Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

La correspondencia epistolar de Nicolas Bernoulli en relación con la «sex ratio»

por

Gabriel Ruiz-Garzón

Resumen. En la historia de las matemáticas, la obra de Nicolas Bernoulli no se encuentra suficientemente reconocida. Quizás pudiera ser debido a que Nicolas perteneció a una familia que dio otros eminentes matemáticos, como su tío Jacques Bernoulli y su primo Daniel Bernoulli, así como a que su producción científica no se encuentra agrupada, sino dispersa en cientos de cartas, que cruzó con los más importantes científicos de su época. El objeto de este trabajo es mostrar la relevante correspondencia epistolar que mantuvo Nicolas Bernoulli con el físico holandés 's Gravesande y el matemático francés Montmort relacionada con la proporción de niños y niñas nacidos, la *sex ratio*, que se encuentra en el origen de la importante técnica estadística de los contrastes de significación y que también tuvo interesantes connotaciones filosóficas.

1. Los protagonistas de la correspondencia

Nuestro protagonista, Nicolas Bernoulli (1687–1759), forma parte de una de las familias más conocidas de matemáticos, los Bernoulli. Tuvo como tío a Jacques Bernoulli (1654–1705) y como primo a Daniel Bernoulli (1700–1782), ambos eminentes matemáticos de la citada familia.

En 1709, en Basilea, defendió su tesis de doctor en Derecho titulada *De usu artis conjectandi in Jure* (De la aplicación del Cálculo de Probabilidades a materias de jurisprudencia). En cierta manera, su tesis era una continuación del capítulo cuarto de la principal obra de su tío Jacques, el *Ars Conjectandi* (Arte de la Conjetura o Probabilidad) [4], publicada póstumamente a la muerte de Jacques por los herederos de este, en 1713, y de la que Nicolas comentó que era *«demasiado joven e inexperto para completarla»*.

El tercer capítulo de su tesis estaba dedicado al interesante *Problema del Ausente*: ¿cuándo debe considerarse muerta una persona ausente? Según Nicolas, debe ser tomado por muerto cuando haya una apuesta de dos contra uno a que esté muerto más bien que vivo. Supongamos que una persona sale de su país a los 20 años. Conforme a las tablas publicadas en el *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* (Ensayo sobre las probabilidades de la duración de la vida humana) [6], por Antoine Deparcieux (1703–1768), de 814 personas vivas a la edad de 20 años, siguen vivas a la edad de 72 años 271, lo que aproximadamente es la tercera parte de 814; así pues, de los 20 a los 72 años, en esos 52 años, han muerto las dos terceras partes, esto es, al final de los 52 años hay una apuesta de dos contra uno a favor de la muerte frente a la de la vida de un hombre. Luego, en lógica, deben esperarse esos 52 años para que oficialmente sea considerado muerto y los herederos puedan disponer de la herencia. Actualmente, con la vigente legislación española, el número de años que debe esperarse es de 9.

Nicolas estudió la aplicación de la probabilidad a problemas judiciales entre los que sobresalen los repartos de herencias, la condena de una persona en base a la combinación de las probabilidades asignadas a diversas pruebas, la veracidad de los testimonios, el cálculo del valor de las pensiones, seguros marítimos, etc.

En Padua obtuvo su primer trabajo como profesor de Matemáticas, ocupando la cátedra que anteriormente fue de Galileo, para en 1722 regresar a su ciudad natal, Basilea, y acceder a la cátedra de Lógica y de Derecho, llegando a ser rector de su universidad.

Aunque Nicolas llegó a ser miembro de la Academia de Berlín, de la Royal Society de Londres y de la Academia de Bolonia, no publicó mucho. La mayor parte de su producción científica se encuentra esparcida entre las más de medio millar de cartas que intercambió con otros científicos. En este trabajo nos centraremos concretamente en la relación epistolar que mantuvo con 's Gravesande y Montmort.

Nuestro segundo protagonista, Willem Jacob 's Gravesande (1688–1742), fue un físico y matemático holandés. Como físico introdujo la teoría newtoniana en el continente europeo y modernizó la enseñanza de la Física, comenzando las demostraciones prácticas de experimentos dentro de las clases que, como catedrático de Astronomía, Física, Matemáticas y Lógica, impartía en la universidad holandesa de Leiden. Al contrario que filósofos como Descartes o Spinoza, que sólo pregonaban la utilidad del *«método geométrico»* (las Matemáticas) para alcanzar el verdadero conocimiento, haciendo innecesaria la figura de Dios para explicar las leyes de la Naturaleza, 's Gravesande defendía la utilidad conjunta de las Matemáticas y la Física que utilizaba Newton para demostrar la necesidad de Dios. Para 's Gravesande, cuando la observación se une con las Matemáticas, la sabiduría de Dios aparece ante nuestros ojos.

Durante su etapa de estudiante de Derecho en Leiden escribió su primer tratado de Matemáticas, *Essai de Perspective* (Ensayo de Perspectiva), elogiado por Jean Bernoulli. 's Gravesande hizo de intermediario entre el rector de la Universidad de Leiden y Jean Bernoulli, transmitiéndole el interés de la universidad holandesa por contar con él como profesor. Jean rechazó la oferta de la universidad holandesa debido al bajo salario que se le ofertó. Willem, a lo largo de estos años, se había logrado forjar fama de buen matemático. En diciembre de 1715, Nicolas Bernoulli alabaría un teorema sobre logaritmos que 's Gravesande le había hecho llegar.

En 1774 se publicó póstumamente un volumen con sus *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques de Mr. G. J. 's Gravesande* (Obras filosóficas y matemáticas de Mr. G. J. 's Gravesande) [8], labor llevada a cabo por su biógrafo Allamand. En esta obra hay unos capítulos dedicados al Cálculo de Probabilidades, donde aparece la definición clásica de probabilidad, la de la unión de sucesos disjuntos o la de la intersección de sucesos independientes como producto de probabilidades. Uno de los capítulos que la conforma lleva por título *Démostration mathématique de la direction de la Providence Divine* (Demostración matemática de la dirección de la Providencia Divina). En él, 's Gravesande trata de demostrar matemáticamente que Dios dirige lo que sucede en este mundo a raíz de la observación de la regularidad del número de niños y niñas que nacen diariamente. Este será el tema epistolar del que nos ocuparemos en este trabajo.

