Historia

Sección a cargo de

Antonio J. Durán[1]

Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García Quijano (1848)

por

Alberto Martínez Delgado

Resumen

Entre las numerosas demostraciones del teorema de Pitágoras, exponemos, junto a las consideradas como clásicas, las aportadas en 1848 por Evaristo García Quijano, profesor de matemáticas en el Colegio Naval Militar de Cádiz, y argumentamos documentalmente su originalidad, en algún caso sin precedentes conocidos. Destacamos también la importancia del teorema de Pitágoras desde el punto de vista práctico, de la teoría matemática y de su enseñanza; en relación con la enseñanza de este teorema, planteamos el problema del esoterismo, inherente a la escuela pitagórica, y que, puede afectar al mismo procedimiento de enseñanza del teorema de Pitágoras y al desarrollo global de las matemáticas y de su enseñanza.

I. Introducción. interés práctico, teórico y didáctico del teorema de pitágoras.

El teorema de Pitágoras es quizás la relación matemática, de cierta complejidad, más conocida por personas con una formación básica y que ofrece, al mismo tiempo, un importante valor práctico, teórico y didáctico, tanto en su versión aritmético-algebraica ($a^2 = b^2 + c^2$, siendo "a" la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y "b" y "c" las medidas de los catetos del mismo) como en su versión geométrica (teniendo en cuenta que a^2 es el área de un cuadrado construido tomando como lado la hipotenusa y que "b^2"y "c^2" son las áreas respectivas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos).

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Antonio J. Durán; Sección Historia Gaceta RSME; Departamento de Análisis Matemático; Facultad de Matemáticas; Universidad de Sevilla; Aptdo. 1160; 41080–Sevilla; `duran@cica.es`

La importancia del teorema de Pitágoras, "el más celebrado teorema de geometría"(Schaaf, W. L., 1951, p. 585), en la etapa escolar queda patente en el resultado obtenido en una encuesta, realizada por H.-J. Vollrath, mostrando que "los teoremas que más apreciaban los escolares del nivel medio eran el de Thales y el de Pitagóras, y que también para los estudiantes el teorema de Pitágoras ocupaba el primer plano en el recuerdo de sus tiempos escolares"(Artmann, B.,1994, p. 343). Comas, M. (1923, p. 7), después de resaltar, para la escuela primaria, el carácter experimental de las matemáticas y de afirmar que "los axiomas, son, en último término, hijos de la experiencia", sostiene que "a los niños les interesa mucho teoremas, como el de Pitágoras, que les enseña algo nuevo, inesperado y susceptible de numerosas aplicaciones prácticas, mientras que les aburre buscar demostraciones a otros que conocen por experiencia y creen evidentes (ejemplo: la igualdad de ángulos rectos)". Bouligand, (G., 1934, p. 25) considera que este teorema "es la fuente de todas las relaciones métricas establecidas en geometría elemental".

El teorema de Pitágoras presenta también interesantes conexiones con otros problemas y teorías, tales como "la sección áurea, la simetría dinámica, espirales logarítmicas, trisección del ángulo, duplicación del cubo, cuadratura del círculo, determinación del valor de π, concepto de número irracional, polígonos y poliedros regulares y estrellados, teoría de números, constructibilidad de ángulos y polígonos, fracciones continuas, ..." (Schaaf, W. L., 1951, p. 585), trigonometría, geometría analítica, vectores (Flores, A., 1993, p. 156),..., espacios de Hilbert –demostración del teorema de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky y aspectos de ortogonalidad del desarrollo de funciones en series de Fourier– (Languereau, H., 1998, p. 31).

El teorema de Pitágoras ha sido conocido por las primeras civilizaciones de la humanidad (Mesopotamia, Egipto, India, China, ...), al menos desde un punto de vista práctico. Allman, G. J. (1976, p. 37) se inclina por atribuir el descubrimiento de esta teorema a los egipcios, "en cuanto el teorema concierne la geometría de áreas, y en cuanto el método usado sea el de disección de las figuras, en el que los egipcios eran famosos".

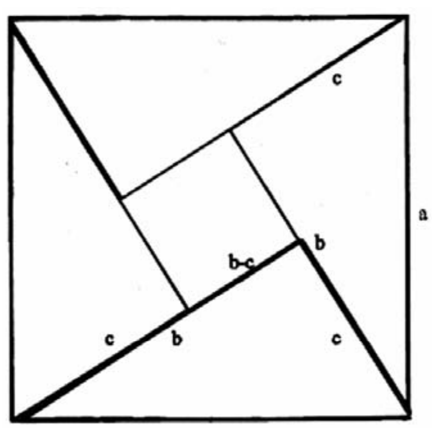

Figura 1a. Punto de partida de una demostración de Bhâskara

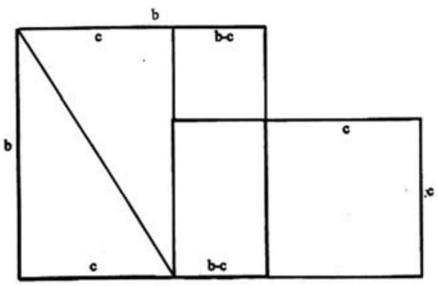

Figura 1b. Reestructuración de la Fig. 1a
¡Observe!

Burton, D. M. (1991, p. 106) sostiene que "un diagrama en la Aritmética Clásica [china] representa la más antigua demostración conocida del teorema de Pitágoras ... admirada por su simple elegancia, y más tarde expuesta en el *Vijaganita* (Cálculo de Raíces) del matemático hindú Bhaskara", sobre la base de la figura 1a, que reestructurada en la figura 1b, nos conduce al teorema: "observe" dice Bhaskara, sin añadir otra palabra de explicación (Burton, D. M., ibid.).

La traducción –en 1945– de la tablilla de arcilla babilonia Plimpton 322 "establece más allá de toda duda que el teorema de Pitágoras era bien conocido por los matemáticos babilonios más de mil años antes de que naciera Pitágoras" (Gillings, R. J., 1972,); similar afirmación realiza Eves, H. (1976, p. 62), aunque matizando que "... la primera prueba general podría deberse a Pitágoras", prueba respecto a la cual, este autor, conjetura que podría ser del tipo de disección, similar a la de la figura 2a, reordenada en la figura 2b. Esta prueba coincide, como veremos más adelante, en lo esencial, con la tercera demostración aportada por E. García Quijano.

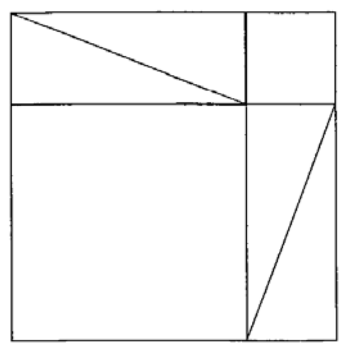

Figura 2a. Prueba de disección (¿Pitágoras?).

