podemos seguir obteniendo notas, a partir de las quintas, y las nuevas notas se dice que están alteradas. Si la alteración se obtiene multiplicando por 3/2 se obtienen los sostenidos,

Fa#-do#-sol#-re#-la#-mi#-si#.

Si por el contrario se obtienen dividiendo entre 3/2 se obtienen las notas con bemoles

Si♭-mi♭-la♭-re♭-sol♭-do♭-fa♭.

De esta forma, aumentando el número de alteraciones, podríamos generar tantas notas como quisiéramos; pero en la práctica, la música occidental utiliza sólo 12 notas que siguen el esquema siguiente:

Multiplicamos →

mi♭ - si♭ - fa - do - sol - re - la - mi - si - fa# - do# - sol#

← Dividimos

Partimos del Do. Para ir hacia la derecha se multiplica por el valor de la quinta y hacia la izquierda se divide por este valor. Así, por ejemplo,

$$\text{La} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{Do}, \quad \text{Sib} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{Re}.$$

Y, ¿por qué doce es un número adecuado para la cantidad de notas diferentes? La principal razón es puramente aritmética. Con 12 quintas tenemos 7 octavas de forma muy aproximada, porque

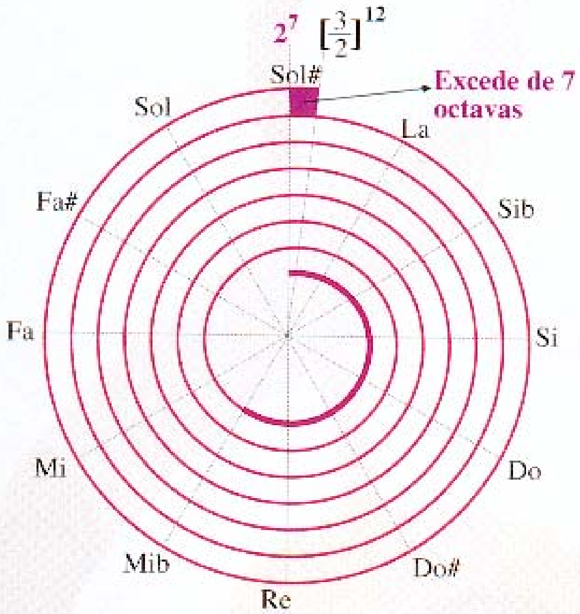
$$2^7 = 128 \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7463.$$

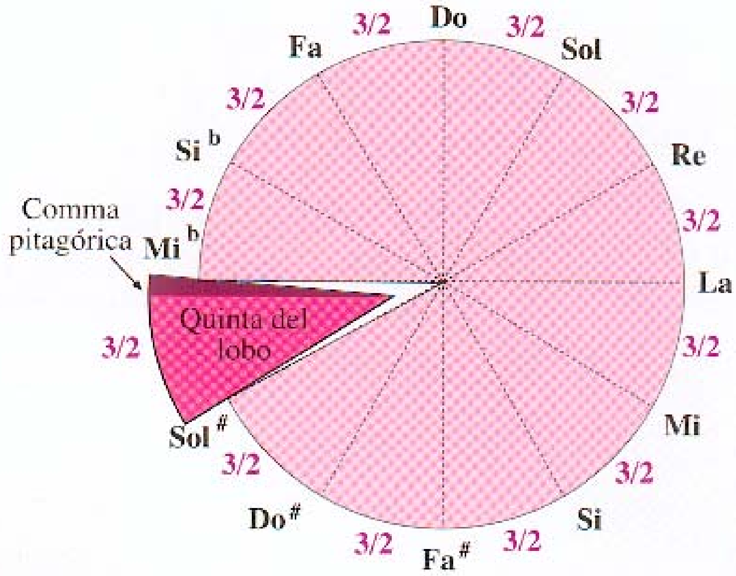
La diferencia entre estos dos valores se llama *comma pitagórica*, y se calcula utilizando las reglas para restar intervalos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \langle - \rangle \, 2^7 = \frac{\left(3/2\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136.$$

Por pequeña que parezca, esta "imprecisión" ha sido uno de los principales temas de investigación de los musicólogos a lo largo de más de veinte siglos.

La situación se puede ver en una espiral en la que aparecen las notas, de manera que cada vuelta representa una octava; o también sobre un círculo (*círculo de quintas*) en el que se ve claramente que la duodécima quinta excede del espacio que cerraría el círculo.





Para poder cerrar el círculo, se puede acortar la última quinta en una comma pitagórica, dando lugar a una quinta más corta, denominada quinta del lobo que, por ser demasiado pequeña, "aullaba" de forma desagradable. Desde luego, ésta no era la mejor solución, sino que podría distribuirse el exceso entre varias quintas. Si se resta 1/12 de coma pitagórica, a cada quinta, la nueva quinta mide

$$\frac{3}{2}\ \langle\text{-}\rangle\ \frac{1}{12}\ \text{de comma} = \frac{3/2}{\sqrt[12]{3^{12}/2^{19}}} = \frac{3\cdot 2\sqrt[12]{2^7}}{2\cdot 3} = \sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}49831$$

y con esto se obtiene el temperamento igual de 12 notas, que es el sistema afinación que se utiliza normalmente. Pero, a lo largo de la historia ha habido otras muchas soluciones. Por ejemplo, el temperamento de Werckmeister de 1/3 de comma cierra el círculo de quintas acortando 1/3 de comma en las tres quintas siguientes:

Do-Sol, Sol-Re, Si-Fa#

Es decir que en estas tres quintas, a la quinta natural le "restamos" 1/3 de coma pitagórica, por tanto, para estos tres casos el intervalo de quinta será

$$\frac{3}{2}\,\langle\text{-}\rangle\,\frac{1}{3}\text{ de comma}=\frac{3/2}{\sqrt[3]{3^{12}/2^{19}}}=\frac{3\cdot 2^{6}\sqrt[3]{2}}{2\cdot 3^{4}}=\frac{32\cdot\sqrt[3]{2}}{27}\approx 1{,}49324,$$

y las nueve quintas restantes son naturales, es decir su valor es 3/2.

Actividades:

1. Propón otras soluciones para eliminar la comma pitagórica acortando algunas quintas.

2. Calcula la frecuencia de las notas para las soluciones que has propuesto en el apartado anterior.

Si no se te ocurre cómo hacerlo, quieres ver algunas soluciones que se han empleado históricamente o escuchar cómo suenan las notas (con el programa MATHEMATICA®) consulta http://www.fespm.org.

SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Apdo. de Correos 590
06080 BADAJOZ
http://www.fespm.org/
e-mail: publicafespm@wanadoo.es

MÚSICA Y MATEMÁTICAS

Autores: Vicente Liern Carrión y Tomás Queralt Llopis
Editor: Ricardo Luengo
Impresión: TECNIGRAF, S.A. Badajoz
Dep. Legal: BA-8/2008