Nuestro tercer protagonista es Pierre Rémond de Montmort (1678–1719). A los 21 años, renunció a ser canónigo de Notre-Dame para casarse y gestionar la herencia de sus padres. Viajó por diversos países europeos y en su mansión recibió a los mejores matemáticos de su época, entre los que se encontró Nicolas Bernoulli. Fue miembro de la Royal Society de Londres y de la Academia de Ciencias de París. Murió el 7 de octubre de 1719 a la edad de 40 años de una infección de viruela que contrajo en una de sus visitas a París.

En 1708 apareció la primera edición del *Essai d'analyse sur les jeux de hazard* (Ensayo de análisis sobre los juegos de azar) [14], donde Montmort analiza distintos juegos de cartas y dados. Será en la segunda edición de esa obra fechada en 1713, donde incluya la correspondencia que mantuvo con Nicolas y Jean Bernoulli, quizás para dar un aspecto más científico a su obra, no olvidemos que Montmort no tenía el prestigio científico de los Bernoulli. El éxito que obtuvo Montmort con este manual fue inmenso, incluso superior al que tuvo el *Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli, y que apareció simultáneamente con la segunda edición del texto de Montmort. Montmort pensaba que el Cálculo de Probabilidades podría servir

> para regular los juicios y la conducta de los hombres en la práctica de las cosas de la vida.

El causante de la relación epistolar entre los anteriores hombres de ciencia es John Arbuthnot (1667–1714). Este fue un médico escocés de gran renombre, llegando a serlo de la reina Ana de Inglaterra. Entre sus amigos figuraron músicos como Händel o escritores como Jonathan Swift, autor de *Los viajes de Gulliver*. Tras la muerte de su padre en 1691, Arbuthnot se trasladó a vivir desde Escocia a Inglaterra, donde dio clases de matemáticas para sobrevivir. Ha pasado a la historia de las Matemáticas porque tradujo y comentó, en 1692, el tratado de Christian Huygens *Ratiociniis in Ludo Aleae* (Razonamientos sobre juegos de azar) (1657) [12]. Lo vendió, bajo el título *Of the Laws of Chance* (De las leyes del azar), como un manual para jugadores y no como un libro de Matemáticas, lo que le reportó grandes beneficios. También es autor de un artículo en 1710, publicado en la *Philosophical Transactions*, titulado *An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes* (Un argumento a favor de la Divina Providencia, tomado de la regularidad constante observada en los nacimientos de ambos sexos) [1], relacionado con la proporción de nacimientos de niños y niñas, lo que técnicamente se conoce como *sex ratio*. Arbuthnot se mostraba asombrado con los datos de la *sex ratio* obtenidos de Londres de 1629 hasta 1710 (ver figura 1), donde año a año y durante todos ellos, siempre el número de bautizados (nacidos) varones superaba al de niñas.

Ya en 1662 John Graunt había publicado su *Natural and Political Observations* (Observaciones naturales y políticas) [9], en el que se incluía una tabla sobre el número de bautizados cada año en Londres, entre 1629 y 1662, diferenciados por sexos. La usó como aproximación al número de niños y niñas nacidos cada año en esa ciudad, que Graunt pensaba se encontraba en una relación de 14 hombres por cada 13 mujeres. En el capítulo VIII, titulado *Sobre la diferencia entre hombres y mujeres*, Graunt escribió que en Londres había más hombres que mujeres y, para respaldar esta hipótesis, el autor introdujo diferentes argumentos, algunos de ellos apoyados por la tabla que más tarde ampliaría Arbuthnot hasta el año 1710, sin citar su procedencia. La tabla la construyó Graunt a partir de los boletines semanales que publicaban las parroquias de Londres y suponiendo que el número de bautizos de cada año era una buena estimación del número de nacimientos, lo cual no siempre fue así a lo largo de los años analizados, como se puede ver en Camúñez y Basulto [5] en el período 1639–1648, debido a la disensión religiosa que se produjo.

Arbuthnot consideró cada nacimiento equiparable al lanzamiento de una moneda o un dado con sólo dos caras, una de las caras marcada como V = varón y otra W = niña. Si consideramos n nacimientos, es decir, n lanzamientos de la moneda, al desarrollar el binomio $(V+W)^n$, sus coeficientes binomiales nos dan el número de casos favorables conteniendo k varones y $n-k$ niñas. Y, por tanto, si denotamos por x la variable que nos da el número de varones de n nacimientos, el coeficiente de V^kW^{n-k} dividido por 2^n es la probabilidad de obtener k varones y $n-k$ niñas, o sea,

$$p[x=k] = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

El término intermedio, es decir, la probabilidad de obtener $n/2$ varones es

$$p\left[x=\frac{n}{2}\right] = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{2^n\big((n/2)!\big)^2}.$$

Utilizando la mal llamada fórmula de Stirling $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, ya que su invención se debe a Abraham de Moivre (1667–1754) que la utilizó para aproximar la distribución binomial mediante la normal, se puede demostrar que la anterior probabilidad tiende a cero cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n\big((n/2)!\big)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

A medida que crece el número de lanzamientos, los coeficientes de cualquier término se hacen más pequeños y, por tanto, al tirar un número grande de veces la moneda, la probabilidad de obtener un número igual de varones que de niñas es muy pequeña. En palabras de Arbuthnot [1]:

394 *Lettre de M. Bernoulli à M. de M ...*

Catalogue des Enfans mâles & femelles nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710.

