Los mapas, retratos de un planeta

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Día Escolar de las Matemáticas

12 de mayo de 2019

Raúl Ibáñez Torres

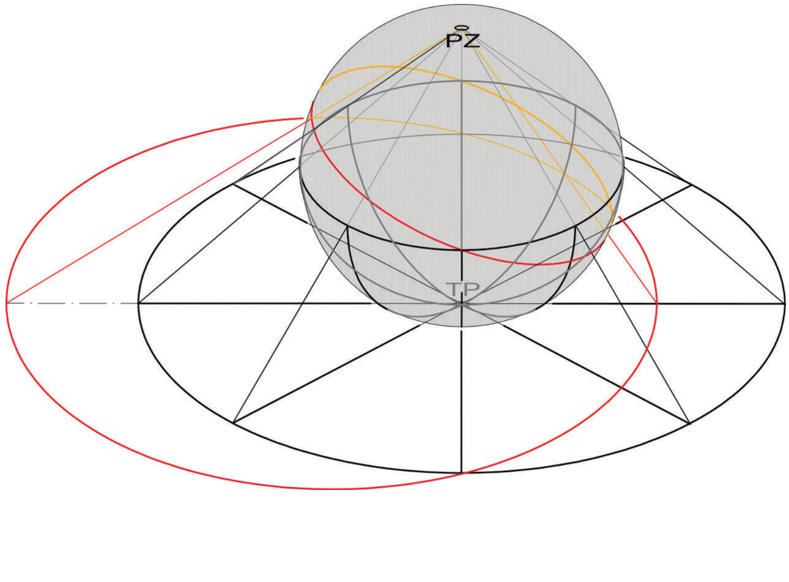

Imagen de portada: Magnus Manske <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stereographic_projection.svg?uselang=ca>

El objetivo de este cuaderno, escrito con motivo del *Día Escolar de las Matemáticas* 2019, es intentar conocer un poco más esos objetos cotidianos que son los mapas, y en especial, la geometría que se esconde detrás de los mismos.

Los mapas son objetos familiares que están presentes en nuestro día a día. Los encontramos a diario en periódicos, revistas, libros, noticiarios, programas culturales o divulgativos de la televisión, películas, videojuegos, anuncios publicitarios, medios de transporte, callejeros, información turística, teléfonos móviles y ordenadores, por ejemplo, *Google Maps* y están también muy presentes en muchos de nuestros trabajos. Hay mapas políticos, urbanos, topográficos, morfológicos, científicos de diferentes clases (botánicos, geológicos, climatológicos, etc.), económicos y estadísticos, catastrales, para la navegación marítima o aérea, de vías de comunicación, artísticos para la publicidad o el turismo, y muchos más. Sin embargo, se produce la paradoja de que son objetos cotidianos, pero tenemos un conocimiento superficial de los mismos.

Un mapa no es más que una representación de una parte, o de la totalidad, de la superficie terrestre, así como de otros planetas, cuerpos celestes, el cielo estrellado, etcétera, sobre una superficie plana, que facilita la comprensión espacial de los diferentes tipos de información que se pueda recoger en los mismos.

El problema matemático básico asociado al concepto de mapas es la representación de una superficie de tipo esférico, la Tierra, sobre una superficie plana. El tipo de represen-

