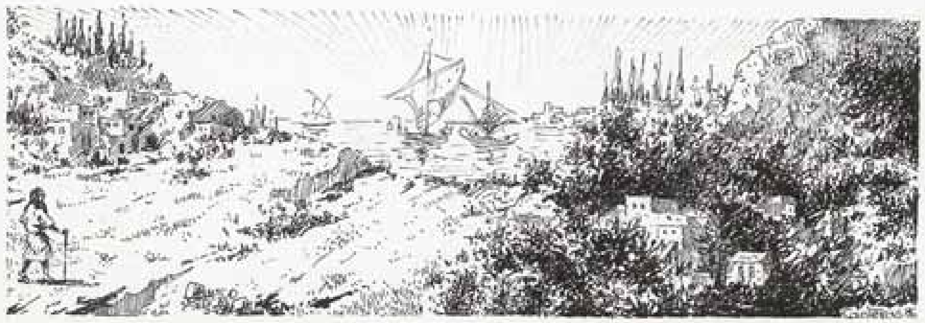
EUDOXO

EUDOXO — HIJO DE ESCHINES — NACIÓ EN CNIDO ALREDEDOR DEL AÑO 408 A. DE J.C., Y MURIÓ EN LA MISMA CIUDAD SOBRE EL AÑO 355 A. DE J.C. FUE ASTRÓNOMO, GEÓMETRA, MÉDICO Y LEGISLADOR.

A LO LARGO DE SU VIDA, EUDOXO VIAJÓ CON BASTANTE FRECUENCIA, VISITANDO PROBABLEMENTE LOS PAÍSES Y CIUDADES QUE CITAREMOS A CONTINUACIÓN.

SIENDO TODAVÍA MUY JOVEN, PASÓ A ITALIA Y SICILIA PARA ESTUDIAR GEOMETRÍA CON ARQUITAS Y MEDICINA CON FILISTIÓN. A LA EDAD DE VEINTITRÉS AÑOS SALTÓ A ATENAS EN COMPAÑÍA DEL MÉDICO TEOMEDONDE. EL "ESTADO DE CUENTAS" DE EUDOXO ERA TAN DEPLORABLE QUE SE VIÓ OBLIGADO A FIJAR SU RESIDENCIA EN EL PIREO, LUGAR DESDE EL CUAL — DIARIAMENTE — SUBÍA ANDANDO A LA CIUDAD PARA ESCUCHAR LAS ENSEÑANZAS DE LOS FILÓSOFOS, EN PARTICULAR LAS DE PLATÓN, Y DESPUÉS — UTILIZANDO EL MISMO MEDIO DE LOCOMOCIÓN — REGRESABA AL BELLO PUERTO GRIEGO. AL CABO DE DOS MESES DE PERMANENCIA EN ATENAS, EUDOXO VOLVIÓ A CNIDO, DESDE DONDE — "PATROCINADO" POR SUS AMIGOS — VIAJÓ A EGIPTO.



LA ESTANCIA DE EUDOXO EN EGIPTO SE PROLONGÓ DURANTE DIECISÉIS MESES.
DURANTE ESTE TIEMPO, ASIMILÓ LOS CONOCIMIENTOS ASTRONÓMICOS DE LOS SACERDOTES DE HELIÓPOLIS E HIZO NUMEROSAS OBSERVACIONES CELESTES.
DIÓGENES LAERCIO NOS TRANSMITE LA SIGUIENTE HISTORIA:
"CUANDO ESTABA EN EGIPTO CON ICONUFI HELIOPOLITANO, APIS LE LAMIÓ EN REDEDOR TODO EL PALIO; DE LO CUAL AGORARON LOS SACERDOTES QUE SERÍA HOMBRE CÉLEBRE, PERO DE CORTA VIDA. ASÍ LO DICE FAVORINO EN SUS "COMENTARIOS". MIS VERSOS A ÉL SON LOS SIGUIENTES:

DICEN QUE EUDOXO CUANDO ESTUVO EN MENFIS
SU SUERTE SABER QUISO
DE UN BUEY HERMOSO, HERMOSAMENTE ASTADO.
NADA LE RESPONDIÓ; PORQUE ¿DE DÓNDE
HABÍA DE VENIR AL BUEY LOCUELA?
NO CONCEDIÓ NATURA
HABLAR AL NOVILLO APIS; PERO SUPO
SITUARSE OBLICUAMENTE A SU COSTADO
Y LAMERLE LA ROPA:
ENSEÑANDO CON ELLO CLARAMENTE
QUE MORIRÍA PRESTO.
Y ASÍ FUE: NI LA MUERTE TARDÓ MUCHO;
PUES VIVIÓ SOLAMENTE MIENTRAS DABAN
SUS CINCUENTA Y TRES GIROS LAS "VERGILIAS".