	mâles.	*femell.*		*mâles.*	*femell.*
1629	5218	4683	1670	6278	5719
30	4858	4457	71	6449	6061
31	4422	4102	72	6443	6120
32	4994	4590	73	6073	5822
33	5158	4839	74	6113	5738
34	5035	4820	75	6058	5717
35	5106	4928	76	6552	5847
36	4917	4605	77	6423	6203
37	4703	4457	78	6568	6033
38	5359	4952	79	6247	6041
39	5366	4784	80	6548	6299
40	5518	5332	81	6822	6533
41	5470	5200	82	6909	6744
42	5460	4910	83	7577	7158
43	4793	4617	84	7575	7127
44	4107	3997	85	7484	7246
45	4047	3919	86	7575	7119
46	3768	3395	87	7737	7114
47	3796	3536	88	7487	7101
48	3363	3181	89	7604	7167
49	3079	2746	90	7909	7302
50	2890	2722	91	7662	7392
51	3231	2840	92	7602	7316
52	3220	2908	93	7676	7483
53	3196	2959	94	6985	6647
54	3441	3179	95	7263	6713
55	3655	3349	96	7632	7229
56	3668	3382	97	8062	7767
57	3396	3289	98	8426	7626
58	3157	3013	99	7911	7452
59	3209	2781	1700	7578	7061
60	3724	3247	1	8102	7514
61	4748	4107	2	8031	7656
62	5216	4803	3	7765	7683
63	5411	4881	4	6113	5738
64	6041	5681	5	8366	7779
65	5114	4858	6	7952	7417
66	4678	4319	7	8379	7687
67	5616	5322	8	8239	7623
68	6073	5560	9	7840	7380
69	6506	5829	10	7640	7288

Figura 1: Número de bautizados de Londres, 1629–1710.

> En el vasto número de los mortales, habría una pequeña parte de todas las alternativas posibles, de que ocurriese, en cualquier momento dado, que hubiesen nacido un número igual de niños que de niñas.

Luego la primera conclusión que obtuvo Arbuthnot era que es poco probable que se dé la igualdad de nacimientos de niños y niñas. Y continúa afirmando, aunque erróneamente, que todavía será más improbable que se dé un exceso de niños o niñas. Y que debe existir una fuerza divina y sabia, más allá del puro azar, para que cada año el número de niños nacidos supere al de niñas, debido a que los varones son más proclives a peligros y a fallecer a causa de las guerras y los viajes.

Arbuthnot realizó un segundo cálculo ligado al germen de los contrastes de significación y a probar la existencia de una divina providencia. Supongamos que queremos contrastar la hipótesis nula de que la probabilidad de nacer niño o niña fuera la misma, es decir, que es el azar el que rige el sexo en el nacimiento, contra que no es así, sino que es Dios el regidor de tal hecho provocando un mayor nacimiento de varones. En notación matemática se trataría de contrastar la siguiente hipótesis estadística: $H_0 : p = 1/2$ contra $H_1 : p > 1/2$.

Si llamamos y a la variable que nos da el número de niñas de n nacimientos, la probabilidad de que se den más niños que niñas a lo largo de 82 años, bajo la hipótesis nula, es

$$p\,[x > y \mid H_0] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{82} \simeq 2.07 \times 10^{-25}.$$

El hecho de que esta probabilidad sea infinitesimal y que la preponderancia en el nacimiento de varones ocurra «durante años y años y no sólo en Londres, sino en todo el mundo», según Arbuthnot [1], hace que rechazara la hipótesis nula de que la probabilidad de nacer varón o niña fuera la misma, que descartara que fuera el azar el culpable de tal regularidad y que echara mano de la intervención divina para explicar que nazcan más varones que niñas.

El problema de la *sex ratio* ha sido tratado en grandes obras generalistas ligadas a la historia de las Matemáticas, como podemos ver en [10], [11], [15] o en [17], y en otras más específicas ligadas a la figura de Arbuthnot (ver [2], [7], [16]).

Nicolas Bernoulli se encontró con 's Gravesande en 1712 en un viaje que hizo por Holanda, Inglaterra y Francia. Nicolas discutió con 's Gravesande el problema de Arbuthnot y escribió una serie de cartas sobre ese tema de las que sólo nos han llegado tres, fechadas el 30 de septiembre, 9 de noviembre y 30 de diciembre de 1712, que se publicaron póstumamente en 1774 dentro de las *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques de Mr. G. J. 's Gravesande* [8] y que trataremos en la sección 2 de este artículo. Nicolas también comentaría el problema de Arbuthnot con Pierre Rémond de Montmort (1678–1719), noble francés y matemático, en dos cartas fechadas el 11 de octubre de 1712 y el 23 de enero de 1713, publicadas en su *Essay* [14] por Montmort.

En la sección 3 nos ocuparemos de la relación epistolar de Nicolas Bernoulli con Montmort y acabaremos con unas conclusiones, siendo el objetivo principal del artículo el profundizar en la relación epistolar que dio lugar al nacimiento de los contrastes de hipótesis.

2. La correspondencia de Nicolas con ’s Gravesande

2.1. Primera carta de Bernoulli a ’s Gravesande

Estando Nicolas en Londres le comentó a ’s Gravesande, en una carta fechada el 30 de septiembre de 1712, que había mantenido diversas conversaciones sobre el problema de Arbuthnot con dos miembros de la Royal Society de apellidos Mr. Craig y Mr. Burnet:

> Les he demostrado que en un gran número de tiradas de monedas (cara y cruz) hay una gran probabilidad de que la mitad caigan cara y la mitad cruz y que, por tanto, no debería considerarse un milagro que cada año hubiera igual número de nacimientos de niños que de niñas, más bien al contrario, debería ser un milagro que tal hecho no sucediese. El error de Mr. Arbuthnot consiste en que toma esta igualdad demasiado precisa, en su catálogo de 82 años no ha observado que, si los límites son amplios, existe entonces una probabilidad muy alta de que el número de niños y niñas caiga entre esos límites más que fuera de ellos.