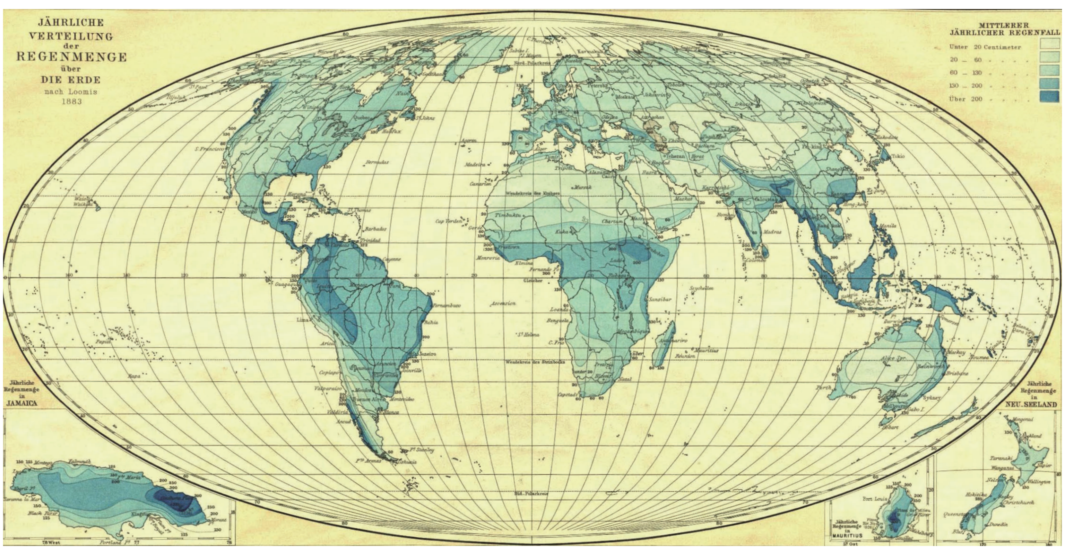

Figura 1. Mapamundi, realizado con la proyección elíptica del Mollweide, perteneciente al *Atlas de Meteorología* de Julius Hann (1887)

tación dependerá del uso que se le vaya a dar al mapa. Si se trata de mapas intuitivos, donde lo que importa es la continuidad de los elementos representados, como en un mapa de metro donde se mantiene el orden de las estaciones de cada línea, pero no las distancias entre las mismas, y cómo se conectan las diferentes líneas entre sí, podemos hablar de mapas intuitivos o topológicos. Pero si, como suele ser habitual, estamos interesados en conocer el camino más corto entre dos lugares, la distancia entre ellos, la longitud de un camino, el área de un cierto territorio, el rumbo a seguir en nuestro viaje marítimo, o cuestiones similares, nos encontramos ante un problema geométrico, la representación de una superficie esférica sobre una superficie plana, preservando propiedades métricas.

Este es el problema geométrico, la transformación de la esfera en el plano preservando las propiedades métricas. Sin embargo, no conviene desvincular el problema matemático (que en realidad está asociado con la proyección cartográfica) del problema social e histórico (que está relacionado con el diseño del mapa, más que con la propia proyección). Ni al revés, no es posible entender la historia de los mapas, o sus implicaciones socio-políticas, sin conocer la geometría de los mismos. Véase *Un breve paseo por los mapas a lo largo de la historia* en la página del DEM de la FESPM <http://www.fespm.es/-Dia-Escolar-de-las-Matematicas->.

Activiades

Actividades. A lo largo de este cuadernillo se van a proponer una serie de actividades relacionadas con los mapas y su geometría. Pueden realizarse una o varias actividades de forma aislada en función de los intereses didácticos o desarrollarse un programa de actividades para todo un curso, destinadas a terminar con una exposición global diseñada con el material trabajado en el aula.

Los mapas en la vida cotidiana. a) Trabajo individual: cada estudiante debe buscar qué mapas aparecen en su entorno y realizar una ficha informativa con sus características (material, procedencia, propiedades, tipo de mapa, uso, etc.). *b*) Trabajo en grupos pequeños: compartir los mapas y la información, realizar una reflexión conjunta y escribir de forma esquemática las conclusiones. *c*) Trabajo colectivo: puesta en común del trabajo grupal, selección de un grupo significativo de mapas y la información asociada, como si el trabajo estuviese destinado a organizar una pequeña exposición.

Los mapas a lo largo de la historia. El profesorado debe realizar una selección de mapas históricos del mundo, diseñando un recorrido desde la tablilla babilónica hasta mapamundis más modernos (entre 10 y 20), para que sean trabajados en el aula. En pequeños grupos primero y de forma colectiva después, el alumnado analizará, reflexionará y debatirá sobre el material expuesto, con libertad, pero supervisados.