FINALIZADA SU ETAPA DE CONVIVENCIA CON LOS SACERDOTES EGIPCIOS, EUDOXO CRUZÓ EL MAR Y SE INSTALÓ EN CÍZICO.
ALLÍ CONGREGÓ A UN GRAN NÚMERO DE DISCÍPULOS QUE LE ACOMPAÑARON A ATENAS, ALREDEDOR DEL AÑO 368 A. DE J.C.
POR ÚLTIMO, EUDOXO REGRESÓ A CNIDO DEDICÁNDOSE A TAREAS LEGISLATIVAS.

HASTA AQUÍ HEMOS PRESENTADO UNA SUCINTA BIOGRAFÍA DE EUDOXO; PERO, ¿CUÁLES FUERON SUS APORTACIONES MATEMÁTICAS MÁS NOTABLES?
SIN NINGÚN GENERO DE DUDAS DOS: SU TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD Y SU MÉTODO DE "EXHAUCIÓN" (EQUIVALENTE GRIEGO DE NUESTRO CÁLCULO INTEGRAL). POR SÍ SOLAS, ESTAS DOS CONTRIBUCIONES BASTARÍAN PARA QUE EUDOXO OCUPASE UNA DE LAS PRIMERAS POSICIONES EN EL "RANKING" DE LOS MATEMÁTICOS MÁS BRILLANTES DE TODOS LOS TIEMPOS.

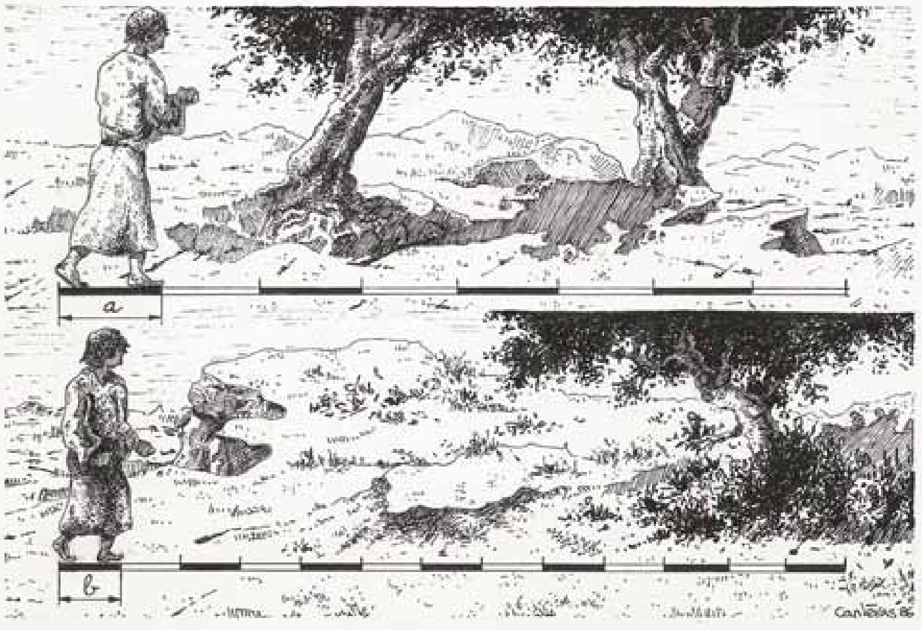
- TEORÍA DE PROPORCIONALIDAD
- MÉTODO DE EXHAUCIÓN

EN SU TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD EUDOXO ESTABLECE — EN PRIMER LUGAR — UN PRINCIPIO, QUE EN LA ACTUALIDAD SE CONOCE POR EL NOMBRE DE "POSTULADO DE CONTINUIDAD", O "POSTULADO DE EUDOXO-ARQUÍMEDES" O, SIMPLEMENTE, "POSTULADO DE ARQUÍMEDES", EN EL QUE SE ESTABLECE LA CONDICIÓN PARA QUE DOS MAGNITUDES — CONMENSURABLES O NO — TENGAN RAZÓN. DICHO PRINCIPIO, PRESENTADO POR EUCLIDES DE ALEJANDRÍA EN LA DEFINICIÓN CUARTA DEL LIBRO QUINTO DE SUS "ELEMENTOS", PUEDE SER ENUNCIADO EN LOS SIGUIENTES TÉRMINOS:
"DOS MAGNITUDES TIENEN RAZÓN MUTUA CUANDO SE PUEDE ENCONTRAR UN MÚLTIPLO DE LA MENOR QUE EXCEDA A LA MAYOR."

