El último de los magos

por

Antonio J. Durán

Newton no fue el primero de la edad de la razón.
Fue el último de los magos,
el último de los babilonios y sumerios,
la última gran mente que se asomó al mundo visible e intelectual
con los mismos ojos que aquellos que empezaron a construir,
hace 10.000 años, nuestro patrimonio intelectual.
John Mainard Keynes

Introducción

Hace ahora dos años que apareció la edición castellana de la *Introductio in analysin infinitorum* de Leonard Euler, el primer número de la colección de facsímiles, con traducción anotada, de obras clásicas de las matemáticas que, como aventura conjunta, la RSME y la SAEM Thales emprendieron entonces. Un poco antes tuve la ocasión de informar de la iniciativa a los socios y socias de la RSME en un artículo que titulé, con toda intención, "*Una cuestión de placer*" (La Gaceta, 3.3).

Me complace ahora anunciarles que ya está casi listo el segundo número de esta iniciativa, que esperamos presentar en Sevilla a mediados de junio, en las vísperas del congreso con la American Mathematical Society.

En esta ocasión la obra editada es el *Analysis* de Newton: un compendio que incluye diversos de sus tratados matemáticos sobre cálculo infinitesimal, geometría analítica –para ser más precisos: esa joya que es su célebre clasificación de las cúbicas en 72 especies– y aproximación –el método de diferencias finitas–; junto con una colección de fragmentos de cartas, entre ellas, las que envió a Leibniz en 1676.

Creo que todos debemos felicitarnos por la aparición de este segundo número de la colección de facsímiles con traducción anotada: supone la consolidación de una colección que muestra como la Real Sociedad Matemática Española está cumpliendo su compromiso de promover la constitución de un fondo editorial de clásicos de las matemáticas debidamente editados en castellano. El hecho de que a la iniciativa se hayan sumado plumas tan prestigiosas como las de José Manuel Sánchez Ron o Javier Echeverría, muestra que la tarea se está haciendo con el máximo rigor y calidad intelectual: el gusto por la obra bien hecha que queremos que caracterice a la RSME.

Quiero acabar esta introducción recordando la confesión de intenciones que ya hice con motivo de la edición de la *Introductio* de Euler: mi intención, como promotor de la idea dentro de la RSME, es, principalmente, la procura de placer para las socias y socios de la RSME, para los de Thales –la otra sociedad implicada– y, también, para todos aquellos interesados por este tipo de iniciativas culturales.

El Analysis de Newton: una obra original

Isaac Newton es uno de los más, si no el que más, célebres y celebrados científicos de cuantos ha visto la historia. Aunque a menudo se suele pasar por alto, es, de todos ellos, quien más debe su bien ganada fama a su capacidad y creatividad matemáticas: fue su habilidad como matemático, y los descubrimientos que esta posibilitó, la que, en buena medida, le permitió marcar diferencias con otros científicos contemporáneos, sobre todo en la elaboración de su obra fundamental: los *Principia*. O dicho de otra forma, Newton descubrió el *sistema del mundo*, lo que según el acertado dicho de Lagrange, le convirtió en el más afortunado de los científicos porque sólo hay un sistema del mundo por descubrir: y fue precisamente la ventaja de Newton sobre sus contemporáneos en el dominio de las matemáticas, la que le permitió afianzar ese descubrimiento.

Para aquellos que piensen que Newton fue exclusivamente un físico –filósofo natural, sería mejor decir– o, en todo caso, un matemático aplicado, «nunca se debe olvidar», escribió D.T. Whiteside, el editor de los monumentales *The mathematical papers of Isaac Newton*, «que las matemáticas tuvieron para Newton, antes y más allá de su lugar como caja de herramientas de la verdad, una belleza interior y un vigor independiente de todas las motivaciones externas y aplicaciones. Para los que son insensibles a la elegancia y potencia de las matemáticas como disciplina intelectual en su propio derecho», continuó, «[...] ahí tenéis a un matemático "puro", con el sentido de la vieja frase, a veces completamente absorbido en su torre de marfil en Cambridge elaborando teoremas y propiedades y algoritmos y construcciones elegantes por su propio sabor; y cuán magníficamente practicó su talento y habilidad. En su día, no hubo en el mundo matemático más dotado, ni más ampliamente versado; ninguno más apto en álgebra, más diestro en geometría, más habilidoso ni sabio en las sutilezas de la variación infinitesimal».

Justo es, por tanto, que le dediquemos la debida atención a su producción genuinamente matemática, inédita, en su mayor parte, en castellano. La obra que hemos elegido es el *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias, cum enumeratione Linearum tertii ordinis* –al que, por abreviar, llamamos el *Analysis*–[12].

[12]Recuerdo que el grueso de su producción física ya ha sido traducida al castellano: hay varias versiones castellanas de los *Principia* –la de Eloy Rada publicada por Alianza (1987) y la de Antonio Escohotado en la Editora Nacional (1982)–, y una de la *Óptica* –la de Carlos Solís, publicada por Alfaguara (1977)–. Y también algo de sus escritos teológico/históricos,

El *Analysis* es una obra absolutamente singular: su edición estuvo a cargo de William Jones[13], que habiendo encontrado un tratado de Newton sobre desarrollos en series infinitas y cálculo infinitesimal –titulado *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*–, en una colección de documentos que adquirió en 1708 y que habían pertenecido a John Collins –muerto 25 años antes–, decidió darlo a la imprenta. Se puso entonces en contacto con Newton para cotejar la copia de Collins con el original y, a partir de sus conversaciones, se fraguó el contenido del *Analysis*: al *De Analysi* se unieron también los tratados *De Quadratura curvarum* y *Enumeratio Linearum tertii ordinis* –que Newton había publicado unos años antes (1704) como apéndices de la *Optics*–. Como *corona del libro*, Jones adjuntó un pequeño tratado, titulado *Méthodus differentialis*, tratado inédito donde se exponía el método de diferencias finitas de Newton. Como se dijo arriba, estos tratados se completaron con una colección de fragmentos epistolares, entre ellos, de las dos cartas que Newton envió a Leibniz en 1676. No debe olvidarse que la composición del libro coincidió con el estallido de la polémica entre Newton y Leibniz por la prioridad en el descubrimiento del cálculo. El *Analysis* fue, en cierta forma, una pieza más de la estrategia de Newton para reivindicar su prioridad: baste decir que el tratado que abre el libro, el *De Analysi*, fue compuesto en 1669[14], esto es, la friolera de ¡¡cuarenta y dos!! años antes de que Jones lo editara, por primera vez, como primer tratado dentro del *Analysis* –en este sentido, como en muchos otros, el *Analysis* se sitúa en el polo opuesto de la *Introductio* de Euler–.