La geometría del planeta Tierra

Antes de abordar la geometría de los mapas, realicemos una breve introducción al objeto que queremos cartografiar, la Tierra. Esta es un geoide, cuya superficie es una peculiar

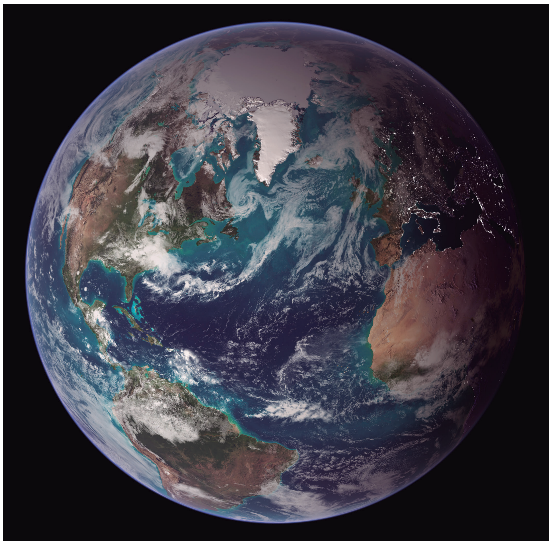

Figura 2

esfera achatada por los polos. Con el objetivo de simplificar la discusión matemática, a lo largo de este cuaderno consideraremos que es una esfera perfecta.

Muchos pueblos de la antigüedad, como los babilonios, egipcios, chinos, indios o indígenas americanos, tenían la creencia de que la Tierra era plana, e incluso la oscura Edad Media trajo la creencia religiosa de la planitud terrestre. Sin embargo, el conocimiento de la esfericidad de la Tierra también vino de la antigüedad, de Grecia.

Una evidencia de que habitamos un planeta redondo la tenemos, hoy en día, a través de las fotografías desde el espacio, tomadas desde la Estación Espacial Internacional o satélites. Pero, ¿qué evidencias podemos tener nosotros directamente, como las tenían también los griegos, de que la Tierra es redonda?

- La sombra de la Tierra sobre la luna durante un eclipse lunar es circular.
- Existen diferentes zonas horarias. La determinación de las horas del día tiene su origen en la posición del Sol en el cielo. El mediodía, que es cuando el Sol está más alto en el cielo, varía de unos lugares a otros del planeta, por ser este esférico, mientras que se produciría al mismo tiempo si la Tierra fuese plana y solo habría una zona horaria.
- Las estrellas visibles en el firmamento nocturno. Si un viajero se desplaza hacia el norte, las constelaciones (estrellas) que en el lugar de origen se ven hacia el sur irán descendiendo en el cielo hasta desaparecer bajo el horizonte, al mismo tiempo que irán apareciendo otras, que no se veían al iniciar el viaje, por el norte. En particular, la estrella polar no se ve desde el hemisferio sur, pero sí en el hemisferio norte.
- El horizonte es circular. Si miramos al horizonte desde la costa, o un barco, veremos que tiene la forma de una gran circunferencia, lo cual se hace más evidente si lo observamos desde un globo o un avión.
- El horizonte existe. Si desde la costa vemos a un velero alejarse, este irá desapareciendo de abajo a arriba, primero dejaremos de ver su casco, luego la cubierta y fi-

nalmente, las velas. Si la Tierra fuese plana el velero se haría cada vez más pequeño hasta llegar a ser imperceptible. De hecho, el horizonte existe, como una línea nítida entre el cielo y el mar, por la curvatura de la Tierra. En caso contrario, la zona entre ambos sería difusa y no se distinguiría bien el horizonte.

Otro problema apasionante, que ya intentaron resolver los griegos, es el tamaño de la Tierra. Es interesante conocer algunos de los argumentos geométricos que utilizaron para sus estimaciones, como la medición de Eratóstenes, un valor cercano al perímetro real de 40 030 km, o la de Posidonio, de unos 28 350 km, que motivó el error de cálculo de Cristóbal Colón (Ibáñez, 2010).

Sin embargo, la cuestión del tamaño de la Tierra es realmente secundaria en el problema cartográfico, siendo la forma la cuestión relevante. La mejor manera de entender las proyecciones matemáticas que originan el diseño de los mapas es verlas como un proceso en dos partes. La primera es la transformación de la esfera terrestre en un globo esférico reducido al tamaño (escala) que se haya elegido para el mapa. Dicha imagen reducida de la superficie terrestre será el «globo de referencia», que después se trasformará matemáticamente, mediante una proyección, en la superficie plana, generando así un mapa. El estudio de estas proyecciones es el objetivo de la *cartografía matemática*.