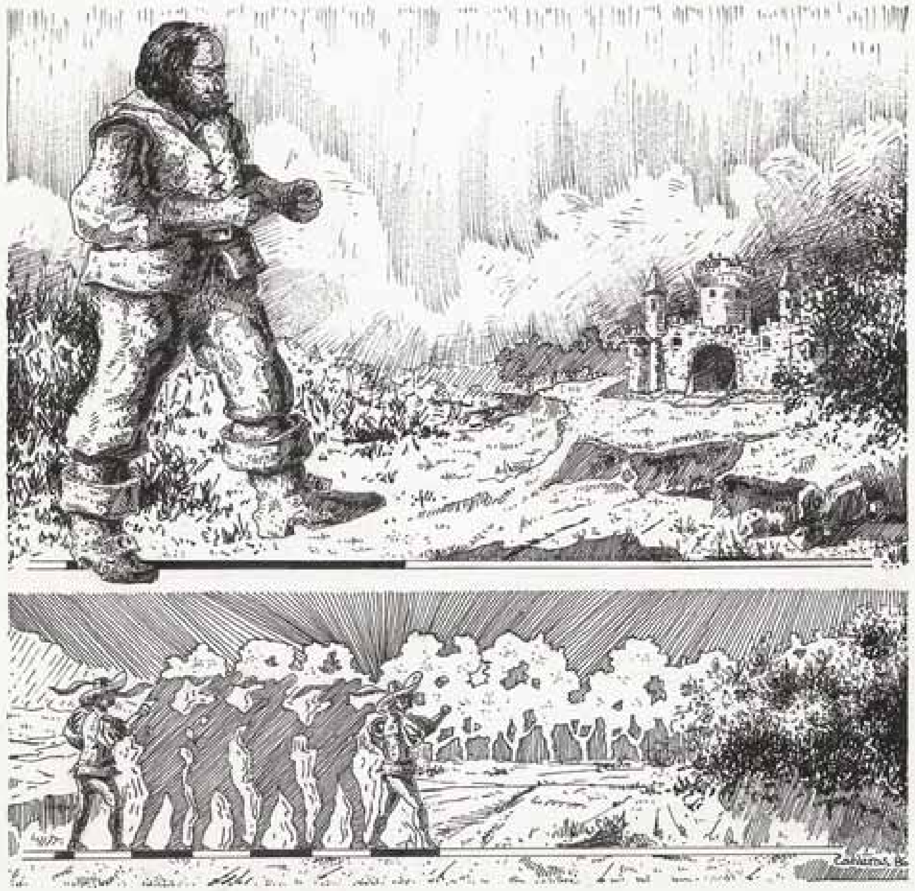
$$\underline{a} \text{ Y } \underline{b} \text{ TIENEN RAZÓN MUTUA } (a > b)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ TAL QUE } n \cdot b > a$$

EN RELACIÓN CON EL PRINCIPIO QUE ACABAMOS DE OFRECER, NOS PARECE INEVITABLE INCLUIR UN BELLO PÁRRAFO, CONTENIDO EN LA OBRA "LOS GRANDES MATEMÁTICOS" DE H. W. TURNBULL ("SIGMA: EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS". TOMO I, PÁGS. 26 Y 27). DICE ASÍ:

"COMBINEMOS AHORA ESTA ARITMÉTICA DE ESCALAS CON LA GEOMETRÍA DE UNA LÍNEA DIVIDIDA. POR EJEMPLO, SEA UNA LÍNEA AB DIVIDIDA AL AZAR POR C, EN DOS LONGITUDES a Y b, DONDE $AC = a$, $CB = b$. ENTONCES SUBSISTE LA CUESTIÓN, ¿CUÁL ES EL SENTIDO ARITMÉTICO "EXACTO" DE LA RAZÓN $a:b$, SEAN ÉSTOS O NO IRRACIONALES? LA MARAVILLOSA RESPUESTA A ESTA PREGUNTA ES LO QUE HIZO TAN FAMOSO A EUDOXO. ANTES DE CONSIDERARLA, TOMEMOS COMO EJEMPLO LOS PASOS DE DOS CAMINANTES. UN HOMBRE ALTO A TIENE UN PASO REGULAR DE UNA LONGITUD a, Y SU AMIGO MÁS BAJO B TIENE UN PASO b. SUPONGAMOS AHORA QUE 8 PASOS DE A CUBREN EL MISMO TERRENO QUE 13 DE B; EN ESTE CASO, LOS PASOS "INDIVIDUALES" DE A Y B SE HALLAN EN LA RAZÓN 13 : 8. LA REPETICIÓN DE PASOS, PARA HACERLES CUBRIR UNA DISTANCIA CONSIDERABLE, ACTÚA COMO UN VIDRIO DE AUMENTO Y AYUDA A MEDIR LOS PASOS INDIVIDUALES a Y b, COMPARÁNDOLOS ENTRE SÍ. AQUÍ TENEMOS EL PUNTO DE VISTA ADOPTADO POR EUDOXO. EN EFECTO, ÉSTE DICE: MULTIPLIQUEMOS NUESTRAS MAGNITUDES a Y b CUYA RAZÓN SE PIDE Y VEAMOS QUÉ SUCEDE".



"SUPONGAMOS, CONTINÚA, QUE PODEMOS SABER SI a Y b SON IGUALES, Y SI NO ES ASÍ CUÁL ES MAYOR. ENTONCES, SI a ES EL MAYOR, SUPONGAMOS, EN SEGUNDO LUGAR, QUE PODEMOS HALLAR MÚLTIPLOS, $2b$, $3b$, ..., nb, DE LA MAGNITUD MÁS PEQUEÑA b; Y, EN TERCER LUGAR, SUPONGAMOS QUE SIEMPRE PODEMOS HALLAR UN MÚLTIPLO nb DE b QUE SUPERE A a. (EL HOMBRE ALTO PODRÍA TENER BOTAS DE SIETE LEGUAS Y EL HOMBRE BAJO PODRÍA SER PULGARCITO. ¡MÁS PRONTO O MÁS TARDE EL ENANO DARÍA ALCANCE A UN PASO DE SU AMIGO!) POCOS NEGARÁN LA EXACTITUD DE ESTOS SIMPLES SUPUESTOS; NO OBSTANTE, SUS IMPLICACIONES MATEMÁTICAS HAN DEMOSTRADO SER MUY SUTILES. A ESTA TERCERA SUPOSICIÓN DE EUDOXO SE LE HA DADO CRÉDITO DE FORMA VARIADA, PERO ACTUALMENTE SE LA CONOCE COMO EL "AXIOMA DE ARQUÍMEDES"."



HAGAMOS NOTAR QUE LA CONDICIÓN DE EUDOXO PARA QUE DOS MAGNITUDES TENGAN RAZÓN MUTUA, POR UN LADO EXCLUYE AL CERO Y POR OTRO DEJA BIEN CLARO QUE LAS MAGNITUDES QUE SE COMPARAN DEBEN SER DE LA MISMA CLASE. NO TIENE SENTIDO, POR EJEMPLO, HABLAR DE LA RAZÓN ENTRE UNA LONGITUD Y UN ÁREA O ENTRE UN ÁREA Y UN VOLUMEN.

LA SEGUNDA PRUEBA DE INGENIO DADA POR EUDOXO, EN LO QUE TOCA A LA TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD, SE OFRECE EN SU DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE DOS RAZONES. LA FORMULACIÓN DE EUDOXO ES PRESENTADA POR EUCLIDES ("ELEMENTOS". LIBRO V. DEF. 5) EN LOS SIGUIENTES TÉRMINOS:

"SE DICE QUE LA RAZÓN DE UNA PRIMERA MAGNITUD CON UNA SEGUNDA ES LA MISMA QUE LA DE UNA TERCERA CON UNA CUARTA CUANDO, TOMANDO CUALQUIER MÚLTIPLO DE LA PRIMERA Y DE LA TERCERA Y DE LA SEGUNDA Y CUARTA, EL MÚLTIPLO DE LA PRIMERA ES MAYOR, IGUAL O MENOR QUE EL DE LA SEGUNDA, SEGÚN QUE EL DE LA TERCERA SEA MAYOR, IGUAL O MENOR QUE EL DE LA CUARTA."