Otro matemático escocés, John Craig, en 1699 publicó un tratado titulado *Theologiae Christianae Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Teología Cristiana), donde expuso una fórmula para conocer la credibilidad de un hecho histórico. Para Craig, la fiabilidad de un testimonio decrece con el número de testigos, el tiempo transcurrido desde que ocurrió el hecho hasta que el testigo dio fe de él y la distancia desde que el hecho sucedió hasta el momento en que es investigado. Y se atrevió a dar una fórmula para la «probabilidad» de dicha fiabilidad:

$$P = x + (m-1)s + \frac{kT^2}{t^2} + \frac{qD^2}{d^2},$$

donde x es la probabilidad de la fiabilidad del primer testigo del hecho, m el número de testigos en la cadena, s es la duda creada en cada transmisión del hecho, t es el tiempo transcurrido entre cada transmisión, d la distancia al hecho, y k, T, q y D son constantes. Craig afirmaba, utilizando esta fórmula, que 1454 años después de escribir su libro, todos los testimonios escritos sobre la vida de Cristo habrían desaparecido en términos de credibilidad, es decir, P se anularía.

Tras esta primera carta de Nicolas, ’s Gravesande le remite otra en la que defiende a Arbuthnot, misiva que no se ha conservado, pero sí la contestación de Nicolas Bernoulli que veremos a continuación.

2.2. Segunda carta de Bernoulli a ’s Gravesande

En ella, fechada el 9 de noviembre de 1712, Nicolas le expresa a ’s Gravesande:

> Yo le ruego, Señor, que reflexione un poco más sobre esto, estoy convencido de que se dará cuenta de que también usted está equivocado. Usted no ha considerado dos puntos: 1.º Que no es una moneda la que se tira 82 veces al aire, sino muchas más, por ejemplo, 1000. 2.º Que de estas

> 1000 monedas, tiradas 82 veces al aire, casi siempre hay la mitad que caen sobre una cara y la mitad sobre la otra, pero que no es necesario que, si la primera sale por ejemplo cruz, también la segunda sea cruz, puede salir cara y, si antes había salido cara, puede salir esta vez cruz, y así pueden variar de diversas maneras. Le envío una copia de la demostración que le he dado a Mr. Burnet, espero que ella le aclare y le convenza enteramente.

La demostración, adjuntada en la carta del 9 de noviembre, en notación actual quedaría de la siguiente forma. Consideremos n pruebas independientes, cada prueba con $r+s$ resultados de los que r son favorables. Tomemos como p la probabilidad de éxito, es decir, la probabilidad del nacimiento de un varón, luego $p = r/(r+s)$. Supongamos que el número esperado de varones es igual al producto del número de éxitos r por una constante k, es decir, $np = kr$, y por último tomemos el número de éxitos como s_n y su frecuencia relativa como $h_n = s_n/n$.

Jacques Bernoulli había demostrado que, para algún n suficientemente grande, la frecuencia relativa h_n convergía a p en probabilidad. O sea, que cuando el número de pruebas es suficientemente grande, la frecuencia relativa se podía tomar como probabilidad del suceso, lo que expresado matemáticamente quedaría como

$$p\left[|h_n - p| \leq \varepsilon\right] > 1 - \delta,$$

y que Poisson llamaría *ley de los grandes números.*

Nicolas demostró posteriormente un teorema que llevará su nombre y que es una mejora del teorema de Jacques Bernoulli. Dicho teorema afirma que si denotamos por P_d la probabilidad de que la frecuencia relativa diste del número esperado menos de d unidades, o sea, $P_d = p\left[|s_n - kr| \leq d\right]$, y por f_i los sumandos de los términos del desarrollo del binomio de Newton

$$(r+s)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} r^x s^{n-s} = \sum_{i=-kr}^{i=ks} f_i,$$

entonces, para cualquier $d > 0$, se verifica que las apuestas a favor del tal suceso son

$$\frac{P_d}{1 - P_d} > \text{mín}\left(\frac{f_0}{f_d}, \frac{f_0}{f_{-d}}\right) - 1.$$

O, expresado de otra manera, que la probabilidad satisface

$$P_d = p\left[|s_n - kr| \leq d\right] > 1 - \text{máx}\left(\frac{f_d}{f_0}, \frac{f_{-d}}{f_0}\right).$$

Es decir, Nicolas obtuvo una cota inferior de P_d. Y aún hizo más, ya que, para valores grandes de n, obtuvo una aproximación a dicha cota inferior a partir de aproximar el cociente

$$\frac{f_0}{f_d} \simeq \left(\frac{kr+d}{ks-d+1} \cdot \frac{kr+1}{kr} \cdot \frac{ks}{kr}\right)^{\frac{d}{2}},$$

y donde f_0/f_{-d} se obtiene intercambiando los papeles de r y s en la ecuación anterior.

La intención de Nicolas fue comparar la distribución de los datos de nacimientos de los 82 años observados con una distribución binomial y explicar la variación obtenida en esos años con ese modelo binomial, aplicando el teorema anterior.

Nicolas, en su carta de 9 de noviembre a Barnet, le adjuntó a 's Gravesande copia de su demostración, que consistía en:

1. Suponiendo un número constante de nacimientos de $n = 14000$, Nicolas calculó el número de varones nacidos escalados a esos 14000, es decir, $x_i = 14000h_i$, donde h_i es la frecuencia relativa de varones el año i. Nicolas cambió la suposición de Arbuthnot de $p = 1/2$ por la probabilidad más verosímil que cifra en $p = 0.5169$, en función de que la frecuencia relativa de nacimientos de varones para el total del período estudiado era de $h = \frac{484382}{938223} \simeq 0.5163$.
   Con lo que teníamos una binomial $B(14000; 0.5169)$ y el número esperado de nacimientos masculinos es de $14000 \times 0.5169 \simeq 7237$. Y si en 1703 nacieron 7765 niños y 7683 niñas, con 14000 nacimientos tendríamos un valor $x_{\text{mín}} = 14000 \times \frac{7765}{15448} \simeq 14000 \times 0.5026 \simeq 7037$ varones, lo que supone 200 varones menos que el valor esperado 7237.
2. Calculó la probabilidad de que este nuevo número de bautizados en cualquier año no difiera en más de $d = 7237 - 7037 = 200$ del valor esperado de varones nacidos $M = 7237$, es decir,
   $$P_d = p\left[|x - M| \leq d\right] = p\left[|x - 7237| \leq 200\right] = p\left[7037 \leq x \leq 7437\right].$$
   Las apuestas a favor del mismo son, por el teorema de Bernoulli,
   $$\frac{P_d}{1 - P_d} > \text{mín}\left(\frac{f_0}{f_d}, \frac{f_0}{f_{-d}}\right) - 1,$$
   donde
   $$\log \frac{f_0}{f_d} \simeq \frac{n}{2} \log\left(\frac{M + d}{F - d + 1} \cdot \frac{M + 1}{M} \cdot \frac{F}{M}\right),$$
   que en nuestro caso queda
   $$\log \frac{f_0}{f_d} \simeq 100 \log\left(\frac{7437}{6564} \cdot \frac{7238}{7237} \cdot \frac{6763}{7237}\right) \simeq 2.4870.$$
   Y
   $$\log \frac{f_0}{f_{-d}} \simeq \frac{n}{2} \log\left(\frac{F + d}{M - d + 1} \cdot \frac{F + 1}{F} \cdot \frac{M}{F}\right),$$
   que en nuestro caso queda
   $$\log \frac{f_0}{f_{-d}} \simeq 100 \log\left(\frac{6963}{7038} \cdot \frac{6764}{6763} \cdot \frac{7237}{6763}\right) \simeq 2.4830.$$
   Luego $\frac{f_0}{f_d} \simeq 306.9$ y $\frac{f_0}{f_{-d}} \simeq 304$ y, por tanto, las apuestas a favor serían
   $$\frac{P_d}{1 - P_d} > \text{mín}\,(306.9, 304) - 1 = 303,$$

con lo que la probabilidad requerida es

$$P_d = p\,[|x-M| \le d] = p\,[|x-7237| \le 200] = p\,[7037 \le x \le 7437] > \frac{303}{304}.$$

3. La probabilidad anterior es muy alta, pero se corresponde con un solo año. Con lo que la probabilidad de que el número de nacidos varones esté entre 7037 y 7437 en 100 años consecutivos es mayor que

$$(P_d)^{100} > \left(\frac{303}{304}\right)^{100} \simeq \frac{1000}{1389} \simeq 0.7199.$$

Este dato le sirvió a Nicolas para afirmar que la variación en el número de nacimientos podía ser explicada por una distribución binomial sin más que encontrar la probabilidad correcta de nacer varón. El modelo le sirvió porque la mayoría de las observaciones caen dentro de los límites establecidos con una alta probabilidad, salvo cuatro observaciones mayores de 7437, sobre las que no dice nada. Nicolas Bernoulli rechazó, por tanto, la primera de la hipótesis de Arbuthnot de que era poco probable que el número de niños nacidos fuera similar al de niñas.

2.3. Carta de 's Gravesande a Nicolas Bernoulli

Pero Bernoulli no logró convencer a Willem 's Gravesande. Este le respondió a Nicolas, en una carta reproducida en sus *Oeuvres* [8], que Arbuthnot no intentaba demostrar que Dios contradecía las leyes de la naturaleza y que Él mismo había creado, sino que sólo intentaba probar que p era mayor que $1/2$ y el hecho de que Nicolas obtuviera que $p = \frac{7237}{14000} \neq \frac{1}{2}$ reforzaba la idea de Arbuthnot de que Dios gobernaba los nacimientos de las personas. 's Gravesande le comunicó a Nicolas Bernouli que había resuelto el problema de la *sex ratio* trasladándolo a un ambiente aleatorio:

> A apuesta contra B que entre 11429 monedas, arrojadas al mismo tiempo, el número de las que caigan cara no será más de 6128 y no menos de 5745, sino que estará entre ambos números. Pregunto la suerte de A y de B.
>
> Yo he hecho el cálculo y he encontrado que si la suerte de A es 1, la suerte de B es expresada por un número de 44 cifras, lo que hace ver claramente que si el mundo es conducido por el azar, hay un número de 44 cifras contra 1, que lo que ha ocurrido no debe ocurrir, de lo que se debe concluir que es un Ser Inteligente quien ha dirigido el nacimiento de los niños y no un azar ciego.

Veamos cómo llegó a ese número de 44 cifras:

1. Ya que el número de nacidos varía año a año, supuso que el número anual de nacidos (igual que el de bautizados) era constante e igual al número medio de nacidos a lo largo de esos 82 años, es decir, $938223/82 \simeq 11442$ (por un error, 's Gravesande toma 11429).

2. Seguidamente, calculó el número relativo de nacimientos de varones que variaba entre el valor $7765/15448 \simeq 0.5027$ del año 1703 y $4748/8855 \simeq 0.5362$ del año 1661, y obtuvo un nuevo número de varones nacidos mínimo y máximo, escalados al número medio de 11429 nacidos: $x_{\text{mín}} = 11429 \times 0.5027 \simeq 5745$ y $x_{\text{máx}} = 11429 \times 0.5362 \simeq 6128$.
3. Luego, para una binomial $B(11429; 0.5)$ sumó los 384 términos del intervalo en cuestión y calculó, por recursión, la probabilidad de que el número de varones en un año estuviera entre 5745 y 6128:

$$p\left[5745 \leq x \leq 6128 \;\middle|\; p = \frac{1}{2}\right] \simeq \frac{3849150}{13196800} = \frac{1}{1 + 2\frac{32987}{76983}} \simeq 0.2917,$$

donde $2\frac{32987}{76983}$ es un número mixto aproximadamente igual a 2.4284. La probabilidad anterior la extendió sólo hasta 6128 y no hasta 11429, que sería lo lógico, pero no importaba ya que la probabilidad a partir de 6128 es despreciable. Para calcular la expresión anterior se dio cuenta de que, si se mantenía la hipótesis nula $p = 1/2$, todos los sumandos contenían el factor $\left(\frac{1}{2}\right)^{11429}$ y, por tanto, el valor de la probabilidad sólo dependía de los coeficientes binomiales, que calculó por recursión a través de

$$\binom{n}{x+1} = \binom{n}{x}\frac{n-x}{x+1}.$$

4. Luego la probabilidad de observar el anterior suceso a lo largo de los 82 años, es decir, que el número de varones nacidos estuviera entre esos límites, era de

$$\left(\frac{1}{1 + 2\frac{32987}{76983}}\right)^{82} \simeq 1.32 \times 10^{-44}.$$

’s Gravesande fue capaz de calcular el denominador de la anterior fracción con las 44 cifras decimales mencionadas anteriormente:

$$\left(1 + 2\frac{32987}{76983}\right)^{82} \simeq 75598215229552469135802469135802469135802469$$

(realmente, y aunque no tiene importancia práctica, sólo los siete primeros dígitos de esta expresión son correctos).