Por lo tanto, si la proyección del globo de referencia sobre la superficie plana preservase todas las propiedades métricas, como sería lo deseable, la escala mediría tan solo la diferencia de tamaño entre la Tierra y el globo de referencia. Por ejemplo, si se considera la reducción a un globo de 25 cm de radio, la escala del mapa sería:

$$\frac{25\text{ cm}}{6\,371\text{ km}} = \frac{25\text{ cm}}{637\,100\,000\text{ cm}} = \frac{1}{25\,484\,000\text{ cm}}$$

Es decir, la escala sería 1 : 25 484 000, que significa que cada centímetro del globo terráqueo se corresponde con 25 484 000 cm, es decir, 254,84 km, de la Tierra.

El siguiente elemento necesario para el estudio cartográfico es un sistema de coordenadas geográficas que permita determinar, de forma única, cualquier posición sobre la superficie terrestre, la latitud y la longitud. A partir del mismo, se introducen dos familias destacadas de curvas esféricas, los meridianos y los paralelos, que son las curvas de latitud y longitud constantes.

Si consideramos el modelo esférico del planeta, los paralelos son las circunferencias obtenidas al intersecar la esfera con planos perpendiculares a su eje de giro, que pasa por los polos norte y sur. Y la latitud de un punto de la superficie terrestre es el ángulo de inclinación respecto al plano del ecuador, es decir, el ángulo entre el segmento que une el centro de la Tierra con nuestro punto y el plano sobre el que descansa el ecuador (ángulo ϕ en la figura 3). La latitud de Bilbao es $43^{\circ}\,15'\,52''$ N, es decir, que se encuentra a 43 grados, 15 minutos y 52 segundos al Norte del ecuador.

Mientras que la latitud mide nuestra posición en la dirección norte-sur, la longitud lo hace en la dirección este-oeste. Los meridianos son las circunferencias que se obtienen al intersecar la superficie terrestre con los planos que contienen el eje de giro. Sobre cada meridiano, el mediodía se produce al mismo tiempo. La longitud de un punto de la superficie terrestre es el ángulo de giro respecto a un meridiano que se considera como inicial, hoy día el meridiano de Greenwich. La longitud de Bilbao es 2º 55′ 43″ O, es decir, se encuentra a 2 grados, 55 minutos y 43 segundos al oeste del meridiano de Greenwich. Para más información, consúltese Ibáñez (2010).