Sabemos también, que andando el tiempo el *Analysis* se convirtió en objeto de deseo para más de uno; por ejemplo, Philipe Naudé[15] estuvo dispuesto a hacer casi cualquier cosa por conseguir un ejemplar: así se lo aseguró a Newton en carta fechada el 26 de enero de 1723: «Estaría dispuesto a besar sus manos con que tan sólo me indicara, aunque fuera por una nota autógrafa, si el único de sus trabajos que me falta y que nunca ha sido traído a estas tierras, está todavía a la venta en Londres; este es su título: *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias* de 1711». ¡Qué no habría besado Naudé por poseer el ejemplar del mismísimo Newton, con correcciones de su puño y letra, que todavía se conserva hoy en el *Trinity College* de Cambridge!

---

como es el caso del *Templo de Salomón* –editado por Ciriaca Morano y publicado por Debate/CSIC (1996)–.

[13]Que tiene su sitio en la historia de las matemáticas como el inventor de la notación π para la más célebre de las constantes matemáticas: la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

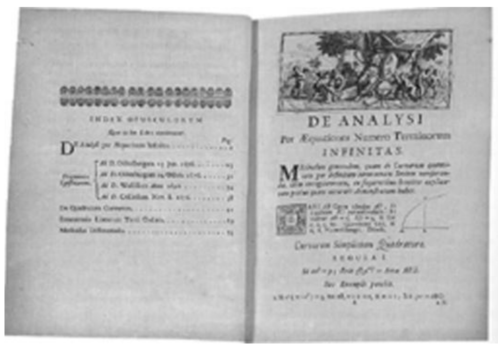
[14]A pesar de su distribución inicial manuscrita y restringida, fue el tratado con el que Newton se dio a conocer al mundo científico.

[15]Naudé propuso en 1740 a Euler los dos problemas sobre particiones de números cuya solución daría origen a esa importante rama del análisis combinatorio –véase, por ejemplo, el capítulo XVI de la *Introductio* de Euler.

La edición en castellano y anotada del *Analysis* de Newton es el modesto grano de arena que aportamos a la colosal producción editorial –e intelectual– que sobre Newton se viene haciendo en las últimas cuatro décadas, y cuyas joyas más destacadas son: los siete volúmenes de *The correspondence of Isaac Newton* (1959/77); los ocho volúmenes de *The mathematical papers of Isaac Newton* (1967/81) editados por D.T. Whiteside con el contenido –anotado y en edición bilingüe latín/inglés– de prácticamente todos los manuscritos conservados de Newton sobre matemáticas; la espléndida biografía de R. Westfall *Never at rest* (1980); o la soberbia edición en tres tomos[16] de los *Principia* (1971/1972) de I.B. Cohen (y A. Koyré) –por no citar otras obras tan notorias como *Unpublished Scientific Papers of Sir Isaac Newton* (1962) editado por A.R. Hall y M.B. Hall, o *Philosophers at war*, (1980) también de A.R. Hall; o *Isaac Newton, Historian* (1963), *Portrait of Isaac Newton* (1968) o *The religion of Isaac Newton* (1974) de F. Manuel; o *The foundations of Newton's Alchemy. The Hunting of the greene lyon* (1975), de B.T. Doobs, y ... , y ahora sí que de verdad no sigo–.

El facsimil del Analysis, los estudios introductorios y la traducción anotada

Igual que con la *Introductio*, el criterio general para la realización de la edición en castellano del *Analysis* de Newton ha sido dotarlo de capacidad para evocar la dimensión y textura histórica de su época. Para ello, se ha preparado un facsímil correspondiente al ejemplar conservado en el *Real Instituto y Observatorio de la Armada* en San Fernando de la primera edición de 1711, con el mismo mimo y siguiendo los mismos criterios de calidad, en cuanto al tipo de papel, impresión, encuadernación, etc. que nos guiaron en la preparación del anterior. La edición del facsímil ha estado a cargo de Javier Pérez.



Reproducción del índice del *Analysis* y la primera página del *De Analysi*.

[16]Incluyo entre ellos la *Introduction to Newton's Principia*: que, como escribió Westfall, abre un nuevo género histórico: las biografías de libros clásicos.

Escribía yo en el artículo sobre la *Introductio* de Euler que un libro facsímil tiene mucho de fetiche y una enorme capacidad para evocar la época en que fue elaborado el original: los grabados y otras peculiaridades propias de la manera de editar de su tiempo, la tipografía usada, la notación matemática empleada, etc., facilitan singularmente el acercamiento a la época en que la obra original fue compuesta.

En el caso del *Analysis*, los gráficos han sido pieza importante de la edición: en particular, los más de ochenta gráficos que acompañan a la clasificación de las cúbicas. En este sentido, la edición de Jones ha sido especialmente elogiada a lo largo de la historia por la calidad de sus grabados; por ejemplo, Rouse Ball en su estudio sobre la clasificación newtoniana de las cúbicas (1891), escribió: «De todas las ediciones, ésta es la más placentera de usar, los tipos de letra, los dibujos, la impresión toda es excelente». Los gráficos que acompañan a nuestra edición anotada han sido realizados –por Renato Álvarez Nodarse, que se ha encargado también de la maquetación del volumen con la traducción, notas y estudios preliminares– usando el *Mathematica* 3.0, y una adecuada elección de los parámetros de las curvas que representan a cada una de las 72 especies. Los sofisticados programas gráficos de *Mathematica* nos han permitido ajustarnos más a la clasificación newtoniana que los que acompañan a la edición de Jones. En algunos casos, los gráficos de la edición de Jones no corresponden –cuantitativamente– con las cúbicas de la especie que vienen a representar, lo que no quita para reconocer el enorme mérito de su composición en una época con evidentes limitaciones técnicas para este tipo de representaciones gráficas. A casi tres siglos de distancia, no deja de sorprender en la edición de Jones, la calidad de los gráficos que la acompañan, su rara belleza y, sobre todo, la armonía que gobierna el conjunto completo de las gráficas de las cúbicas.