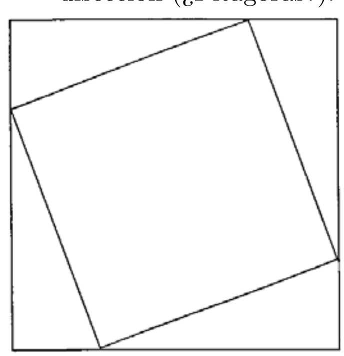

Figura 2b. Reestructuración Fig. 2a (figura utilizada también por G. Quijano).

E. Glasersfeld, citado por Steffe, L. P. (1990, p. 181–182) "ha sugerido que la configuración geométrica de la figura [3] llevó a Pitágoras a inventar la relación que lleva su nombre". Esta conjetura presenta algunos problemas, entre los que mencionaremos uno histórico, otro de coherencia pitagórica y otro de coherencia de la teoría constructivista radical (de la que Glasersfeld es un destacado representante). Los datos sobre el origen egipcio y babilonio

del teorema de Pitágoras –y de gran par-
te de la doctrina pitagórica– y sobre la base práctica del mismo, conducen a suponer que este teorema estuviera planteado, quizás en términos exclusivos para triángulos rectángulos no isósceles (en particular el triángulo 3-4-5), con lo que resultaría poco probable un razonamiento deductivo a partir de un triángulo isósceles (a pesar de que su figura facilita el razonamiento sobre las áreas referidas en el teorema).

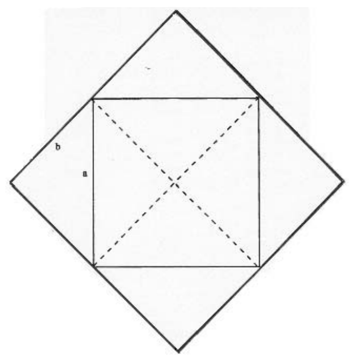

Figura 3. Conjetura de Grasersfeld
sobre obtención por Pitágoras del teorema (Steffe).

La vinculación personal de Pitágoras con Egipto y Babilonia es recogida por Wipper, J. von (1911, p. 3), al afirmar que “Pitágoras vivió 21 años en Egipto y 12 en Babilonia”. A este obstáculo socio-histórico hay que añadir que no existe ningún triángulo rectángulo isósceles cuyos lados midan números enteros (ni racionales), lo cual, teniendo en cuenta la doctrina pitagórica, centrada en los números enteros y sus razones, no propicia la argumentación con triángulos que, de antemano no tienen medidas enteras. Bien es verdad que la conjetura de Glasersfeld, acerca de la demostración que pudo haber realizado el mismo Pitágoras, podría contar a su favor el que no nos haya llegado dicha demostración (¿quizás por propia decisión de la escuela pitagórica?); el hecho de que la ausencia de soluciones racionales, en el caso de triángulos rectángulos isósceles, era conocido en la escuela pitagórica, aunque se decretara el secreto en torno al mismo (secreto violado por Hipasos, cuya acción fue castigada) atenúa la objeción que hemos manifestado a la sugerencia de Glasersfeld. Por último señalaremos el problema de hasta qué punto los principios del constructivismo radical, en particular la no existencia de un mundo exterior al sujeto cuyas características puedan ser objeto de conocimiento, ni siquiera parcial, son compatibles con la sugerencia de que determinada figura geométrica, construida por uno mismo o aportada por otro (¿y con una objetividad exterior?) conduzca a establecer el teorema de Pitágoras; un problema de coherencia que se observa en otros planteamientos realizados desde posiciones constructivistas radicales y que se ha señalado como recaídas del constructivismo radical en el realismo epistemológico (Martínez Delgado, A., 1988).

II. Las demostraciones tradicionales del teorema de pitágoras.

Entre los cientos de demostraciones existentes del teorema de Pitágoras, nos referiremos a algunas que revisten especial importancia histórica o que por su simplicidad o riqueza conceptual merecen ser destacadas .

A) La demostración clásica de "los elementos" de Euclides.

La demostración del teorema de Pitágoras que presenta Euclides en sus Elementos de Geometría, libro I, dentro de un sistema deductivo coherente, es rigurosa, profunda y compleja. La exposición de esta demostración la haremos siguiendo la traducción de los seis libros primeros de la Geometría de Euclides realizada por Rodrigo Çamorano en el siglo XVI (1576, p. 33–34), con alguna modificación de actualización ortográfica y reduciendo el texto a sus elementos básicos:

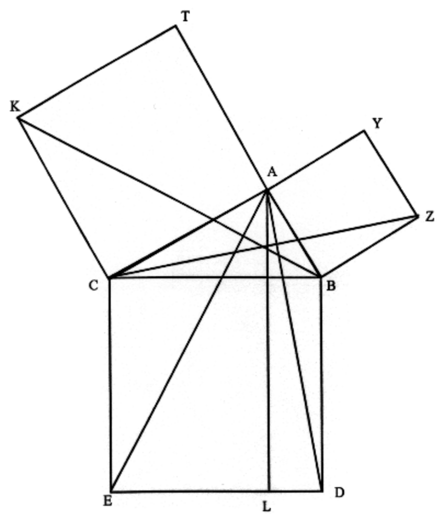

Figura 4. Demostración de Euclides.

"*Teorema 33. Proposición 47.[figura 4] En los triángulos rectángulos el cuadrado que es hecho de el lado que está opuesto al ángulo recto es igual a los dos cuadrados que son hechos de los lados que contienen el ángulo recto. Sea el triángulo rectángulo ABC que tenga recto el ángulo BAC ... Descríbase ... de la BC el cuadrado $BDCE$, y por la misma , de la BA, y de la AC los cuadrados $ABZY$, $ACKT$ y por el punto A tírese AL paralela con la CE, ..., tírese AD y CZ ...,luego todo DBA es igual a todo el ángulo ZBC y porque AB, BD son iguales a las dos BZ, BC, la una a la otra, y el ángulo DBA es igual al ángulo ZBC, luego la base AD por la 9ª proposición es igual a la base ZC y el triángulo ABD al triángulo ZBC es también igual. Y el paralelogramo BL, por la 41, es doble del triángulo*

ABD porque tienen una misma base que es BD y está en unas mismas paralelas, es a saber $DBAL$ y también el cuadrado YB por la misma es doble del triángulo ZBC porque tienen la misma base que es BZ y está en unas mismas paralelas, es a saber ZB, YC y las cosas que que son doble de cosas iguales, por la 6 ... entre sí son iguales. Luego el paralelogramo BL es igual al cuadrado YB. Semejantemente si ... se tiran AE y BK se demostrará que el paralelogramo CL es igual al cuadrado TC ... luego el cuadrado que del lado BC se hizo es igual a los cuadrados que son hechos de los lados BA y AC ... teorema de se había de demostrar".