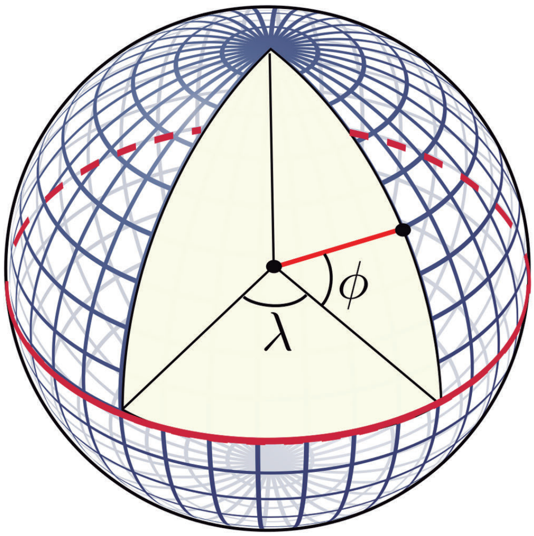

Figura 3. Latitud (ϕ) y longitud (λ) sobre la esfera terrestre

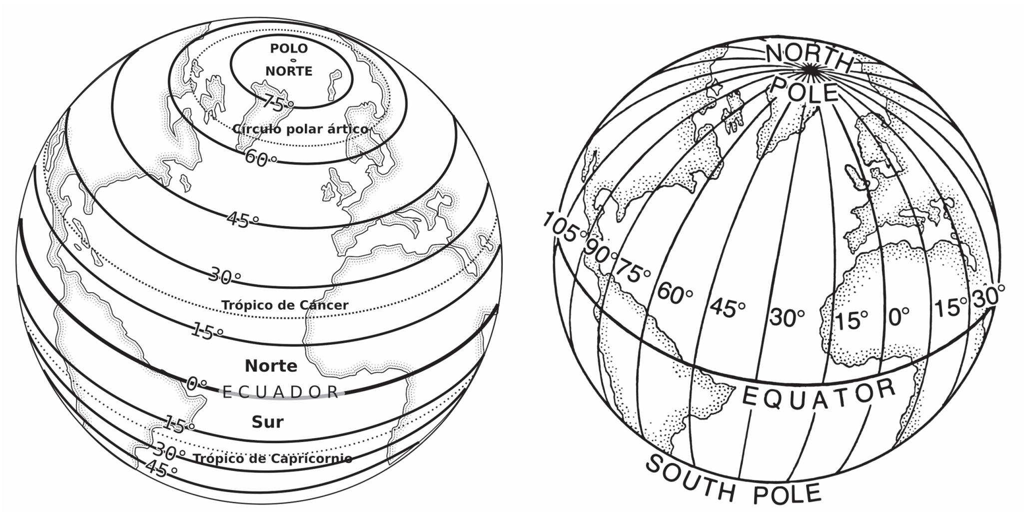

Figura 4. Paralelos y meridianos de la superficie terrestre

Activiades

Mitos cosmológicos de la tierra plana. Estudiar alguno de los mitos cosmológicos antiguos sobre el origen y estructura del mundo en los que se imaginaron una Tierra plana: babilonios, egipcios, chinos, griegos, indígenas americanos, etc.[1]

Activiades

Sociedad internacional de la Tierra plana. Abrir un debate abierto en el aula sobre si la Tierra es plana o redonda, y plantear si nosotros mismos podemos tener evidencias directas de la esfericidad terrestre. El debate deberá estar dirigido por el profesorado, dejando que los estudiantes debatan con libertad y se vayan acercando a los argumentos anteriormente expuestos, y aportando, en caso necesario, herramientas para que lleguen a esas conclusiones.

¿A qué distancia se encuentra el horizonte? Calcular, haciendo uso del teorema de Pitágoras, a qué distancia se encuentra el horizonte (Ibáñez, 2010). Si es posible, puede comprobarse el resultado, con un coche en una zona llana o con un barco en una zona de mar. Esto permite además comprobar la esfericidad terrestre, tanto por la distancia, como por el argumento de la existencia del horizonte.

El tamaño de la Tierra. Estudiar en clase los argumentos geométricos de las mediciones del radio de la Tierra, de Eratóstenes y de Posidonio (analizando los posibles errores).[2]

La escala. Para entender el concepto de escala, por sí mismo, analizar cómo varían las cuestiones métricas (distancias, caminos más cortos, ángulos o áreas), si lo hacen, con la misma. Puede utilizarse un plano de una casa, para evitar el problema de la forma esférica de la Tierra.

Coordenadas geográficas. Trabajar las coordenadas cartográficas con un mapa cilíndrico (el ideal sería el mapa diseñado con la proyección rectangular, donde las coordenadas planas son simplemente la longitud y la latitud, aunque puede utilizarse el mapamundi de Mercator). Además, se pueden comparar las posiciones en distintos mapas del mundo de un mismo punto geográfico.

Las geodésicas de la esfera. Trabajar el concepto de camino más corto (geodésica) sobre una esfera, con cuerda y un globo terráqueo, hasta deducir que dichas curvas son los círculos máximos.

Figura 5. Geodésica (círculo máximo) entre Nueva York y Madrid

¿Qué significa que un mapa sea correcto?

Normalmente, cuando utilizamos un mapa, que no sea intuitivo, podemos tener diversos intereses: buscar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y determinar la distancia que los separa; medir la longitud de un río, una frontera, natural o artificial, un cable subterráneo de fibra óptica o una vía de comunicación; fijar la zona de alcance de una señal de radio, un escape de gas o un misil militar; conocer la dirección de señales eléctricas o del viento; establecer el rumbo de viaje en la navegación aérea, marítima o terrestre; calcular la superficie de una determinada zona, ya sea bosque, núcleo urbano o terreno de cultivo; analizar la información geográfica representada sobre el mapa (niveles de vida, contaminación, población, datos económicos, producción, o distintas informaciones científicas, entre otras), para lo cual es esencial que se preserve el área, y si es posible la forma, esto es, la apariencia general de los territorios que estamos analizando y poder así examinar y comparar la información, etc. En definitiva, frente a un mapa estamos interesados en cuestiones métricas como distancias, longitudes de las curvas, caminos más cortos (geodésicas), direcciones, ángulos, áreas o formas y, por lo tanto, a la hora de construir proyecciones matemáticas de la superficie terrestre en el plano estaremos interesados en que dichas proyecciones preserven esos elementos métricos, salvo la escala.