EN UN LENGUAJE MENOS "BARROCO" Y AYUDÁNDONOS DEL SIMBOLISMO MODERNO, PODRÍAMOS DECIR:

LA RAZÓN $a:b$ (ENTRE LAS MAGNITUDES $\underline{a}$ Y $\underline{b}$ DE LA MISMA CLASE) ES IGUAL A LA RAZÓN $c:d$ (ENTRE LAS MAGNITUDES $\underline{c}$ Y $\underline{d}$ DEL MISMO GÉNERO) SI, Y SÓLO SI, DADOS DOS NÚMEROS NATURALES CUALESQUIERA $\underline{m}$ Y $\underline{n}$, ENTONCES:

(1) SI $ma > nb \Rightarrow mc > nd$, O BIEN
(2) SI $ma = nb \Rightarrow mc = nd$, O BIEN
(3) SI $ma < nb \Rightarrow mc < nd$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \forall m,n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{SI } ma > nb \Rightarrow mc > nd \\ \text{SI } ma = nb \Rightarrow mc = nd \\ \text{SI } ma < nb \Rightarrow mc < nd \end{cases}}$$

EL "MÉTODO DE EXHAUCION" ES UN MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN EQUIVALENTE A UNA DOBLE REDUCCIÓN AL ABSURDO, SEGÚN EL CUAL "PARA DEMOSTRAR QUE UNA CANTIDAD A ES IGUAL A UNA CANTIDAD B O QUE UNA FIGURA A ES EQUIVALENTE A UNA FIGURA B, BASTA PROBAR QUE A NO PUEDE SER NI MAYOR NI MENOR QUE B" (J. REY PASTOR Y JOSÉ BABINI. "HISTORIA DE LA MATEMÁTICA". VOL. 1. PÁG. 65).

DICHO MÉTODO SE FUNDAMENTA EN LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN (CUYA DEMOSTRACIÓN SE APOYA EN EL "AXIOMA DE EUDOXO").

"DADAS DOS MAGNITUDES DESIGUALES, SI DE LA MAYOR SE RESTA UNA MAGNITUD NO MENOR QUE SU MITAD Y DE LO QUE QUEDA OTRA MAGNITUD NO MENOR QUE SU MITAD Y ESTE PROCESO SE REPITE CONTINUAMENTE, QUEDARÁ UNA MAGNITUD MENOR QUE LA MENOR DE LAS MAGNITUDES DADAS."

A PARTIR DE AHORA EN ADELANTE, UTILIZAREMOS EL NOMBRE DE "PROPIEDAD DE EXHAUCIÓN" PARA REFERIRNOS A LA ANTEDICHA PROPOSICIÓN.

$$\boxed{A = B \Longleftrightarrow A \nless B \text{ Y } A \ngtr B}$$

COMO EJEMPLO DE LA APLICACIÓN DEL "MÉTODO DE EXHAUCIÓN", PRESENTAMOS LA DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN:

"LOS CÍRCULOS SON ENTRE SÍ COMO LOS CUADRADOS DE SUS DIÁMETROS" (EUCLIDES. "ELEMENTOS". LIBRO XII. PROP. 2).

DICHA DEMOSTRACIÓN, QUE NOSOTROS OFRECEMOS EN NOTACIÓN ACTUAL, SE DEBE POSIBLEMENTE A EUDOXO.

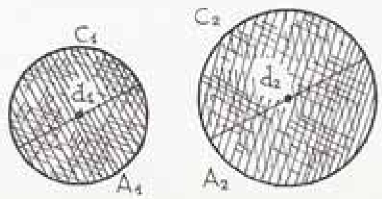
SEA C_1 UN CÍRCULO DE DIÁMETRO d_1 Y ÁREA A_1, Y C_2 UN CÍRCULO DE DIÁMETRO d_2 Y ÁREA A_2.

SE DESEA PROBAR QUE:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \qquad (1)$$

SI NO SE VERIFICA (1), ENTONCES SE PUEDEN PRESENTAR LAS DOS SITUACIONES SIGUIENTES:

a) $\dfrac{A_1}{A_2} < \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$ b) $\dfrac{A_1}{A_2} > \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$



SUPONGAMOS, EN PRIMER LUGAR, QUE $\frac{A_1}{A_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$. EN ESTE CASO EXISTE UN ÁREA A ($A < A_2$), TAL QUE:

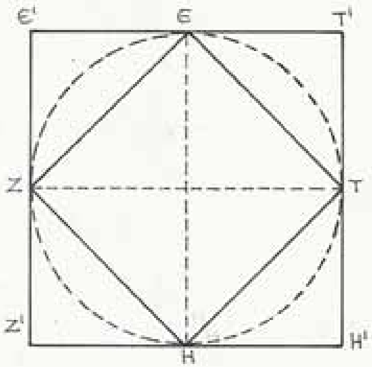
$$\frac{A_1}{A} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

INSCRIBAMOS EN EL CÍRCULO C_2 EL CUADRADO EZHT, CUYA ÁREA ES MAYOR QUE LA MITAD DE A_2. EN EFECTO: SI POR LOS PUNTOS E, Z, H Y T TRAZAMOS LAS TANGENTES A LA CIRCUNFERENCIA DE C_2, ENTONCES EL CUADRADO EZHT ES LA MITAD DEL CUADRADO E'Z'H'T', VERIFICÁNDOSE QUE:

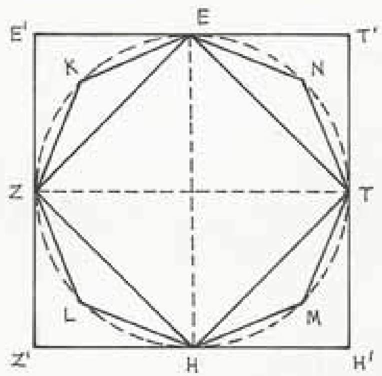
$$EZHT < A_2 < E'Z'H'T'$$
$$EZHT < A_2 < 2 . EZHT,$$

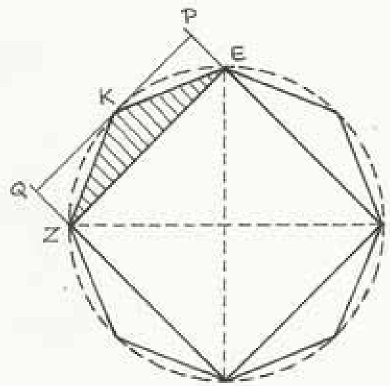
DE DONDE:

$$EZHT > A_2/2$$



BISECANDO LOS ARCOS $\widehat{EZ}$, $\widehat{ZH}$, $\widehat{HT}$ Y $\widehat{TE}$ POR LOS PUNTOS K, L, M Y, N, Y TRAZANDO LOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS EK, KZ, ZL, LH, HM, MT, TN Y NE (CON LO QUE SE CONSTRUYE UN OCTÓGONO REGULAR INSCRITO EN C_2), LOS TRIÁNGULOS EKZ, ZLH, HMT Y TNE SON MAYORES QUE LA MITAD DE LOS SEGMENTOS CIRCULARES, "LIMITADOS" RESPECTIVAMENTE, POR LAS CUERDAS EZ, ZH, HT, TE Y LOS ARCOS $\widehat{EZ}$, $\widehat{ZH}$, $\widehat{HT}$ Y $\widehat{TE}$.





S = SEGMENTO CIRCULAR EKZ

T = TRIÁNGULO EKZ

R = RECTÁNGULO EPQZ

$R = 2T$ Y $S < R$

$$S < 2T$$

$$\boxed{\frac{S}{2} < T}$$

DUPLICANDO SUCESIVAMENTE EL NÚMERO DE LADOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EN C_2, LLEGARÍAMOS A OBTENER — EN VIRTUD DE LA "PROPIEDAD DE EXHAUCIÓN" — SEGMENTOS CIRCULARES MENORES QUE $A_2 - A$. POR TANTO, SEPARANDO DEL CÍRCULO C_2 LOS SEGMENTOS CIRCULARES ASÍ OBTENIDOS, LO QUE QUEDA (ES DECIR, UN POLÍGONO REGULAR P_2, INSCRITO EN C_2) ES MAYOR QUE A.

$$\text{SEGMENTOS} < A_2 - A$$

$$A_2 - \text{SEGMENTOS} > A$$

$$\boxed{\text{ÁREA POLIGONO INSCRITO EN } C_2 > A}$$

INSCRIBAMOS EN C_1 UN POLÍGONO REGULAR P_1 SEMEJANTE A P_2. ENTONCES —APLICANDO LA PROPOSICIÓN, CONOCIDA POR EUDOXO, EN LA QUE SE NOS ASEGURA QUE: "LOS POLÍGONOS SEMEJANTES INSCRITOS EN CÍRCULOS SON ENTRE SÍ COMO LOS CUADRADOS DE LOS DIÁMETROS" (EUCLIDES. "ELEMENTOS". LIBRO XII. PROP. 1) — PODEMOS ESCRIBIR:

$$\frac{\text{ÁREA DE } P_1}{\text{ÁREA DE } P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{A_1}{A},$$

DE DONDE RESULTA QUE:

$$\frac{A_1}{\text{ÁREA DE } P_1} = \frac{A}{\text{ÁREA DE } P_2}$$

PERO COMO $A_1 >$ ÁREA DE P_1, ENTONCES $A >$ ÁREA DE P_2.