Esta demostración, atribuida por Proclus al mismo Euclides, a pesar de las invectivas de Schopenhauer en contra de ella, "ha soportado la prueba del tiempo mejor que cualquier otra" en opinión de Smith, D. E. (1951, v. 2, p. 289).

B) LA DEMOSTRACIÓN UTILIZANDO OTROS TEOREMAS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS Y RELACIONES ALGEBRAICAS.

La segunda prueba tradicional que recogemos, quizás la más utilizada en los libros de texto españoles hasta el reciente auge de las demostraciones por comparación de áreas adecuadamente parceladas y estructuradas, se basa en la formación de triángulos rectángulos semejantes al trazar, en el triángulo dado, la altura correspondiente a la hipotenusa (figura 5):

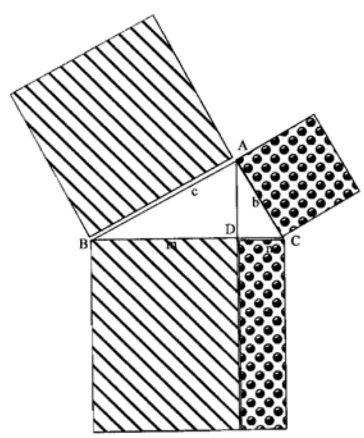

Figura 5. Demostración de Bhâskara-Fibonacci-Wallis.
Confluencia con la demostración de Euclides.

Sea el triángulo ABC, rectángulo en A. Sea D el pie de la altura de dicho triángulo correspondiente a la hipotenusa BC. Esta altura da lugar a la formación de dos nuevos triángulos rectágulos ABD y ADC, semejantes con el inicial ABC. De dicha semejanza se deduce inmediatamente (teorema del cateto) que, si llamamos $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $BD = m$ y $DC = n$: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{c}$, $c^2 = a \cdot m$ (1); y $\dfrac{b}{a} = \dfrac{n}{b}$, $b^2 = a \cdot n$ (2); sumando las igualdades (1) y (2) anteriores queda demostrado el teorema de Pitágoras: $c^2 + b^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2$.

Esta prueba "se encuentra en la obra del hindú Bhâskara (nacido en 1114), más tarde en Leonardo de Pisa [Fibonacci] (en la obra *Practica geometriae* de 1220) y reencontrada independientemente más tarde por el matemático inglés Wallis (1616–1703)"(Lietzmann, W., 1912, p. 33). Esta demostración aparentemente alejada de la de Euclides, converge con ella en puntos fundamentales. La demostración de Euclides puede esquematizarse de acuerdo con los siguientes objetivos:

1. Descomponer el cuadrado formado sobre la hipotenusa en dos rectángulos, cada uno de ellos del mismo área que cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos.
2. Para demostrar la equivalencia de áreas entre un rectángulo y el cuadrado correspondiente:
   (a) Se construyen triángulos como el ZBC (de la figura utilizada por Çamorano) y el ABD, cuya igualdad se demuestra fácilmente.
   (b) El área del triángulo ZBC es la mitad de la del cuadrado sobre el cateto AB –porque tomando BZ como base del triángulo y del cuadrado, la altura sería la misma para ambos (El área de ZBC sería la misma que la del triángulo no dibujado AZB –por tener la misma base y la misma altura–, que es la mitad del cuadrado sobre AB).
   (c) Por similar razón el área del triángulo ABD es la mitad de la del rectángulo "LB": El área de ABD sería la misma que la del triángulo no dibujado BDL (por tener la misma base y la misma altura ...), evidentemente la mitad de la del rectángulo "LB".

   Como los dos triángulos iguales tienen de área, respectivamente, la mitad de la del cuadrado y rectángulo señalados, estos dos últimos tienen áreas iguales.

La demostración de Bhâskara-Fibonacci-Wallis, utiliza la misma descomposición señalada en el primer punto de la demostración de Euclides, puesto que el teorema del cateto utilizado, $c^2 = a \cdot m$ (1) y $b^2 = a \cdot n$ (2), nos proporciona la igualdad entre el área de cada uno de los cuadrados construidos sobre cada cateto (c^2 y b^2) y la del rectángulo respectivo, formado por la hipotenusa y la proyección del cateto correspondiente sobre la hipotenusa (los mismos cuadrados y rectángulos que en la demostración de Euclides, resaltados en la figura 5).

La diferencia fundamental entre los dos procedimientos radica en la forma de demostrar la igualdad entre las áreas de cuadrados y rectángulos, en un caso utilizando la semejanza de triángulos y en el otro una igualdad de triángulos que determina la igualdad cuadrado-rectángulo, aplicada dos veces.

La proximidad entre estas dos demostraciones puede aprovecharse para resaltar la coherencia y el interés de procedimientos diferentes en el estudio de relaciones matemáticas y, desde el punto de vista didáctico, para producir un mutuo refuerzo entre las dos demostraciones.

C) DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS POR RECOMPOSICIÓN DE LAS AREAS DE LOS CUADRADOS CORRESPONDIENTES A CADA CATETO Y A LA HIPOTENUSA.

Estas demostraciones que podemos llamar visual-intuitivas, frente a las anteriores, argumentativas, forman el conjunto de pruebas más numeroso (unas 250 de un total de unas 370) en la recopilación realizada por Loomis E. S. (1968), e incluyen tanto casos de disección de los respectivos cuadrados que superan la artificiosidad que puedan presentar los tipos anteriores de demostración, como casos de una gran simplicidad y evidencia intuitiva.

Dentro de las tendencias pedagógicas que resaltan la actividad indagadora del alumno –no solo el constructivismo– se resalta la realización, por parte de los alumnos, de intentos de demostración del teorema de Pitágoras mediante representaciones sobre papel cuadriculado, geoplanos (Naraine, B., 1993; M. V. Bonsangue, 1997), utilización de puzzles (Miller, W. A. y Wagner, L., 1993) o, incluso, pesaje de las superficies cuadradas cuya equivalencia se quiere demostrar o comprobar (Francis, R. L., 1992). Estas actividades pueden conducir a un conocimiento firme de esta propiedad del triángulo rectángulo y estimular algunas formas de razonamiento; sin embargo pensamos que en niveles medios de la enseñanza no deben desaparecer otras demostraciones de mayor elaboración conceptual.