Al igual que ocurrió con la *Introductio*, queremos que la obra tenga capacidad para evocar el texto clásico en la dimensión y con la textura histórica de su época, pero haciéndola asequible a un lector actual, interesado en leer y aprender directamente de los clásicos sin perder un ápice de su sentido histórico. El punto crucial aquí radica en que, en principio, no se le requiera al lector los conocimientos imprescindibles de historia de las matemáticas para comprender la dimensión y profundidad histórica de la obra, ni los suficientes de latín, en el caso del *Analysis*, que le permitan leerla tal cual la escribió Newton. Por tanto, para solventar una u otra ausencia, si se dan, acompaña al facsímil un segundo tomo con una edición crítica en dos partes. Conforma la primera parte una serie de artículos relacionados con el contexto histórico, científico y matemático del autor y la obra; y, la segunda, el texto traducido al castellano y anotado. En el caso del *Analysis* los artículos y sus autores son los siguientes:

Sobre Newton. José Manuel Sánchez Ron ha elaborado, con su habitual maestría, unos espléndidos apuntes biográficos de Newton que facilitan a los lectores la trayectoria vital e intelectual del autor de los *Principia*, en todas sus múltiples facetas: científica, química y alquímica, teológica, como historiador, presidente de la *Royal Society* o como funcionario público al servicio de la corona inglesa. Acercar al lector los avatares de la vida de Newton a lo largo de la segunda mitad del siglo XVII y un buen cuarto del XVIII, le facilitará la evocación de su figura y, por extensión, de la obra editada.

Sobre la polémica con Leibniz. Javier Echeverría –premio Nacional de ensayo de 2000– ha elaborado un interesantísimo y original artículo sobre los valores implicados en la disputa entre Newton y Leibniz sobre la prioridad en el descubrimiento del cálculo; el artículo es especialmente apropiado dado el papel que tuvo el *Analysis* dentro de la disputa. Sin duda arroja mucha luz sobre el momento histórico en que el libro apareció, lo que facilitará, como se dijo arriba, la evocación histórica del texto con el referente adecuado de su época.

Sobre el texto y sus circunstancias. Un tercer artículo, del que soy autor, rastreará los diversos tratados que componen la obra en cuentión dentro de la producción matemática de Newton; debido a la singularidad del *Analysis*, que contiene tratados cuya composición abarca desde 1669 –el *De Analysi*– hasta 1695 –la última redacción de la *Enumeratio*–, esto significa que el artículo analiza treinta años de vida matemática de Newton. A lo que hay que añadir, un análisis del papel que tuvo el libro en la polémica con Leibniz (1696–1716), y cómo esta condicionó su composición. La mano de Newton se advierte en toda la composición del *Analysis* y, especialmente, en el prefacio donde Jones estableció el descubrimiento newtoniano de su cálculo infinitesimal hacia 1665; como escribió Westfall: «Aunque en el prefacio no se menciona a Leibniz, su insistencia en las fechas de la década de 1660 era suficientemente explícita».

La traducción anotada

Al igual que ocurriera con la *Introductio*, optamos por traducir el *Analysis* directamente del latín original –apoyándonos también en la magnífica edición inglesa de Whiteside–. Y hemos vuelto a confiar en José Luis Arantegui, después de la excelente traducción que hizo del libro de Euler. El resultado vuelve a ser sobresaliente: como se puede comprobar por los extractos incluidos al final de esta presentación, la traducción, en un castellano de inconfundible sabor a siglo XVIII, es, sin duda, excepcional: *un manjar exquisito* que preserva para nosotros toda la textura histórica del texto original.

El aderezo final de la anotación es obra de quien esto escribe. Contrariamente a lo que ocurrió con la *Introductio* de Euler, en este caso contaba con un excelente punto de partida: la ya mencionada edición de *The mathematical* *papers of Isaac Newton* en ocho volúmenes[17]: un océano casi inabarcable de erudición donde, habiendo ganas, se puede bucear a conciencia durante una eternidad.

La filosofía de la anotación presenta diferencias en relación con la que acompaña la traducción al castellano de la *Introductio*. Hay un par de enfoques coincidentes: al análisis de la forma –terminología y notaciones– y del significado histórico de conceptos y resultados; a ellos, se le ha unido una parte de anotación técnica para facilitar la lectura de los tratados de Newton.

En cuanto a los dos primeros, el planteamiento es parecido a lo hecho con la *Introductio*:

1. *Sobre la terminología y notación del texto original.* La adecuada anotación de este apartado era especialmente importante por cuanto la fidelidad al texto original nos ha hecho usar nomenclatura hoy desaparecida y notaciones algo distintas a las actuales. Antes de nada aclarar que, en ningún caso, esto supone una dificultad para leer o entender el texto: la nomenclatura es suficientemente natural como para entenderla casi sin ninguna explicación adicional. En cambio, al mantenernos fieles a su texto se consigue reflejar con mucha más fidelidad los matices con que Newton, o su época –sus circunstancias, que diría Ortega–, dotaron al texto. En cualquier caso la terminología usada está suficientemente apoyada, como se recoge en las notas, por citas y textos de autores clásicos –tanto españoles como extranjeros– que, además, son una buena muestra de la evolución de la nomenclatura en matemáticas –y, por supuesto, de los conceptos ocultos tras los nombres–. Especial atención se ha prestado a la notación, respetando escrupulosamente la de Newton, muy cercana ya a la nuestra, y explicando en cada caso, su evolución anterior y posterior, si la hubo. En el caso del *Analysis*, además de adecuado, este aspecto era obligado dado que la cuestión de la notación no fue baladí en la disputa con Leibniz y el *Analysis*, como ya se ha apuntado, tuvo su importancia en la polémica. En este sentido se han podido determinar algunas diferencias entre la edición de Jones y la de los manuscritos de Newton editados por Whiteside que parecieron pasarle desapercibidas a este: posiblemente, todas ellas están justificadas por la cierta preocupación de Jones por elegir una adecuada notación –sobre todo en lo que atañe a raíces y exponenciales–. Recuerdo que a Jones se debe la notación π para la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

2. *Sobre la significación histórica de conceptos y resultados.* Como ya he comentado, la obra de referencia para las matemáticas de Newton, la edición de Whiteside de *The mathematical papers of Isaac Newton* en ocho tomos, ha facilitado la elaboración de esta parte de la anotación. Aunque no sólo se han utilizado *The mathematical Papers of Isaac Newton*; también se ha usado

[17]Que le valió a su editor, D.T. Whitesite, la medalla *Koiré* de la *International Academy of the History of Science* (1968) y la medalla Sarton de la *History of Science Society* (1977), entre otros laureles.