Vemos cómo la probabilidad final obtenida por ’s Gravesande, 1.32×10^{-44}, es distinta y más pequeña que la que obtuvo Arbuthnot, 2.07×10^{-25}. Aunque ambas probabilidades involucran sucesos diferentes, los dos autores consideraban, por extensión y de una manera general, que dichas probabilidades avalaban el hecho de que en esos 82 años el número de niños superara al número de niñas y que era la providencia divina, y no el azar, la que se encontraba detrás.

La probabilidad tan pequeña encontrada por ’s Gravesande le llevaba a rechazar que $p = 1/2$ en la carta enviada a Nicolas Bernoulli:

> Pero este Ser Inteligente ha podido producir este efecto extraordinario de dos maneras: o para una dirección particular por la que Dios actuaría contra las leyes establecidas por Él mismo, lo que sería un verdadero milagro; o bien estableciendo desde los comienzos una ley, por la cual los nacimientos de niños sean más probables que los de las niñas. Este último medio es del que Dios se sirve según Mr. Arbuthnot. Usted hace ver que, suponiendo la existencia de Dios, el nacimiento de los niños podía llegar naturalmente; es decir, siguiendo esa ley que ese Ser ha establecido. Mr. Arbuthnot sostiene lo contrario, que si el azar conduce el mundo, los nacimientos no pueden llegar naturalmente y, por consecuencia, esa suposición es falsa.

Es decir, 's Gravesande se reafirmaba ante Nicolas en la tesis de Arbuthnot de que era Dios quien regulaba tal hecho y no la naturaleza.

2.4. Tercera carta de Bernoulli a 's Gravesande

Bernoulli le replica en una carta fechada el 30 de diciembre de 1712 a 's Gravesande en los siguientes términos:

> Yo estoy de acuerdo en todo lo que usted me dice y siempre he tenido el mismo sentimiento. Creo, por tanto, que usted ha tomado este argumento en otro sentido al que lo ha tomado Mr. Arbuthnot, al menos de lo que se infiere en el artículo de la *Philosophical Transactions*. El argumento de Mr. Arbuthnot tiene dos partes. 1.º Suponiendo una igualdad entre nacimientos de niños y niñas, hay una probabilidad pequeña de que el número de niños y niñas pueda ser encontrado dentro de unos límites cercanos a la igualdad. 2.º Hay una probabilidad pequeña de que el número de niños excedería un gran número de veces al número de niñas. Es el primer argumento el que yo refuto, no el segundo.

Luego tanto 's Gravesande como Bernoulli apoyaban que, bajo la hipótesis nula de igualdad de nacimientos de niños y niñas, era poco probable que el número de niños superara al de niñas tantas veces consecutivas, es decir, la segunda afirmación de Arbuthnot. Pero discrepaban en la causa a la que atribuir tal anomalía y en el valor que alcanzaba la probabilidad de que el número de niños y niñas pudiera ser encontrado dentro de unos límites cercanos a la igualdad.

3. La correspondencia de Nicolas con Montmort

A la par que Nicolas se carteaba con 's Gravesande, también lo hacía con Pierre Rémond de Montmort sobre el mismo tema.

3.1. Primera carta de Bernoulli a Montmort

En esta carta fechada el 11 de octubre de 1712, Bernoulli simplemente le expuso a Montmort los resultados, sin demostraciones, que consiguió sobre el problema de

Arbuthnot:

> He examinado el catálogo de niños nacidos en Londres desde 1629 hasta 1710 inclusive, donde hay más niños que niñas y, tomando como media la razón de niños a niñas cerca de 18 a 17, un poco más grande, yo concluyo que la probabilidad de nacer niño es a la de nacer niña como 18 es a 17, y así entre 14000 niños, que es un número bastante cercano al número de niños nacidos por año en Londres, tendríamos 7200 varones y 6800 niñas. El año en que es más grande el número de varones respecto al de las niñas, es el año 1661, en el que nacieron 4748 varones y 4107 niñas, y el año donde se tiene el menor número de varones respecto de niñas, es el año 1703, en el que nacieron 7765 varones y 7683 niñas. Afirmo que si los límites son grandes, se puede apostar al menos más de 300 contra 1 que de 14000 niños el número de varones y niñas caerán más bien dentro de esos límites que fuera.

3.2. Segunda carta de Bernoulli a Montmort

Será en la carta de 23 de enero de 1713 donde Nicolas explicaría a Montmort los detalles de la demostración de los resultados expuestos en la carta anterior:

1. Nicolas cambió la suposición de Arbuthnot de $p = 1/2$ por la más verosímil de $p = \frac{18}{35} \simeq 0.5143$, con lo que tendríamos una $B(14000; 0.5143)$, el número esperado de nacimientos masculinos es de $14000 \times \frac{18}{35} = 7200$, con un valor

$$x_{\text{mín}} = 14000 \times \frac{7765}{15448} \simeq 14000 \times 0.5026 \simeq 7037$$

varones en el año 1703, lo que supone 163 varones menos que el valor esperado de 7200; y el

$$x_{\text{máx}} = 14000 \times \frac{4748}{8855} \simeq 14000 \times 0.5362 \simeq 7507$$

en el año 1661, lo que supone 307 más que 7200.