Las demostraciones que nos dan casi por mera observación de las figuras el teorema de Pitagóras, ("es suficiente mirar la figura para encontrar la demostración"como señala Lietzmann, W., 1912, p. 14) presentan cierta variedad, si bien suelen estar centradas sobre el dibujo de los tres cuadrados que intervienen en este teorema (a veces no dibujados independientemente sino dentro de un entramado en el que se resaltan estos cuadrados); mediante prolongaciones, paralelas y perpendiculares a los lados del triángulo rectángulo inicial, trazadas adecuadamente, resulta fácil apreciar la recomposición de las áreas de los cuadrados sobre los catetos hasta conseguir el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa, como sucede en la tercera demostración –y en la segunda– encontrada por E. García Quijano, que veremos más adelante, o en las pruebas centradas en las figuras 1 y 2.

III. El problema del esoterismo en el teorema de Pitágoras, en las matemáticas y en el conocimiento.

La vida y la obra de Pitágoras es poco conocida y ha sido objeto de mistificaciones que compaginan con el sentido del misterio que envuelve el propio pensamiento de la sociedad pitagórica y el secretismo sectario impuesto a sus integrantes. Mallinger, J. (1944, p. 15), señala que "sus más fervientes discípulos exageraron la leyenda. Afirmaron más tarde que su Maestro era en realidad bien Apolo reencarnado bien el hijo de Apolo"; el mismo autor (ibidem) recoge la narración de Jámblico de que la grandeza del futuro de Pitágoras había sido augurada a su padre por la pitia (de ahí el nombre de Pitágoras, "anunciado por la pitia") y de que "se proclamaba a sí mismo como mediador entre los dioses y los hombres". El esoterismo de los conocimientos parece unido a su potencialidad como mecanismo de poder y, por otra parte parece impregnar el conjunto del conocimiento matemático, científico, artístico y técnico (Ghyka, M. C., 1978, t. 2, p. 44).

Sin profundizar en las consideraciones socio-científicas apuntadas, nos referiremos a la crítica de Schopenhauer al desarrollo de la Matemática y de su enseñanza, crítica que, desde nuestro punto de vista, conecta con el problema del esoterismo y utiliza como una de sus justificaciones el enfoque de la demostración por Euclides del teorema de Pitágoras. Esta crítica (Schopenhauer, A., 1983, p. 69 y 71) nos parece digna de reflexión aunque no se comparta en su totalidad ni se asuman algunos principios mantenidos por Schopenhauer al respecto:

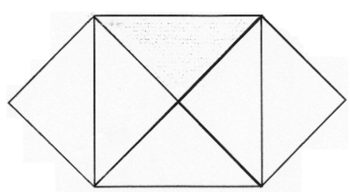

Figura 6. Visión *intuitiva*, según Schopenhauer, del teorema de Pitágoras.

> "*...A menudo [refiriéndose a las demostraciones de Euclides], como sucede en el teorema de Pitágoras, se trazan líneas sin que sepamos por qué; luego averiguamos que eran lazos dispuestos para coger desprevenido y arrancar el asentimiento del estudioso, el cual tiene que conceder con asombro lo que en su esencia interior le es incomprensible, tanto, que puede estudiar de principio a fin todo el Euclides sin formarse un juicio propio de las leyes de las relaciones espaciales y obteniendo sólo algunos resultados de ellas aprendidos de memoria ... Igualmente el teorema de Pitágoras nos hace conocer una* qualitas occulta *del triángulo rectángulo; la demostración de Euclides, coja y artificiosa, nos abandona en el por qué, mientras que la adjunta figura* [6] *sencilla y conocida, nos da*

a la primera ojeada mucho más que aquella prueba, nos da la visión de la cosa misma comunicándonos la firme convicción interior de aquella necesidad y de la dependencia de aquella propiedad del ángulo recto. Asimismo, en el caso de los catetos desiguales debemos confiarnos a dicha convicción intuitiva, como en general en toda verdad geométrica posible, aunque no sea sino porque su descubrimiento parte siempre de la intuición de tal necesidad y sólo después de comprendida ésta podemos imaginar la prueba."

No compartimos el entusiasmo intuicionista de Schopenhauer, ni su apriorismo radical, de raíz kantiana, expresado con claridad (ibidem, p. 70):

"... *pudimos afirmar con seguridad que lo que en la intuición de una figura se nos revela como necesario no proviene de la figura trazada en el papel quizá defectuosamente, ni tampoco del concepto abstracto en que la pensamos, sino inmediatamente de la forma, conocida por nosotros a priori, de todo conocimiento; éste es siempre el principio de razón, y en este caso en su forma intuitiva."*

Nos parece, sin embargo, que la denuncia del logicismo imperante en la teoría de la ciencia, es de gran valor epistemológico y metodológico (ibidem, p. 69–70):

"... *Se reconoció que no nos podemos entregar confiadamente al testimonio de la intuición sensible y se concluyó precipitadamente que sólo el pensamiento racional lógico es fundamento de verdad; si bien Platón (en el Parménides), los megáricos, Pirrón y los neoacadémicos, por ejemplo (así como más tarde Sexto Empírico), demostraron que también por su parte los silogismos y los conceptos conducen al error haciéndonos caer en paralogismos y sofismas que nacen muy fácilmente, pero son más difíciles de extirpar que las ilusiones de la intuición sensible. Entretanto, el racionalismo naciente, en oposición al empirismo, ganaba la batalla y conforme a él elaboraba Euclides las matemáticas, y la evidencia intuitiva sólo se aplicaba a los axiomas ...*"

Desde una perspectiva distinta –podría decirse que contrapuesta a la de Schopenhauer–, la de la "matemática moderna", se ha criticado también la construcción matemática de Euclides. Siguiendo la consigna lanzada por Dieudonné de "¡abajo Euclides!", se impugnaba la enseñanza de "los axiomas de Euclides, mezclados (lo que resultaba necesario, puesto que no forman un sistema completo) con llamadas a la intuición disfrazadas de "hechos evidentes"." (Dieudonné, J., 1978, p. 136). Esta imputación de una excesiva apelación a la intuición en la enseñanza euclideana, lleva a Dieudonné, J. (1971, p. 10) a abordar la enseñanza de la geometría elemental, permitiéndose "no introducir ninguna figura en el texto, aunque sólo fuera para hacer ver que no son necesarias". La diversidad de puntos de vista en torno a la enseñanza de las matemáticas, en este caso centrados en el teorema de Pitágoras –cuya demostración por Euclides puede considerarse aludida por la referencia de Dieudonné (1978, p. 137) a "... esas increíbles y aparentemente arbitrarias divisiones de triángulos en las que cada paso parece un juego de manos" –, merece destacarse, proponiendo la reapertura de debates actualmente inexistentes o sofocados por la hegemonía de cierto oficialismo constructivista, por otra parte lleno de indefiniciones, ambigüedades y contradicciones.