The correspondence of Isaac Newton, sobre todo para los fragmentos de cartas incluidos en el *Analysis*, y también trabajos específicos sobre algunos de los tratados –podemos aquí citar los de Rouse-Ball (1891) y Talbot (1860) sobre la *Enumeratio*, o los de Fraser (1918/27) sobre el método de las diferencias finitas–; completando todo esto con los textos generales de historia de las matemáticas, o más concretos sobre la historia del cálculo infinitesimal, la geometría analítica o el análisis numérico, y artículos específicos sobre detalles y resultados particulares contenidos en las obras en cuestión. Y, naturalmente, las fuentes, ya sean de obras cercanas a ésta de Newton, o las suyas propias.

3. *Sobre los aspectos técnicos del* Analysis. Desde el punto de vista de las matemáticas que contiene, el *Analysis*, a diferencia de la *Introductio*, no es un texto fácil de seguir, por lo que se han añadido bastantes notas de carácter técnico. Newton no tenía, ni de cerca, la habilidad expositiva de Euler y, además, en algunos casos quería, más que explicar sus resultados, dejar constancia de que los había descubierto. En palabras de Cramer: «Newton prefería el placer de hacerse admirar al de instruir». Lo que a veces también tiene sus ventajas: siguiendo la enumeración de las cúbicas, por ejemplo, tal y como la presentó Newton, uno puede, en cierta manera, sentir la punzada agradable del redescubrimiento; o dicho de otra forma: escrita de manera más detallada, la enumeración de las cúbicas podría parecernos algo sin vida; por contra, el esfuerzo de tener que completar con demostraciones los muchos enunciados sorprendentes de Newton –es poco menos que increíble la cantidad de resultados sobre cónicas que, como Newton muestra, pueden ser traspasados a las cúbicas, o incluso a curvas de órdenes superiores– da a la lectura de la obra una vivacidad inesperada. En cualquier caso, la anotación técnica la he redactado pensando más en señalar caminos –en la manera de la posible, compatibles con los que Newton pudo haber recorrido–, o apuntar ideas, más que en completar detalles.

A vueltas, otra vez, con la inevitable cuestión de los dineros

Tanto la RSME como la SAEM Thales son asociaciones sin ánimo de lucro, de manera que el precio del *Analysis* se ajustará al máximo con el único objetivo de cubrir gastos. El estuche con la obra completa –el primer tomo conteniendo el facsímil y el segundo con la traducción anotada y los estudios preliminares–, tendrá un precio especial de salida: para aquellos socios que hagan reserva de la obra, o para quienes la adquieran antes del 31 de septiembre, será de 36 euros; a partir de entonces el precio de compra será de 45 euros para socios y 60 euros para no socios. El ajustar tanto los precios tiene la ventaja, para el socio individual, de poder conseguir una magnífica obra a un precio muy bueno; pero a cambio, las sociedades, esto es, la colectividad de socios, asumen un riesgo que podría resultar en un quebranto económico que hiciera inviable la colección. Dicho de otro modo, la acogida que los socios le dísteis a la *Introductio* de Euler, junto con la que deis al *Analysis* de Newton, determinará la continuidad de la colección. Caso de que, como todo parece indicar, se pueda continuar con ella, esperamos completar una primera fase publicando un tercer número con obras escogidas de Arquímedes, y un cuarto con las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

Y acabo tal y como lo hice cuando se presentó la *Introductio* de Euler: queridos socias y socios, espero sinceramente que a resultas de este esfuerzo colectivo logréis, con el trasteo y posterior lectura de la *Introductio* y del *Analysis*, un cierto *disfrute espiritual*, unos momentos de *satisfacción, diversión o entretenimiento, como cuando te bañas en el mar o escuchas un trozo de música*; ese es el objetivo último que esperamos lograr con esta colección: algo tan necesario, tan simple, pero a la vez tan complicado de conseguir como es *agradar o dar gusto.*

Antonio J. Durán
Catedrático de la Universidad de Sevilla
Editor General de la RSME

Anexo

A continuación sigue un breve fragmento del *Analysis*: corresponde a la clasificación de las últimas quince especies de cúbicas.

[84]

9. De los cuatro hiperbolismos de la hipérbola.[18]

Si en alguna ocasión faltan en el primer caso de la ecuación los dos términos ax^3 y bx^2, será la figura un hiperbolismo de alguna sección cónica. Hiperbolismo llamo a la figura cuya ordenada aparece dividiendo por la abscisa común la ordenada de esa figura multiplicada por una recta dada. Por tal vía conviértese la línea recta en hipérbola cónica, y toda sección cónica, en alguna

[18] Newton comienza aquí la clasificación de las cúbicas que denomina, por la razón que ahora pasa a explicar, hiperbolismos de las cónicas. Las hipótesis que Newton maneja para enumerar estas cúbicas que componen el primer caso, cuarta clase, son:

- Primer caso: esto es, cúbicas cuya ecuación se puede reducir a $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Cuarta clase: esto es, $a = 0$, $b = 0$; por lo que la cúbica se puede escribir más apropiadamente como
$$\left(xy + \frac{e}{2}\right)^2 = cx^2 + dx + \frac{e^2}{4}.$$