2. Seguidamente calculó la probabilidad de que el número de bautizados vueltos a escalar en cualquier año no difiera en más de $d = 163$ varones del valor esperado $M = kr = 7200$,

$$P_d = p\left[|x - M| \leq d\right] = p\left[|x - 7200| \leq 163\right] = p\left[7037 \leq x \leq 7363\right],$$

siendo $F = ks = 6800$ y $k = \frac{n}{r+s} = \frac{14000}{35} = 400$.
Nicolas calculó

$$\log \frac{f_0}{f_d} \simeq \frac{n}{2} \log\left(\frac{M+d}{F-d+1} \cdot \frac{M+1}{M} \cdot \frac{F}{M}\right),$$

que en nuestro caso queda

$$\log \frac{f_0}{f_d} \simeq \frac{163}{2} \log\left(\frac{7363}{6638} \cdot \frac{7201}{7200} \cdot \frac{6800}{7200}\right) \simeq 1.6507.$$

Y
$$\log \frac{f_0}{f_{-d}} \simeq \frac{n}{2} \log \left(\frac{F+d}{M-d+1} \cdot \frac{F+1}{F} \cdot \frac{M}{F} \right),$$
que en nuestro caso queda
$$\log \frac{f_0}{f_{-d}} \simeq \frac{163}{2} \log \left(\frac{6963}{7038} \cdot \frac{6801}{6800} \cdot \frac{7200}{6800} \right) \simeq 1.6491.$$

Luego $\frac{f_0}{f_d} \simeq 44.74$ y $\frac{f_0}{f_{-d}} \simeq 44.58$ y, por tanto, la probabilidad de que una observación caiga dentro de un intervalo que cubra la mayor parte de la distribución observada es
$$p\,[7037 \leq x \leq 7363] > 1 - \text{máx}\left(\frac{f_d}{f_0}, \frac{f_{-d}}{f_0} \right) \simeq 1 - \text{máx}\left(\frac{1}{44.74}, \frac{1}{44.58} \right) \simeq 0.9776.$$

Como podemos ver en el cuadro 1, fuera de ese intervalo [7037,7363], quedan 11 observaciones más grandes que el límite superior del intervalo, pero Nicolas Bernoulli obtuvo que la probabilidad de encontrar a lo sumo 10 de esos valores por encima del extremo superior del intervalo, en esos 82 datos, con $p = 1 - P_d = 1 - 0.9976 = 0.0224$, es decir, con una $B(82; 0.0224)$, es de
$$p[y \leq 10] > \frac{226}{227} \simeq 0.9956,$$
es decir, es un hecho muy probable.

Todo lo cual le llevará a comentar a Nicolas Bernoulli, en su carta de 23 de enero de 1713, lo siguiente:

> Hay una gran probabilidad de que el número de niños y niñas caigan dentro de esos límites, que son muy cercanos a los observados.

Nicolas Bernoulli obviaba la intervención divina en la regularidad de la *sex ratio* y solucionaba el problema propugnando:

> Arrójense 14000 dados, cada uno de 35 caras, 18 blancas y 17 negras, y las posibilidades serán muy grandes, ciertamente, de que el número de caras negras y blancas se aproximen tanto o más entre sí, que el número de niños y niñas en los registros.

Luego la regularidad de la *sex ratio* puede ser explicada por una binomial con una probabilidad de nacer varón de $p = 18/35$. Este es el primer ejemplo de ajuste a los datos de una binomial. La verdad es que los cálculos efectuados por Bernoulli le tendrían que haber llevado a rechazar la estimación de p, entre otras cosas porque el número esperado de observaciones fuera de los límites del intervalo tendría que ser como mucho de $82 \times 0.0224 \simeq 1.8 \simeq 2$ observaciones y, por tanto, la probabilidad de que excedan 11 es muy pequeña.

Nicolas Bernoulli mantuvo correspondencia sobre este problema con 's Gravesande y con Montmort. No hay constancia de lo que opinaba Montmort del tema al

Año	M	F	Año	M	F	Año	M	F
1629	**7378**	6622	1657	7112	6888	1685	7113	6887
1630	7301	6699	1658	7163	6837	1686	7217	6783
1631	7263	6737	1659	**7500**	6500	1687	7245	6755
1632	7295	6705	1660	**7479**	6521	1688	7185	6815
1633	7223	6777	1661	**7507**	6493	1689	7207	6793
1634	7153	6847	1662	7289	6711	1690	7279	6721
1635	7124	6876	1663	7360	6640	1691	7126	6874
1636	7229	6721	1664	7215	6785	1692	7134	6866
1637	7188	6812	1665	7180	6220	1693	7089	6911
1638	7276	6724	1666	7279	6721	1694	7174	6826
1639	**7401**	6599	1667	7188	6812	1695	7275	6725
1640	7120	6880	1668	7309	6691	1696	7190	6810
1641	7177	6823	1669	**7384**	6616	1697	7130	6870
1642	**7371**	6629	1670	7326	6674	1698	7349	6651
1643	7131	6869	1671	7217	6783	1699	7209	6791
1644	7095	6905	1672	7180	6820	1700	7240	6753
1645	7112	6888	1673	7148	6852	1701	7264	6736
1646	**7365**	6635	1674	7222	6778	1702	7167	6833
1647	7248	6752	1675	7203	6797	1703	7037	6963
1648	7195	6805	1676	**7398**	6602	1704	7222	6778
1649	**7400**	6600	1677	7122	6878	1705	7255	6745
1650	7210	6790	1678	7297	6703	1706	7244	6756
1651	**7451**	6549	1679	7117	6883	1707	7302	6698
1652	7356	6644	1680	7136	6864	1708	7272	6728
1653	7270	6730	1681	7151	6849	1709	7212	6788
1654	7277	6732	1682	7085	6915	1710	7165	6835
1655	7306	6694	1683	7199	6801			
1656	7284	6716	1684	7213	6783			

Cuadro 1: Número de bautizados de Londres, 1629–1710 (ajustados a $n = 14000$).

no conservarse las cartas. En cualquier caso, destacar el contenido de las cartas con 's Gravesande está más que justificado, por lo que las motivó y por lo que ambos aportaron.