IV. Las tres demostraciones de E. García Quijano.

La presentación, por su autor (García Quijano, E., 1848, p. 26), de las tres demostraciones del teorema de Pitágoras es la siguiente:

> *"Casi todos los autores de Geometría elemental demuestran de un mismo modo el teorema de que voy a ocuparme; sin embargo de que pueden darse de él diferentes demostraciones. Las tres siguientes, que no he visto en ningún tratado, si bien de poca importancia, las publico porque tal vez ofrezcan a los principiantes la ventaja de acostumbrarlos a discurrir, haciéndoles mirar una misma cuestión bajo diversos aspectos.* "

IV.1. Primera demostración.

E. García Quijano, tras enunciar el teorema de Pitágoras en su versión geométrica ("*En todo triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos*"), expone la siguiente demostración primera (p. 26–27):

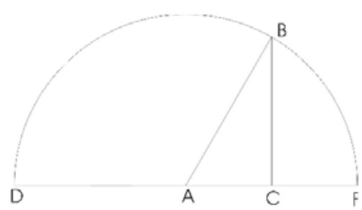

Figura 7. Primera demostración de García Quijano.

"Sea el triángulo ABC (figura [7]) rectángulo en C: prolónguese indefinidamente en ambos sentidos el cateto AC, y con el radio AB, desde A como centro, descríbase el semicírculo DBF, que cortará en D y F a las prolongaciones de AC. Desde luego, por ser BC perpendicular al diámetro DF, se tiene

$$\begin{aligned} BC^2 &= CD \times CF \\ &= (AB + AC)(AB - AC) \\ &= AB^2 - AC^2, \end{aligned}$$

de donde
$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$
pero AB^2, AC^2 y BC^2 representan respectivamente las áreas de los cuadrados construidos sobre AB, AC y BC: luego el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".

IV.2. Segunda demostración.

La segunda demostración del teorema de Pitágoras ofrecida por García Quijano (p. 27) es la siguiente:

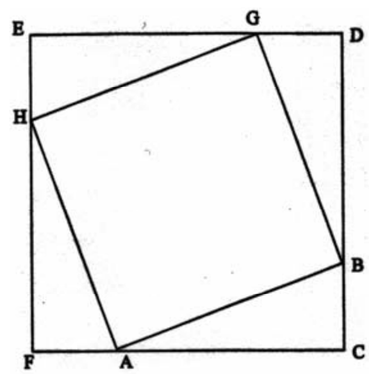

Figura 8. Segunda demostración de García Quijano.

"Consideremos el triángulo ABC (figura [8]), rectángulo en C: prolonguemos por el extremo A el cateto AC en una cantidad AF igual a BC; y sobre FC, suma de los dos catetos, construyamos el cuadrado $CDEF$: tomemos además sobre los lados FE y ED del cuadrado, las partes FH y EG iguales al cateto AC, y unamos los puntos A y H, H y G, G y B. Los cuatro triángulos ABC, BGD, GHE y HAF son iguales por tener un ángulo recto y los lados que lo forman respectivamente iguales; y el cuadrilátero $ABGH$ es un cuadrado por tener los lados iguales, como hipotenusas que son de triángulos rectángulos iguales, y el ángulo en A recto por ser suplemento de la suma de los dos ángulos complementarios FAH y BAC.

Resulta además de la inspección de la figura:

$$\text{Área } (CDEF) = CF^2 = (AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot AC \cdot BC \qquad (1)$$

y también

$$\text{Área } (CDEF) = \text{Área } (ABGH) + 4 \cdot \text{Área } (ABC),$$

ó lo que es lo mismo, por ser Área $(ABC) = AC \cdot BC$, la ecuación

$$\text{Área } (CDEF) = AB^2 + 2 \cdot AC \cdot BC \qquad (2)$$

que combinada con la 1 da

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

y de aquí lo Q.S.Q.D."

IV.3. Tercera demostración.

La tercera demostración de García Quijano (p. 27–28) es una variante de la anterior consistente en resaltar más los aspectos geométricos sobre los algebraicos:

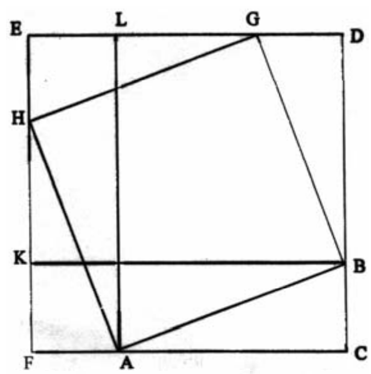

Figura 9. Tercera demostración de García Quijano.

"Hecha la misma construcción que para la demostración segunda, tírense por los puntos A y B (figura [9]) las rectas AL y BK, la primera paralela a BC y la segunda a AC. La figura total $CDEF$ queda descompuesta de este modo en dos rectángulos iguales $ACBI$ y $KILE$, duplo cada uno del triángulo ABC, y dos cuadrados $FAIK$ y $BDLI$, el primero igual al cuadrado construido sobre BC y el segundo al construido sobre AC. Si restamos ahora de toda la figura $CDEF$ los cuatro triángulos ABC, BGD, GHE y HAF, iguales todos a ABC, queda el cuadrado $ABGH$ construido sobre la hipotenusa AB; y si de la misma figura $CDEF$ se restan los dos rectángulos $ACBI$ y $KILE$, equivalentes a los cuatro triángulos, quedan los cuadrados $IBDL$ y $FAIK$, iguales a los construidos sobre los catetos AC y BC: luego el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos, que es lo Q.S.Q.D."

Las dos últimas demostraciones de García Quijano parten de un planteamiento básico común (con el mismo fundamento que la demostración "por disección"recogido en la figura 2): la construcción de un cuadrado cuyo lado es la suma de los dos catetos del triángulo rectángulo inicial, cuadrado en el que se inscribe el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa, como puede observarse en las figuras correspondientes a estas pruebas. A partir de ahí puede concluirse el teorema de Pitágoras utilizando como un punto de partida la fórmula del cuadrado de un binomio, $(a + b)^2$, como en la segunda demostración, clasificada por Loomis como algebraica, o bien, justificar desde un punto de vista geométrico la fórmula del cuadrado del binomio –lo cual se consigue fácilmente trazando las rectas AL y KB, en la figura 9– como se hace en la tercera demostración de García Quijano (prueba "geométrica" en la clasificación de Loomis); el trazado de la recta EI, o de la recta KL, hubiera subrayado más aún la argumentación empleada (caso de la demostración 91 de las recopiladas por Loomis, E. S., 1940, p. 154–155).