Newton divide esta clase en tres géneros, según sea c positivo, negativo o cero: son los hiperbolismos de la hipérbola, de la elipse o de la parábola respectivamente. En este parágrafo, Newton clasifica los hiperbolismos de la hipérbola –primer caso, cuarta clase, primer género –: supone pues, como se acaba de decir, $c > 0$. En este caso, la cúbica tiene tres asíntotas: $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{c}$. La clasificación se vuelve a dividir en dos casos, que darán un total de 4 especies, según que la cúbica tenga o no diámetro:

- $e \neq 0$. La cúbica no tiene entonces diámetro y, en este caso, sólo corta a la asíntota $x = 0$; aparecen los siguientes casos según las raíces del polinomio $cx^2 + dx + e^2/4$:
  - Dos raíces reales simples: es la quicuagésima séptima especie (fig. 61).
  - Dos raíces complejas; que a su vez da, según tenga o no centro:
    - Si $d \neq 0$, esto es, sin centro: es la quincuagésima octava especie (fig. 62).
    - Si $d = 0$, esto es, con centro: es la quincuagésima novena especie (fig. 63).
  - No puede haber raíces reales dobles, pues la cúbica se reduciría entonces a una cónica.
- Si $e = 0$; hay entonces un diámetro, ningún punto de corte con las asíntotas: es la sexagésima especie (fig. 64).

de las figuras que aquí llamo hiperbolismos de secciones cónicas. Pues, en efecto, la ecuación que cumple a las figuras de que aquí tratamos, a saber, $xy^2 + ey = cx + d$, da $y = \dfrac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2x}$, que se genera dividiendo por la abscisa común de las curvas, x, el producto de la ordenada de la sección cónica, $\dfrac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2m}$, y la recta dada m. De donde se hace luminosamente claro que la figura generada será hiperbolismo de una hipérbola, elipse o parábola, según sea el término cx afirmativo, o negativo, o nulo.[19]

El hiperbolismo de hipérbola tiene tres asíntotas, de las que una es la ordenada primera y principal Ad; las otras dos, paralelas a la abscisa AB, distantes de ella igualmente por aquí y por allá. En la ordenada principal Ad, toma Ad y $A\delta$, por una y otra parte iguales a la cantidad $\sqrt{c}$; y por los puntos d y δ lleva dg y $\delta\gamma$, asíntotas paralelas a la abscisa AB.

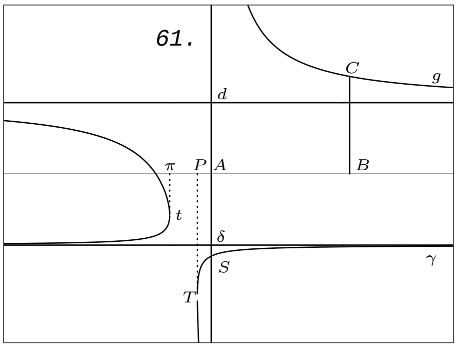
Allí donde no falte el término ey, no tiene la figura diámetro ninguno. En tal caso, si en esa ecuación $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ las dos raíces AP, Ap (*fig. 61*) son reales y desiguales (pues iguales no pueden, como no sea la figura sección cónica), constará la figura de tres hipérbolas entre sí contrarias, sita
[85] la una entre las asíntotas paralelas, y las otras dos, fuera. Y ésta es la *especie quincuagésimo séptima*.

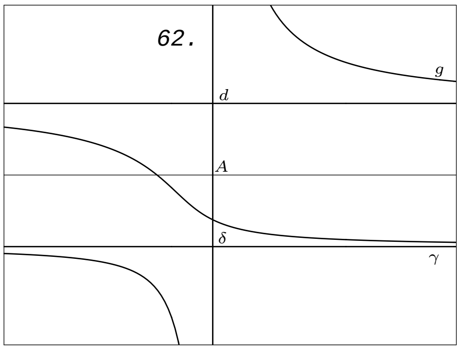
Si son imposibles esas dos raíces, tendráse dos hipérbolas opuestas fuera de las asíntotas paralelas y una serpentina hiperbólica entre ellas. Esta figura es de dos especies. Pues centro no tiene allí donde el término d no falte (*fig. 62*), mas si ese término falta, es el punto A centro de la figura (*fig.63*). La primera especie es la *quincuagésimo octava*; la posterior, la *quincuagésimo nona*.

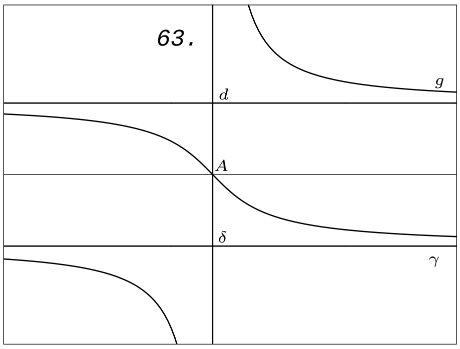
Que si falta el término ey, consta la figura de tres hipérbolas contrarias, sita la una entre las asíntotas paralelas, y las otras dos, fuera, como en la especie quincuagésimo cuarta[20], y tiene además diámetro que es la abscisa AB (*fig. 64*). Y ésta es la *especie sexagésima*.

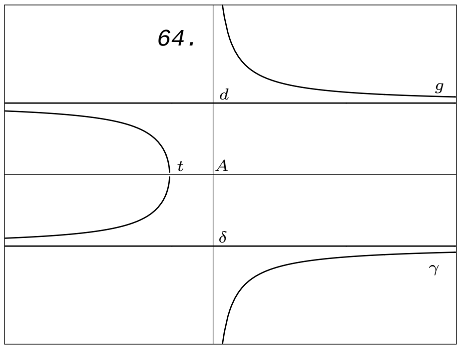
[19] La nomenclatura de *hiperbolismos* la introdujo Newton por primera vez hacia 1680, y la explicó hacia 1695 en sendos trabajos sobre la clasificación de las cúbicas [Whiteside IV, 1971: 372–373, n. 69]. Digamos que si $f(x, y) = 0$ es la ecuación cartesiana de una curva, entonces su hiperbolismo viene dado por la ecuación $f(x, xy) = 0$. Así, una recta $y = ax + b$, da el hiperbolismo $xy = ax + b$, que es claramente una hipérbola. Asimismo, las cónicas $y^2 + ey = cx^2 + dx$ –hipérbolas para $c > 0$, elipses para $c < 0$ o parábolas para $c = 0$– dan los hiperbolismos $x^2y^2 + exy = cx^2 + dx$, lo que eliminando el factor común x da $xy^2 + ey = cx + d$, que son las cúbicas correspondientes a esta tanda.