Una proyección del globo de referencia en el plano que preserve la geometría de la esfera, es decir, las anteriores cuestiones métricas, se denomina isometría. Por lo tanto, el objetivo de un cartógrafo es, a priori, encontrar una isometría de la esfera en el plano, para poder diseñar los mapas a partir de ella.

No todas las propiedades métricas se encuentran al mismo nivel de importancia. Como se muestra en el siguiente esquema, una transformación del globo de referencia en el plano que preserve las distancias entre puntos (respectivamente, que preserve las longitudes de las curvas) ya es una isometría, y preservará todas las propiedades métricas, incluidas áreas, ángulos, geodésicas y formas. Sin embargo, una transformación que preserve áreas (respectivamente, ángulos o geodésicas), no necesariamente será una isometría, como se verá a lo largo de este cuaderno.

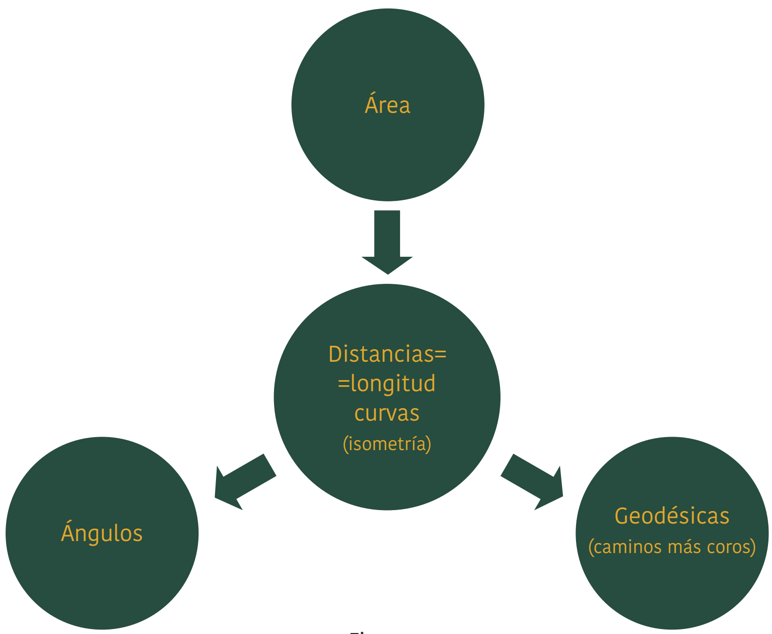

Figura 6

Pero, ¿son los mapas que utilizamos normalmente correctos, es decir, derivados de una isometría de la esfera de referencia en el plano, y que, por lo tanto, preservan, salvo la escala, las propiedades métricas?, ¿existen mapas correctos de la Tierra?

Considérese el mapamundi de Mercator. ¿Cuál es el camino más corto entre Madrid (o Baku) y Washington? Como el camino más corto entre dos puntos del plano es la recta, la respuesta parece que debería de ser el paralelo 40º N, sin embargo, en la esfera el camino más corto entre dos puntos cualesquiera es el círculo máximo que pasa por dichos puntos (puede trazarse la geodésica sobre un globo terráqueo con una cuerda entre esas ciudades) y en este caso, su imagen en el plano no es el paralelo 40º N. El mapamundi de Mercator no preserva los caminos más cortos.

En todo mapa se indica la escala. Luego, dados dos lugares sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia entre ellos? Tomemos la regla y midamos la distancia en el mapa entre dichos lugares, para después transformar esa medida en la distancia deseada por medio de la escala. Aunque, realmente tendríamos que medir en el plano la longitud de la curva imagen del círculo máximo, que es el camino más corto. Aun así, el resultado que se obtendría seguiría siendo incorrecto, y esto se debe a que nuestro mapa no preserva las longitudes de las curvas, no preserva las distancias, y en realidad, la escala es una mentira.