V. La originalidad de las demostraciones de E. García Quijano.

Ninguna de las tres demostraciones realizadas por García Quijano que hemos recogido, aparece en los manuales de matemáticas de la época en que se imprimieron (1848). Los tipos de demostración más frecuentes que hemos encontrado en obras editadas en el siglo XIX, y comienzos del XX, se corresponden con la clásica demostración de Euclides, (Rockstroh, H., 1820, p. 177–178; Legendre, A. M., 1840, p. 57–58; Nelson, publ., 1912, p. 15) o con la demostración de Bhâskara-Fibonacci-Wallis, recogida también en la primera parte de este artículo –basada en la semejanza de los triángulos obtenidos al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa– (Littrow, J. J., von, 1827, p. 195; Lacroix, S. F., 1837, p. 49–50; Vallejo, J. M., 1840, t. 1, p. 414–415; Vallin y Bustillo, 1857, p. 50).

Sin embargo la búsqueda de demostraciones nuevas del teorema de Pitágoras ha tenido cierto atractivo entre los profesionales y aficionados a las Matemáticas; estas investigaciones, además de ser publicadas aisladamente al producirse, han sido recopiladas de forma sistemática.

La primera demostración recogida de E. García Quijano, a falta de indagaciones que aporten pruebas de haber sido realizada con anterioridad a 1848, debe ser considerada como una prueba plenamente original de este autor. Esta demostración no la hemos encontrado en la recopilación hecha por Wipper, J. (1911). Sí aparece recogida como prueba 63 (figura 61) en la obra de Loomis, E. S, 1968, p. 64 (manuscrito inicial preparado en 1907, publicado por primera vez en 1927; segunda edición es de 1940).

Loomis remite a su vez, en lo que se refiere a esta demostración, a Verluys, J. (1914, p. 92) y recoge la atribución de la misma a Wm. W. Rupert, en 1900. Dado que la publicación de la demostración de E. García Quijano se produce 52 años antes de que fuese dada a conocer por Wm. W. Rupert, queda claro tanto el carácter original de la demostración como la primacía de la misma, que debe serle reconocida mientras no surja algún documento, nuevo para nosotros, que establezca una publicación anterior de la primera demostración presentada por García Quijano.

Las otras dos demostraciones de García Quijano, deben ser consideradas también como originales de dicho autor. Respecto a la primacía de estas dos demostraciones la situación es más ambigua, debido a la labilidad de los criterios para distinguir cuándo dos demostraciones próximas pueden considerarse iguales o diferentes.

Como hemos comentado al final de la exposición de las demostraciones de García Quijano, las dos últimas demostraciones presentadas por éste se establecen sobre un mismo fundamento básico: la figura de un cuadrado de lado la suma de los catetos, un cuadrado inscrito en el anterior (de lado la hipotenusa del triángulo inicial) y cuatro triángulos rectángulos iguales, cualquiera de los cuales puede considerarse como el triángulo rectángulo original, para el que se quiere demostrar el teorema. La diferencia entre ambas radica en que se parta de la igualdad algebraica que desarrolla $(a+b)^2$, o de la agrupación de los cuatro triángulos en dos rectángulos iguales, sirviéndose de una construcción auxiliar al respecto (justificación geométrica de la fórmula anterior). En la colección de demostraciones de E. S. Loomis (1968), hemos encontrado varias demostraciones, consideradas distintas, que vienen a coincidir, en nuestra opinión, salvo aspectos irrelevantes, con cada una de las dos demostraciones últimas de García Quijano, con diferencias nimias como que la figura esté girada, que el cateto mayor del triángulo rectángulo esté hacia la izquierda o hacia la derecha, que los rectángulos auxiliares, para la tercera demostración, estén trazados a partir de unos u otros vértices de los cuatro triángulos que pueden servir como triángulo inicial, o que se considere como triángulo original uno u otro de los cuatro triángulos iguales que aparecen en la figura.

La segunda demostración de García Quijano, se corresponde tanto con la variante b), figura 33a), de la demostración 35 (Loomis, E. S., 1968, p. 49), como con la demostración 219 (p. 223–224). La diferencia con la demostración 35b) consiste en que esta última expresa el área del cuadrado menor en función del mayor, como sustracción, mientras que García Quijano lo hace en sentido contrario (el área del cuadrado mayor como suma del área del cuadrado inscrito y las cuatro áreas de los triángulos de la figura ...).

Según Loomis (1968, p. 50) esta prueba, 35b), “fue ideada por Maurice Laisnez, alumno de high school, ..., y me fue enviada en ... 1939”. En comparación con esta formulación de la prueba, la realizada por García Quijano es anterior en casi un siglo.

La prueba 219, ya mencionada, que también nos parece equivalente a la segunda de García Quijano, difiere en la misma circunstancia que hemos señalado para la prueba 35b), aparte de otros aspectos superficiales o de notación.

Loomis (p. 224) ofrece las siguientes referencias para la prueba 219: “a. Atribuida a T. P. Stowell ... Ver The Math. Magazine, Vol. I, 1882, p. 38; Olney’s Geom., Part III, 1872, p. 251, método 7º; Jour. Of Ed’n, Vol XXVI, 1877, p. 21, fig. IX; también Vol. XXVII, 1888, p. 327, prueba 18a–, por R. E. Binford...; The School Visitor, Vol. IX, 1888, 1895, p. 70, prueba XCIV; Heath’s Math. Monographs, Nº. 1, 1900, p. 23, prueba VIII; Sci. Am. Sup., Vol. 70, p. 359, fig. 4, 1910; Henry Boad’s work, London, 1733. b. Para soluciones algebraicas, ver p. 2, en un folleto de Artemus Martin de Washington, D. C., agosto de 1912, titulado “On Rational Right-Angled Triangles”; y una solución de A. R. Colburn, en Sci. Am. Supplement, Vol. 70, p. 359, 3 dic. de 1910”.

Por otra parte, la segunda demostración presentada por E. García Quijano aparece recogida en Lietzmann, W. (1912, p. 11–12), utilizando un gráfico girado (respecto al utilizado por García Quijano), con una justificación geométrica previa de la fórmula del cuadrado de un binomio. También, con el añadido de los cuadrados correspondientes a los catetos (recordando la clásica figura de la “silla de la novia”o de la “capucha del franciscano”), y utilizando distinta notación, aparece en Wipper, J. (1911, p. 35–36), como demostración número XXXII, quien afirma que “esta prueba está contenida en “Huberti Rudimenta Algebrae.”Würceb. 1762”.