[20] Debería decir la quincuagésimo séptima. En esta versión definitiva de la *Enumeratio*, Newton añadió tres nuevas especies sobre una versión anterior que tomaba como referencia: aquí olvidó ajustar la numeración incluyendo las nuevas especies añadidas [Whiteside VII, 1976: 629, n. 92].


61.
C
g
d
π
P
A
B
t
δ
S
γ
T

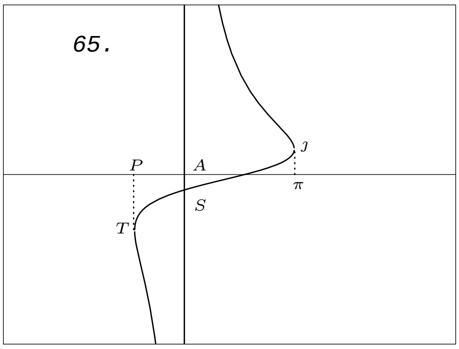

62.
g
d
A
δ
γ

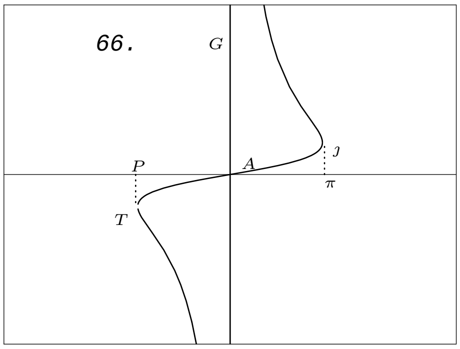

63.
g
d
A
δ
γ


64.
g
d
t
A
δ
γ

10. *De los tres hiperbolismos elípticos.*[21]

Defínese el hiperbolismo elíptico por esta ecuación, $xy^2 + ey = cx + d$, y tiene una única asíntota que es la ordenada principal Ad (*fig. 65*). Si no falta el término ey, es la figura hipérbola serpentina sin diámetro y también sin centro, si el término d no falta. Que es la *especie sexagésimo prima.*





Y si el término d falta, tiene la figura centro sin diámetro, y tal es el punto A (*fig. 66*). *Especie* que es en verdad la *sexagésimo segunda.*

Y si falta el término ey y no el término d, es la figura concoidal cabe la asíntota AG (*fig. 67*), y tiene diámetro sin centro, y es diámetro suyo la abscisa AB. Que es la *especie sexagésimo tercia.*

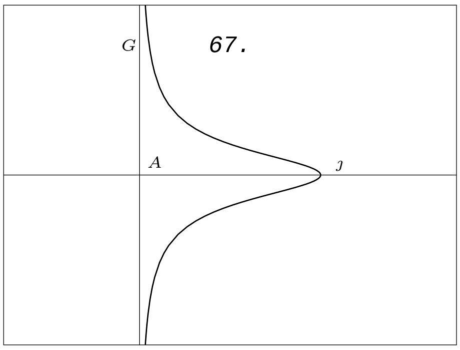
---

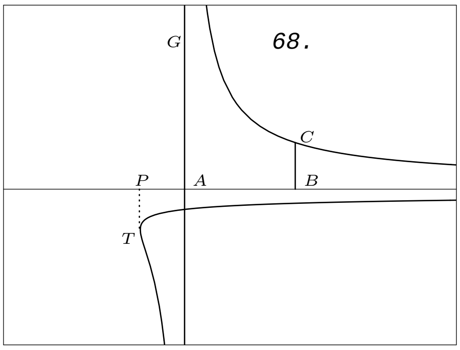
[21] Estamos ahora en el primer caso, cuarta clase, segundo género cuyas hipótesis son:

- Primer caso, cuarta clase: esto es, cúbica de ecuación: $xy^2 + ey = cx + d$.
- Segundo género: $c < 0$.

En este caso la cúbica tiene una sola asíntota: $x = 0$. La clasificación se vuelve a dividir en dos casos según que la cúbica tenga o no diámetro:

- $e \neq 0$. La cúbica no tiene entonces diámetro y, en este caso, sólo corta a la asíntota $x = 0$; aparecen los siguientes casos según que tenga centro o no:
  - $d \neq 0$; no hay centro ni diámetro: es la sexagésima primera especie (fig. 65).
  - $d = 0$; hay centro pero no diámetro: es la sexagésima segunda especie (fig. 66).
- Si $e = 0$; hay entonces un diámetro, pero no centro –si también $d = 0$, degeneraría la cúbica en tres rectas–: es la sexagésima tercera especie (fig. 67).





11. De los dos hiperbolismos de la parábola.[22] [86]

Defínese el hiperbolismo de la parábola mediante la ecuación $xy^2+ey=d$; y tiene dos asíntotas, la abscisa AB y la ordenada primera y principal AG. Mas en verdad son dos las hipérbolas en esta figura, no opuestas en los ángulos de las asíntotas sino en el ángulo al que son inmediatamente adyacentes, y ello, a uno y otro lado de la abscisa AB, y o bien sin diámetro, si se tiene el término ey (*fig. 68*), o con diámetro, si falta (*fig. 69*). *Especies* éstas dos que son la *sexagésimo cuarta y sexagésimo quinta.*

12. Del tridente.[23]

Teníase en el segundo caso esta ecuación, $xy = ax^3+bx^2+cx+d$. Y en tal caso tiene la figura cuatro ramas infinitas de las que dos son hiperbólicas en torno a la asíntota AG (*fig. 72*), tendentes a partes contrarias, y dos parabólicas,