ESTA ÚLTIMA RELACIÓN VA EN CONTRA DE AQUELLA EN LA QUE SE NOS ASEGURABA QUE: ÁREA DE $P_2 > A$.

EN CONSECUENCIA, NO ES POSIBLE QUE LA RAZÓN ENTRE A_1 Y A_2 SEA MENOR QUE LA RAZÓN ENTRE LOS CUADRADOS DE LOS DIÁMETROS d_1 Y d_2.

DE MODO SIMILAR AL QUE ACABAMOS DE OFRECER, PODRÍA PROBARSE LA IMPOSIBILIDAD DE LA RELACIÓN:

$$\frac{A_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

POR TANTO:

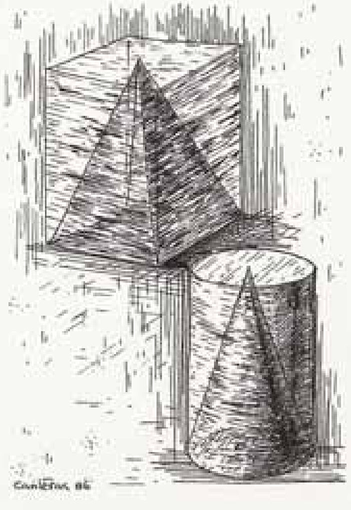
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

QUE ES LO QUE SE QUERÍA DEMOSTRAR.

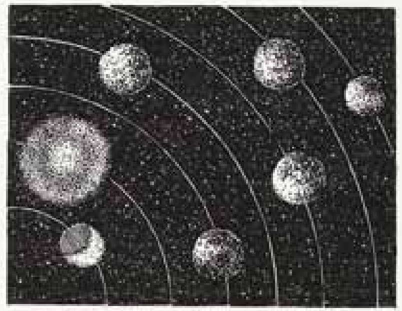
SIGUIENDO EL TESTIMONIO DE ARQUÍMEDES, PARECE SER QUE EUDOXO — UTILIZANDO EL "MÉTODO DE EXHAUCIÓN" — FUE CAPAZ DE DEMOSTRAR LAS DOS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

A) "UNA PIRÁMIDE ES EL TERCIO DE UN PRISMA DE LA MISMA BASE Y DE LA MISMA ALTURA".

B) "UN CONO ES EL TERCIO DE UN CILINDRO DE LA MISMA BASE Y DE LA MISMA ALTURA".



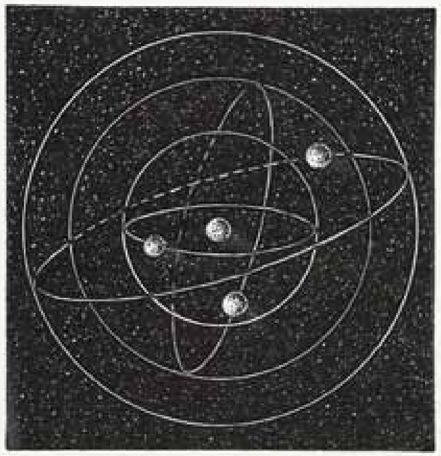
OTRO DE LOS GRANDES LOGROS CONSEGUIDOS POR EUDOXO, ESTA VEZ EN EL CAMPO DE LA ASTRONOMÍA, FUE SU TEORÍA DE LAS "ESFERAS HOMOCÉNTRICAS" EN LA QUE — MEDIANTE HIPÓTESIS PURAMENTE GEOMÉTRICAS — LOGRÓ EXPLICAR LOS MOVIMIENTOS DEL SOL, LA LUNA Y LOS CINCO PLANETAS CONOCIDOS (MERCURIO, VENUS, MARTE, JÚPITER Y SATURNO).