Según Todhunter [17], también la mantuvo con De Moivre y con Leibniz (nada menos). Abraham de Moivre (1667–1754) se posicionó en favor de la tesis de Arbuthnot en su *Doctrine of Chances* [13]:

> Si hubiéramos mostrado un número de dados con 18 caras blancas y 17 negras, que es la suposición de Mr. Bernoulli, no deberíamos dudar que esos dados han sido hechos por un Artesano; y que su forma no es debida al azar, sino que fue adaptada al propósito particular que este tenía en mente.

El primo de Nicolas, Daniel Bernoulli, estudió en una memoria de 1770 (ver [3]) la *sex ratio* en Londres entre 1664 y 1758, cifrándola para todos esos años en $737629/698958 \simeq 1.055$ y, por tanto, la probabilidad de nacer varón en $p_0 = 0.5133$. Mirando las proporciones para cada década, Daniel Bernoulli observó que el mínimo ocurre entre 1721 y 1730, quedando la *sex ratio* en sólo un $92813/89217 \simeq 1.040$ y, por tanto, la probabilidad de nacer varón en $p_1 = 0.5098$. Centrándose en esa década y buscando una explicación al citado mínimo, Daniel estudió las desviaciones entre los datos observados y esperados bajo dos hipótesis de probabilidad de nacer varón, $p_0 = \frac{1055}{2055} \simeq 0.5133$ y $p_1 = \frac{1040}{2040} \simeq 0.5098$.

Año	x = varones	n = bautizados	np_0	$np_0 - x$	np_1	$np_1 - x$
1721	9430	18370	9431	+1	9365	−65
1722	9325	18339	9414	+89	9349	+24
1723	9811	19203	9858	+47	9790	−21
1724	9902	19370	9944	+42	9875	−27
1725	9661	18859	9682	+21	9614	−47
1726	9605	18808	9655	+50	9588	−17
1727	9241	18252	9370	+129	9305	+64
1728	8497	16652	8548	+51	8489	−8
1729	8736	17060	8758	+22	8697	−39
1730	8606	17118	8788	+182	8727	+121

Cuadro 2: Análisis de Daniel Bernoulli del número de bautizados de Londres, 1721–1730.

Daniel se dio cuenta de que las desviaciones deberían ser simétricamente distribuidas alrededor del cero cuando los datos se distribuyen binomialmente. Mirando los resultados del cuadro 2, vemos cómo el signo + prevalece con la hipótesis p_0 y el signo − con la hipótesis p_1, obteniendo como conclusión que la probabilidad de nacer varón debía ser menor que 0.5133. Estaríamos, por tanto, ante un primer test de los signos. Luego, nuevamente, los datos sobre la proporción de nacimientos de niños y niñas nos llevan al inicio de los contrastes.

4. CONCLUSIONES

A lo largo de estas páginas hemos mostrado los interesantes resultados conseguidos por Nicolas Bernoulli sobre la proporción de niños y niñas nacidos, en la relación epistolar que mantuvo con 's Gravesande y Montmort. Nicolas Bernoulli estaba en desacuerdo con algunas afirmaciones de carácter matemático de Arbuthnot, que contradecían los conocimientos que tenía sobre probabilidad y en especial sobre la distribución binomial, cuya fuente principal era la obra de su tío Jacques Bernoulli. Nicolas no sólo consiguió mejorar teóricamente la ley de los grandes números dada por su tío, sino que además la aplicó al caso de los datos de *sex ratio* de Londres recogidos por Arbuthnot. Nicolas explicó la regularidad de la *sex ratio* a través de un modelo binomial, un modelo aleatorio alejado de la intervención divina propugnada por Arbuthnot y 's Gravesande. Los razonamientos efectuados nos retrotraen al inicio de la técnica matemática de los contrastes de significación que siglos después Fisher y Neyman consolidarían.

Referencias

[1] J. Arbuthnot, An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **27** (1710), 186–190.

[2] D. R. Bellhouse, A manuscript on chance written by John Arbuthnot, *Int. Stat. Rev.* **57** (3) (1989), 249–259.

[3] D. Bernoulli, Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata, *Novi Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **14** (1769-1770), 26–45.

[4] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Impensis Thurnisiorum, Fratrum, Basilea, 1713.

[5] J. A. Camúñez Ruiz y J. Basulto Santos, *En el alumbramiento de la estadística moderna: John Graunt*, Septem Ediciones, Oviedo, 2009.

[6] A. Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, Guerin, París, 1746.

[7] C. Eisenhart y A. Bimbaum, Anniversaries in 1966–67 of interest to statisticians, *Amer. Statist.* **21** (1967), 22–29.

[8] W. J. 's Gravesande, *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques de Mr. G. J. 's Gravesande*, ed. con memoria de J. Allamand, Marc Michel Rey, Amsterdam, 1774.

[9] J. Graunt, *Natural and political observations made upon the bills of mortality*, Martyn, London, 1662. Reproducido en *History of actuarial science* (S. Haberman y T. A. Sibbett, eds.), vol. 1, Pickering and Chatto, Londres, 1995.

[10] I. Hacking, *La domesticación del azar: La erosión del determinismo y el nacimiento de las ciencias del caos*, Gedisa, Barcelona, 1991.

[11] A. Hald, *A History of probability and statistics and their applications before 1750*, John Wiley and Sons, New York, 1990.

[12] C. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleae*, apéndice en *Exercitationum Mathematicarum* de F. van Schooten, J. Elsevirii, Leiden, 1657.

[13] A. de Moivre, *The doctrine of chances: or, A method of calculating the probability of events in play*, Pearson, Londres, 1718.

[14] P. R. de Montmort, *Essay d'analyse sur le jeux de hazard*, Quillau, París, 1713.

[15] K. Pearson, *The history of statistics in the 17th and 18th centuries* (E. S. Pearson, ed.), Griffin, Londres, 1978.

[16] E. Shoesmith, The continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence, *Historia Math.* **14** (1987), 133–146.

[17] I. TODHUNTER, *A history of the mathematical theory of probability: from the time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, Londres, 1865; reimpreso en Chelsea, New York, 1949.

GABRIEL RUIZ-GARZÓN, DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA, UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
Correo electrónico: gabriel.ruiz@uca.es