Figura 7. Camino más corto (círculo máximo) entre Washington y Baku en el globo terrestre (3d)

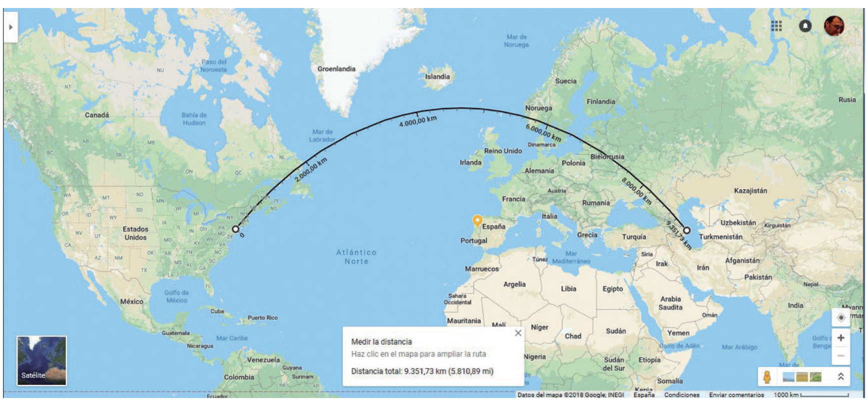

Figura 8. Representación del camino más corto entre Washington y Baku en el mapa de Mercator

¿Y qué ocurre con el área? Como es bien conocido Groenlandia aparece en este mapa demasiado grande, mostrándose incluso más grande que África, sin embargo, la realidad es que Groenlandia tiene una extensión de 2 175 600 km² y África de 29 800 000 km², luego se produce una distorsión muy fuerte en el área. Finalmente, preguntemos si los mapas preservan los rumbos, las direcciones, en definitiva, los ángulos. El ángulo entre los meridianos y los paralelos es de 90º, y también lo es en el mapa anterior, sin embargo, en muchos mapamundis esto no es así.

Por lo tanto, los mapas no tienen el comportamiento que creíamos que tenían. De hecho, todos los mapas mienten, distorsionan parte de la información métrica.

Actividades

Mapas topológicos. Comprobar, con un mapa de metro, que no se preservan las distancias. ¿Y los tiempos?

Las mentiras de los mapas. Material necesario: diferentes mapas del mundo (mínimo el mapa de Mercator, aunque estaría bien otros, como el de Gall-Peters)[3] y un globo terráqueo.

— *Caminos más cortos.* Con un hilo o una cuerda, buscar los caminos más cortos entre diferentes lugares del mundo, tanto en el globo terráqueo (los reales), como en el mapa (los representados), para comprobar que no coinciden. Sería interesante, además, tener fotocopias de los mapas para pintar sobre ellos los resultados que se van obteniendo.
— *Distancias.* Tomar en el mapa dos puntos que estén en un mismo paralelo (resp. meridiano o en posición general). Calcular la distancia en el mapa entre ellos, realizando la conversión a kilómetros teniendo en cuenta la escala, y comparar el resultado con la distancia real, que puede obtenerse con cualquier calculadora de distancias de internet. El resultado no coincide, la escala no es real. Más aún, tomando parejas de puntos del plano que estén a la misma distancia que los dos anteriores y sobre el mismo paralelo (resp. meridiano), y después, sobre diferentes paralelos (resp. meridianos), se comprobará que se obtienen resultados muy diferentes, dependiendo de la posición, debido a que la distorsión de la proyección no es uniforme, no es igual en todas las partes de la Tierra.
— *Áreas.* Plantear a los estudiantes cómo comprobar si los mapas de la actividad preservan las áreas. Comprobar en los mapamundis utilizados.
— *Ángulos (indicatriz de Tissot).* Una condición necesaria para que un mapa preserve los ángulos es que el ángulo entre meridianos y paralelos sea de 90°, pero no es suficiente, ya que los mapas cilíndricos cumplen esta condición, aunque no sean conformes, no preserven los ángulos. Una forma de comprobar si es conforme es «viendo» si las imágenes de pequeñas circunferencias alrededor de diferentes lugares de la esfera siguen siendo circunferencias en el plano, ya que la deformación es la misma en todas las direcciones en las aplicaciones conformes.[4]
— *Formas.* Abrir un debate en el aula sobre las formas en los diferentes mapas, comparándolas con la forma en el globo terráqueo.

Fotografiando el globo terráqueo. Puede pensarse que una fotografía aérea, o desde un satélite, es el mejor mapa que existe, pero ¿será esto verdad? La respuesta es negativa. Una forma de comprobarlo es trabajar las cuestiones métricas con una imagen, realizada con el móvil, de un globo terráqueo.

Mapas que preservan el área

Existen mapas que tienen la propiedad de preservar el área, salvo el factor de escala, como el mapa realizado con la proyección cilíndrica isoareal de Lambert. En 1772 el matemático alemán Johann H. Lambert (1728-1777) diseñó un mapa del mundo al proyectar el globo de referencia terrestre sobre un cilindro tangente al mismo en el ecuador, mediante «rayos» que parten perpendicularmente del eje de la esfera (figura 9).