LOS DETALLES DEL SISTEMA ASTRONÓMICO DE EUDOXO FUERON EXPUESTOS POR EL SABIO DE CNIDO EN SU OBRA "SOBRE LAS VELOCIDADES", QUE NO HA LLEGADO HASTA NOSOTROS. SIN EMBARGO, SE DISPONE DE ALGUNA INFORMACIÓN SOBRE EL TEMA EN DOS FRAGMENTOS DE ARISTÓTELES Y SIMPLICIO.

EN SU SISTEMA DE LAS "ESFERAS HOMOCÉNTRICAS", EUDOXO ADOPTÓ LA HIPÓTESIS — QUE PERMANECIÓ INAMOVIBLE HASTA LOS TIEMPOS DE KEPLER — DE QUE EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME BASTABA PARA EXPLICAR LOS MOVIMIENTOS DE LOS SIETE CUERPOS CELESTES.

SIR THOMAS HEATH ("A HISTORY OF GREEK MATHEMATICS". VOL. I, PÁGS. 330-331) HACE UNA DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA "EUDOXIANO" EN LOS SIGUIENTES TÉRMINOS: "CON EUDOXO, ESTE MOVIMIENTO CIRCULAR TOMÓ LA FORMA DE REVOLUCIÓN DE DIFERENTES ESFERAS, CADA UNA DE LAS CUALES GIRABA ALREDEDOR DE UN DIÁMETRO COMO EJE. TODAS LAS ESFERAS ERAN CONCÉNTRICAS — CON CENTRO COMÚN EN EL CENTRO DE LA TIERRA —, DE AQUÍ LA DENOMINACIÓN DE ESFERAS "HOMOCÉNTRICAS" UTILIZADO EN LOS TIEMPOS ANTIGUOS PARA DESCRIBIR EL SISTEMA. LAS ESFERAS ERAN DE TAMAÑOS DIFERENTES, UNA DENTRO DE OTRA. CADA PLANETA SE FIJABA EN UN PUNTO DEL ECUADOR DE LA ESFERA QUE LO TRANSPORTABA Y DICHA ESFERA GIRABA CON MOVIMIENTO UNIFORME ALREDEDOR DEL DIÁMETRO QUE UNÍA SUS POLOS; ES DECIR, EL PLANETA GIRABA UNIFORMEMENTE EN UN CÍRCULO MÁXIMO DE LA ESFERA, PERPENDICULAR AL EJE DE ROTACIÓN. SIN EMBARGO, UN MOVIMIENTO CIRCULAR DE ESTE TIPO NO ERA SUFICIENTE PARA EXPLICAR LOS CAMBIOS EN LA VELOCIDAD APARENTE DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS, SUS ESTACIONES Y SUS RETROGRADACIONES. PARA EVITAR ESTOS PROBLEMAS, EUDOXO TUVO QUE ADMITIR UN NÚMERO MAYOR DE TALES MOVIMIENTOS CIRCULARES — ACTUANDO SOBRE CADA PLANETA — CUYA COMPOSICIÓN PRODUJERA EL MOVIMIENTO APARENTEMENTE IRREGULAR QUE NOS MUESTRA LA OBSERVACIÓN".



"CONSECUENTEMENTE, CONSIDERÓ QUE LOS POLOS DE LA ESFERA QUE TRANSPORTABA EL PLANETA NO ESTABAN FIJOS, SINO QUE SE MOVÍAN EN UNA ESFERA MAYOR, CONCÉNTRICA CON LA ESFERA PORTADORA DEL PLANETA, QUE GIRABA ALREDEDOR DE DOS POLOS DISTINTOS CON VELOCIDAD UNIFORME.

LOS POLOS DE LA SEGUNDA ESFERA ESTABAN — DE FORMA SIMILAR — SITUADOS EN UNA TERCERA ESFERA, CONCÉNTRICA CON LAS DOS ANTERIORES Y MAYOR QUE AQUELLAS, QUE GIRABA ALREDEDOR DE POLOS DIFERENTES A LOS DE LA PRIMERA Y LA SEGUNDA, CON UNA VELOCIDAD DETERMINADA. PARA LOS PLANETAS TODAVÍA SE NECESITABA UNA CUARTA ESFERA DESCRITA, DE FORMA SIMILAR A LAS OTRAS; PARA EL SOL Y LA LUNA, EUDOXO DESCUBRIÓ QUE, ELIGIENDO CONVENIENTEMENTE LAS POSICIONES DE LOS POLOS Y LAS VELOCIDADES DE ROTACIÓN, TRES ESFERAS ERAN SUFICIENTES".