Así pues, esta segunda prueba parece haber sido dada a conocer por otros autores con anterioridad a García Quijano; sin embargo, su conocimiento debió ser tan restringido que podemos aceptar como original la demostración de este autor, aunque no podamos reclamar para él la primacía en su creación –esta última afirmación tiene un valor relativo dependiendo del criterio más o menos amplio que se utilice para clasificar como coincidentes o distintas dos demostraciones–. Claro está que, en cualquier caso, debe figurar como uno de los primeros autores en exponer esta demostración, con prioridad respecto a gran parte de los mencionados por Loomis.

La tercera demostración de E. García Quijano nos parece coincidir con al menos cuatro de las demostraciones coleccionadas por Loomis, aparte de las conexiones con la segunda demostración, que en la medida en que se argumenta geométricamente la fórmula $(a + b)^2$, converge hacia la tercera demostración. La consideración que acabamos de hacer conlleva el que puedan ser objeto de discusión los métodos empleados por Loomis para clasificar y ordenar las distintas demostraciones que recopila, aspecto que ya surge al tratar de la segunda demostración de García Quijano. Si nuestras apreciaciones son acertadas, la conveniencia de una mayor sistematicidad, al coleccionar las demostraciones, se pone de relieve también al observar la dispersión de las pruebas que equivalen, en lo fundamental, a la tercera demostración cuya originalidad analizamos. En nuestra opinión las pruebas recogidas por Loomis que coinciden, salvo detalles secundarios, con la tercera de García Quijano son las número 90, 171, 197 y 218.

La demostración 90ª del compendio de Loomis, E. S. (1968, p. 153–154, figura 190), que difiere de la de García Quijano en cuál de los triángulos rectángulos del gráfico se toma como triángulo de partida, es recogida también en la colección realizada por Wipper, J. (1911, p. 16–17, demostración X) quien la atribuye a “Henry Boad tal como es presentada por Johann Hoffmann en “Der Pythagoräische Lehrsatz”1821”(p. 17). Además de otras referencias a publicaciones posteriores al trabajo de García Quijano, Loomis (p. 154) se hace eco de la atribución, por parte de W. W. Rouse Ball, de esta demostración 90ª al mismo Pitágoras, y remite a “Pythagoras and his Plilosophy en Sect. II, Vol. 10, p. 239, 1904, en proceedings of Royal Society of Canada, donde la figura aparece como sigue”(figura 10).

En la demostración 171ª de la antología de Loomis (p. 197), la posición del triángulo inicial es similar a la posición en que se encuentra en la tercera demostración de García Quijano. También en este caso, subraya Loomis que “ésta es una de las pruebas conjeturadas de Pitágoras”, y añade como referencias “Ball’s Short Hist. of Math., 1888, p. 24; Hopkins’ Plane Geom., 1891, p.

91, fig. IV; Edwards' Geom., 1895, p. 162, fig. (39); Beman and Smith's New Plane Geom., 1899, p. 103, fig. 2; Heath's Math. Monographs, Nº 1, 1900, p. 18, prueba II". La figura utilizada en la prueba 197ª, en la colección de Loomis, es aún más cercana a la utilizada por García Quijano en su tercera demostración –idéntica, salvo nomenclatura de los vértices– mediante un giro de unos 150^{rmo} y una simetría respecto a un eje que divide al cuadrado mayor en dos rectángulos iguales.

Loomis añade como referencias de esta demostración "Journal of Education , 1887, Vol. XXVI, p. 21, fig. XII; Iowa Grand Lodge Bulletin, F and A.M., Vol. 30, Nº 2, p. 44, fig. 2, de feb. 1929. También Dr. Leitzman, P. 20, fig. 24, 4ª Ed.". La demostración 218ª de las recopiladas por Loomis (p. 223) también coincide, en lo esencial, con la tercera demostración de García Quijano, con algunas diferencias de notación y el trazado de algunos segmentos nuevos, que no añaden nada sustancial a la argumentación que se utiliza. Las referencias de esta 218ª demostración ofrecidas por Loomis son "Math. Mo., 1858, Dem. 9, Vol. I, p. 159, y atribuida a Rev. A. D. Wheeler de Brunswick, Me., en el trabajo de Henry Boad, London, 1733".

Tanto la prueba 197ª como la 218ª, a que nos hemos referido, son completadas por Loomis con una mención a la versión algebraica correspondiente, con lo que se resalta la conexión entre la segunda y tercera demostración de García Quijano.

VI. Conclusiones y perspectivas.

Como consecuencia del estudio que hemos realizado, destacamos algunas conclusiones y señalamos algunas perspectivas que quedan abiertas o pendientes de nuevas indagaciones:

1. A falta de nuevos documentos, que no hayamos conocido o que puedan descubrirse con posterioridad a este trabajo, nos parece claro que Evaristo García Quijano debe ser considerado como el primer autor conocido de la primera demostración aportada por él mismo en 1848 (poniendo en relación el triángulo rectángulo con el círculo). Ello supondría la modificación de la atribución de esta prueba en favor de E. García Quijano.

2. En relación con las otras dos pruebas, estrechamente vinculadas entre sí, elaboradas por García Quijano no puede establecerse, en función de los documentos que hemos manejado, la primera autoría (hecha pública) de dichas demostraciones. Hay suficientes razones, sin embargo, para estimar que ambas aportaciones son originales, así como para que este profesor de matemáticas sea incluido entre los primeros autores en ofrecer ambas demostraciones. Nuevas investigaciones quizás puedan proporcionar mayores precisiones sobre la posición que corresponde a García Quijano entre los creadores de estas dos demostraciones.

3. El planteamiento del problema de la primacía en la autoría de la segunda y de la tercera demostración de García Quijano, apuntado en el punto an-

terior, está enlazado con los criterios que se adopten para considerar dos demostraciones como iguales o como diferentes. La complejidad de las pautas para discernir entre distintas demostraciones que pueden difieren en pequeños matices, notaciones u orden de las expresiones, confiere al problema suscitado un carácter abierto, donde pueden ser legítimamente defendidos diferentes puntos de vista.

4. La importancia de las demostraciones segunda y tercera de García Quijano queda patente, además de por su simplicidad y valor intuitivo, por el hecho de que la tercera haya sido objeto –en dos ocasiones, según los textos consultados en este estudio– de una conjetura, según la cual Pitágoras pudo haber ideado esta demostración; al respecto puede ser oportuno recordar la importancia de los métodos geométricos de "disección" en el Egipto antiguo, con el que Pitágoras tuvo estrechas relaciones.