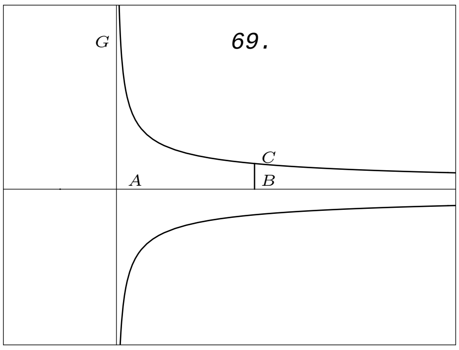
[22] Estamos ahora en el primer caso, cuarta clase, tercer género cuya ecuación es $xy^2+ey=d$. En este caso, la cúbica tiene dos asíntotas: $x=0$ e $y=0$. Se divide en dos especies según que la cúbica tenga o no diámetro:

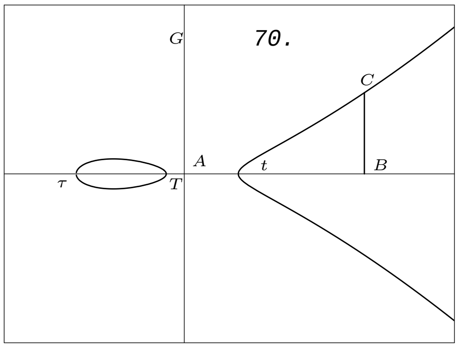
- $e \neq 0$, no hay diámetro: es la sexagésima cuarta especie (fig. 68).
- Si $e=0$; hay entonces un diámetro: es la sexagésima quinta especie (fig. 69).

[23] Estamos ahora en el segundo caso, esto es, cúbicas de ecuación

$$xy = ax^3+bx^2+cx+d.$$

Tiene entonces la cúbica una sola asíntota $x=0$ –necesariamente $d \neq 0$, pues reduciría a cónica–. Hay una sola especie: la sexagésimo sexta –el tridente de Descartes– (fig. 72).





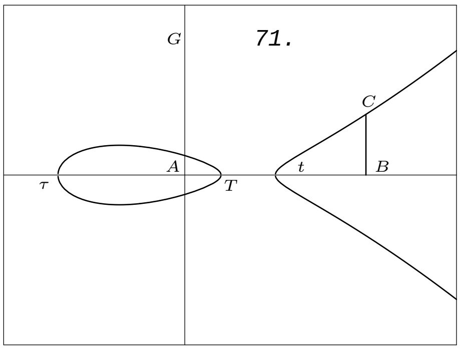
convergentes y que forman con las primeras una suerte de tridente[24]. Y es esta figura de parábola aquélla mediante la cual construyera *Cartesio* ecuaciones de seis dimensiones[25]. Ésta es por tanto la especie *sexagésimo sexta*.

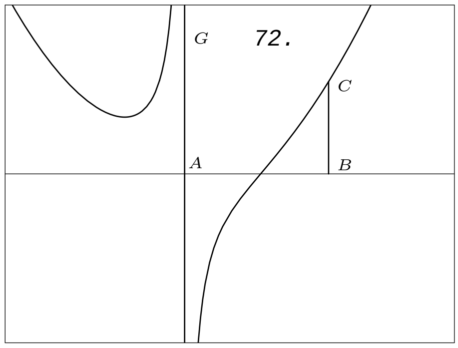
[24]A Newton se debe la denominación de tridente para esta curva. Usó por primera vez el nombre en la versión de la *Enumeratio* que redactó hacia el verano de 1695, aunque ya había manejado y estudiado la curva con anterioridad en varias ocasiones [Whiteside VII, 1976: 585, n. 31].

[25]Se trata de los cálculos de Descartes al final del libro III, el último, de la *Geométrie*; allí obtiene la ecuación $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$, con q mayor que el cuadrado de $rp/2$, para calcular los puntos de corte de un tridente con una circunferencia. Entre otras formas, Descartes construyó en la *Géométrie* el tridente mediante traslación adecuada de una parábola y encontró la fórmula: $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ o, tanto da, $dxy = (b-y)(y^2 - cd)$ [Descartes, 1637: 344]; y, también, como solución de un ejemplo del problema de Pappus para cinco líneas: –traduciendo a términos actuales– queremos encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de las distancias (medidas en ángulos fijos) a tres rectas es igual al producto de las distancia a las otras dos rectas; dados unos ejes, perpendiculares u oblicuos, OX y OY tomamos como nuestras cinco rectas $x = -a$, $x = 0$, $x = a$, $x = 2a$ e $y = 0$, y medimos las distancias de manera coherente con los ejes. Para un punto P de coordenadas (x, y), el producto de las distancias a las rectas $x = -a$, $x = a$, $x = 2a$ da $(x + a)(a - x)(2a - x)$, mientras que a las rectas $x = 0$, $y = 0$ da xy. Si añadimos el factor constante a al segundo producto –requerido por razones de homogenidad en la formulación geométrica del problema– obtenemos la ecuación

$$axy = (x + a)(a - x)(2a - x)$$

[Descartes, 1637: 335–337].





13. De las cinco parábolas divergentes.[26]

Era la ecuación en el tercer caso $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y designa a la parábola cuyas ramas divergen entre sí y progresan infinitamente hacia partes contrarias. La abscisa AB es su diámetro, y sus especies, las cinco que siguen. **[87]**

Si son reales y desiguales las raíces todas $A\tau$, AT, At de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, es la figura parábola divergente campaniforme, con *óvalo* cabe el vértice (*figs. 70, 71*). Y es la especie *sexagésimo séptima*.

Si dos raíces son iguales, aparece una parábola *anudada*, tocando al óvalo (*fig. 73*), o *apuntada*, al ser el óvalo infinitamente pequeño (*fig. 74*) Especies éstas dos que son la *sexagésimo octava y sexagésimo nona*.