5. A pesar de la relatividad de los criterios para determinar la igualdad o la diferencia entre demostraciones, es de desear que se produzca, en próximos trabajos de recopilación, una mayor sistematización y rigor en la clasificación y ordenación de las pruebas, con respecto, por ejemplo, a la importante recolección de demostraciones realizada por Loomis.

6. El debate epistemológico y en torno a los métodos de demostración, en particular sobre la importancia del formalismo y del encadenamiento deductivo por un lado, y de la base intuitiva, sensible y experiencial, por otro, en los diferentes niveles de la enseñanza de las matemáticas, no puede considerarse concluso. El valor innegable de las demostraciones del teorema de Pitágoras por Euclides, por Bhâskara-Fibonacci-Wallis y por García Quijano, entre otras, es suficientemente revelador de que ninguna de las tendencias sugeridas debe ser despreciada.

7. El interés de las demostraciones del teorema de Pitágoras ideadas por García Quijano, es motivo suficiente para pensar que otros posibles trabajos de este profesor puedan ofrecernos alguna otra aportación relevante en el campo de las matemáticas o de su enseñanza. La búsqueda de documentación sobre su actividad matemática y docente puede merecer que se le dediquen algunos esfuerzos.

Referencias Bibliográficas

[1] ALLMAN, G. J. (1976). Greek Geometry from Thales to Euclid. *Arno Press, New York.*

[2] ARTMANN, B. (1994). "Der Satz von Pythagoras als Paragigma für Mathematik". *Mathematik in der Schule,* nº 6 (juni), p. 343–358.

[3] BONSANGUE, M. V. (1997). "A Geometrical Representation of Primitive Pythagorean Triples". *The Mathematics Teacher*, v. 90, nº 5, p. 350–354.

[4] BOULIGAND, G. (1934). The Causality of Mathematical Theories.*Librairie Scientifique Hermann et Cie, Paris.*

[5] Burton, D. M. (1991). The History of mathematics. An introduction. *Wm.C. Brown Publishers, Dubuque (USA).*

[6] Comas, M. (1923). Cómo se enseña la aritmética y la geometría. *Publicaciones de la Revista de Pedagogía, Madrid.*

[7] Dieudonné, J. (1971). Álgebra lineal y geometría elemental. *Selecciones científicas, Madrid.*

[8] Dieudonné, J. (1978). "¿Debemos enseñar las "matemáticas modernas"?", *en Piaget, J., Choquet, G., Dieudonné y otros, La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza, Madrid.*

[9] Euclides (1576). Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides,*traducción de Rodrigo Çamorano, Casa de Alonso de Robies, Sevilla.*

[10] Eves, H. (1976). An Introduction to the History of Mathematics. *Holt, Rinehart and Winston. New York.*

[11] Flores, A. (1993). "Pythagoras Meets Van Hiele". *School Science and Mathematics*, v. 93, n$^{\rm o}$ 3, p. 152–157.

[12] Francis, R. L. (1992). "Mathematics in Weighting". *Mathematics Teacher*, v. 85, n$^{\rm o}$ 5, p. 388–390.

[13] García Quijano, E. (1848). "Demostración de un teorema de Geometría elemental". *Periódico mensual de Ciencias Matemáticas y Físicas, (Cádiz, imprenta, librería y litografía de la revista médica)* t. 1, n$^{\rm o}$ 1, p. 26–28.

[14] Ghyka, M. C. (1978). Le nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale. *Gallimard, Paris.*

[15] Gillings, R. J., (1972). Mathematics in the time of the Pharaos. *The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts.*

[16] Lacroix,S. F. (1837). Éléments de Géométrie à l'usage de l'École Centrale des Quatre Nations (15e éd.). *Bachelier. Paris.*

[17] Languereau, H. (1998). "L'orthogonalité de Pythagore à Hilbert". *Mathématiques vivantes (Bulletin IREM de Besançon),* n$^{\rm o}$ 63 (octobre), p. 31–41.

[18] Legendre, A. M. (1840). Éléments de Géométrie (19 éd.). *Société Typographique belge A. Wahlen et compagnie, Bruxelles.*

[19] Lietzmann, W. (1912). Der Pythagoreische Lehrsatz. *B. G. Teubner, Leipzig y Berlin.*

[20] Littrow, J. J., von (1827). Elemente der Algebra und Geometrie. *Heubner J. G., Wien.*

[21] Loomis E. S. (1968). The Pythagorean Proposition. *National Council of Teachers of Mathematics, Washington.*

[22] Mallinger, J. (1944). Pythagore et les mystères. *Niclaus, Paris.*

[23] Martínez Delgado, A. (1998). "No todos somos constructivistas". *Revista de Educación,* n$^{\rm o}$ 315, p. 179–198.

[24] Miller, W. A. y Wagner, L. (1993). "Pythagorean Dissection Puzzles". *Mathematics Teacher*, . 86, n$^{\rm o}$ 4, p. 302–306.

[25] Naraine, B. (1993). "If Pythagoras had a Geoboard...". *Mathematics Teacher*, v. 86, n$^{\rm o}$ 2, p. 137–140.

[26] Nelson, publ. (1912). Geometry, triangles, circles, areas. *Nelson. G. Britain.*

[27] Rockstroh, H. (1820). Mathematisher Catechismus; oder geordnete Folge von Fragen und Antworten über die wichtigsten Gegenstände der Mathematik. *Bossischen Buchhandlung, Berlin.*

[28] SCHAAF, W. L. (1951). "The Theorem of Pythagoras". *The Mathematics Teacher*, v. XLIV, nº 8, p. 585–588 (References...).

[29] SCHOPENHAUER, A. (1983). El mundo como voluntad y representación. *Porrúa, México.*

[30] SMITH, D. E. (1951). History of Mathematics, 2 v. *Ginn and Company, Boston, New York.*

[31] STEFFE, L. P. (1990). "On the knowledge of mathematics teacher", *Journal of Research in Mathematics Education, monograph n. 4 (Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, edited by Davis, R. B., Maher, C. A. and Noddings, N.)*, p. 167–184.

[32] VALLEJO, J. M. (1840). Compendio de matemáticas puras y mistas. (4ª ed.). *Imprenta Garrasayaza. Madrid.*

[33] VALLIN Y BUSTILLO (1857). Elementos de Matemáticas. (6ª ed.). *Imprenta del Colegio de Sordomudos y de Ciegos. Madrid.*

[34] WIPPER, J. (1911). Sechsundvierzig Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes (traducido del ruso por F. Graap). *Hermann Barsdorf, Berlin.*

Antonio Martínez Delgado
IES "Tartesos" de Camas (Sevilla)