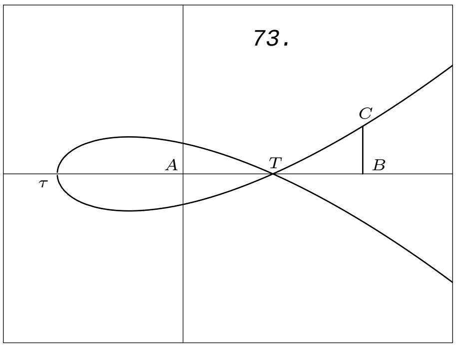
---

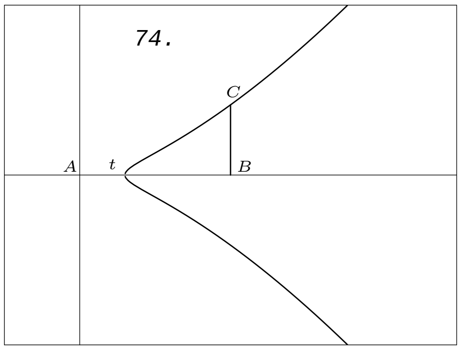
[26]Estamos ahora en el tercer caso, esto es, cúbicas con ecuación

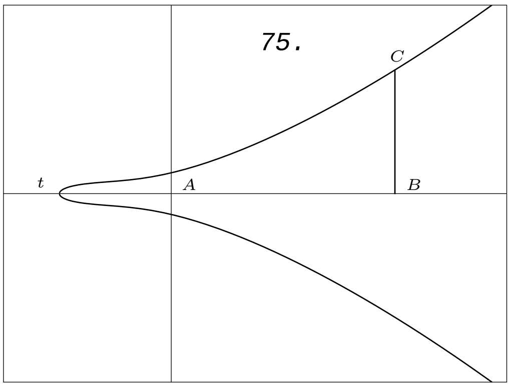
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

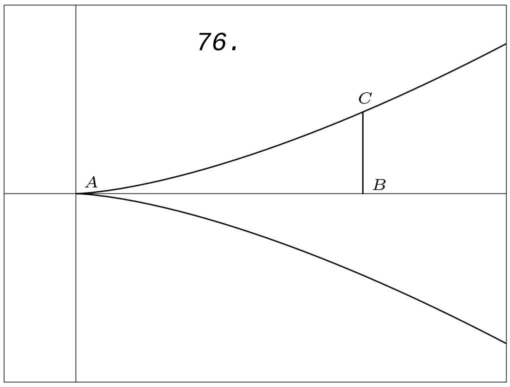
No hay asíntotas. Se clasifica este caso en cinco especies, según las raíces del polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- 3 raíces reales simples: es la sexagésima séptima especie (figs. 70 y 71).
- 3 raíces reales de las cuales una es doble; aparecen dos casos:
  - La raíz doble es la mayor de las raíces si $a > 0$, y la menor si $a < 0$ –a no se anula pues la cúbica degeneraría en cónica–: es la sexagésima octava especie (fig. 73).
  - La raíz doble es la menor si $a > 0$, y la mayor si $a < 0$: es la sexagésima novena especie (fig. 74).
- Una raíz real triple: es la septuagésima especie (fig. 76).
- 2 raíces complejas y una real: es la septuagésima primera especie (figs. 74 y 75).







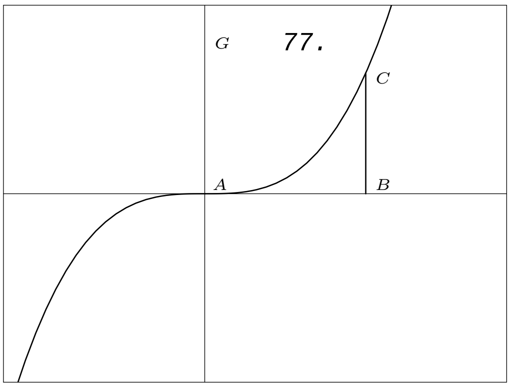


Si son iguales todas las raíces, será la parábola *acuminada* en el vértice (*fig. 76*). Y ésta es la parábola *neiliana* a la que dícese vulgarmente *semicúbica*[27]. Y es la *especie septuagésima*.

Si son imposibles dos raíces, tiénese una parábola *pura* campaniforme (*figs. 74, 75*), que constituye la *especie septuagésimo prima*.

[27]Además de por William Neil, la parábola semicúbica fue también considerada por Hendrick van Heuraet y Pierre de Fermat: los tres la rectificaron, en 1657 Neil –que contaba entonces 19 años–, en 1659 van Heuraet, y en 1660 Fermat. Y hubo un cierto debate hacia mediados del siglo XVII entre Wallis y Huygens por ver a quién de entre Neil y van Heuraet se le adscribía la paternidad de la curva. Evidentemente, Newton se inclina de la parte de Neil [Whiteside IV, 1971: 374, n. 72], aunque conocía la rectificación de van Heuraet que apareció publicada en la segunda edición latina de van Schooten de la *Géométrie* de Descartes y a partir de la que Newton empezó a entrever el teorema fundamental del cálculo [Whiteside I, 1967: 13, n. 30]; por mor de que el lector tenga pluralidad de opiniones recomiendo la lectura de [Van Maanen, 1984].

14. De la parábola cúbica.[28]



Era la ecuación en el cuarto caso $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y esta ecuación designa a la parábola[29] que tiene ramas contrarias y suele decirse *cúbica (fig. 77)*. Y así son las *especies* en todo *setenta y dos*[30].

[28]Estamos, por fin, en el cuarto y último caso, esto es, cúbicas con ecuación

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

No hay asíntotas. Todo el caso queda clasificado como la especie septuagésima segunda y última (fig. 77).

[29]En la versión redactada en 1695, Newton calificó por primera vez está especie como parábola *wallisiana* [Whiteside VII, 1976: 586, n. 36 y 634, n. 100], pues fue la usada por Wallis en 1657 para construir las raíces de la ecuación cúbica $x^3 = mx + n$ como puntos de corte de la parábola cúbica $y^3 = k^2(x + n/m)$ y la recta $y = x\sqrt[3]{k^2/m}$. El término *wallisiana* no aparece sin embargo en esta edición de Jones, aunque sí lo hace en la edición de la *Enumeratio* como apéndice de la *Opticks* [Newton, 1704: 157].

[30]Un último comentario. Hay malas noticias para quienes, después de estudiar esta clasificación de Newton de las cúbicas, sientan la tentación de emularle y pongan manos a la obra para clasificar las curvas de cuarto orden: E. Waring ya se les adelantó en 1762 con su *Miscellanea Analytica*. El catálogo de Waring se eleva a 84.551 especies distintas, de las cuales no menos de 72.480 tienen cuatro asíntotas –los números son correctos–.