Tras proyectar el globo de referencia sobre el cilindro, se despliega este en un plano, cortando por una de sus rectas generadoras, obteniéndose así un mapa del mundo con las siguientes propiedades: *a*) es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas; *b*) los meridianos y los paralelos son rectas, de igual longitud, que se intersecan ortogonalmente; *c*) la proyección es isoareal, luego en el mapa se preservan las áreas, salvo la escala, pero no se preservan ni los ángulos ni las geodésicas; *d*) la distorsión en las formas, ángulos y distancias es muy pequeña cerca del ecuador, donde la escala es real, pero mayor según nos acercamos a los polos.

La propiedad de conservación de las áreas es, obviamente, una propiedad prioritaria cuando estamos trabajando precisamente con problemas relacionados con el área de ciertos

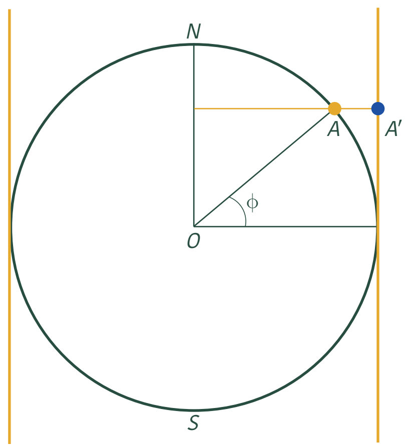

Figura 9

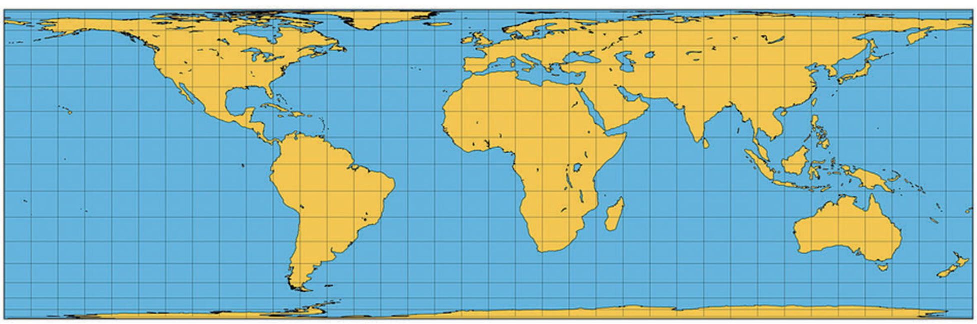

Figura 10. Mapa diseñado a partir de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert

territorios o comparando superficies de diferentes regiones del planeta. Pero, principalmente, como los mapas son un instrumento para transmitir información de forma más rápida, ilustrativa y precisa que una tabla de números, es importante que para los mapas informativos se mantengan las proporciones de las superficies, es decir, se utilicen mapas generados por proyecciones isoareales, y si es posible que distorsionen lo mínimo posible las formas. En general, este tipo de mapas son muy importantes para la divulgación científica, la educación y los medios de comunicación. Otras proyecciones isoareales son las proyecciones cónica isoareal de Albers, de Mollweide, ortográfica de Gall-Peters, de Eckert IV, acimutal de Lambert o de Sanson-Flamsteed.

Una vuelta de tuerca en la realización de los mapas informativos, sobre todo a partir de la utilización de los ordenadores, han sido los *cartogramas*. Estos son mapas en los cuales la superficie de los países, o las diferentes regiones consideradas, aparecen redimensionadas de forma directamente proporcional a la información que se desea comunicar, como por ejemplo la población de los diferentes territorios o países, u otro tipo de informaciones como tasa de nacimientos o muertes, incidencia de enfermedades, datos de producción, niveles de contaminación, parámetros económicos, etcétera. Una de las ventajas de los cartogramas es que permiten comparar de forma visual y rápida los valores de la información estudiada para los diferentes territorios.

Actividades

Construye una maqueta de tu proyección. Realizar una maqueta de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert que consista en una esfera terrestre construida con los meridianos y paralelos mediante alambre, o un material similar, y el eje norte-sur de la esfera, después el cilindro tangente de proyección construido con las rectas y circunferencias que son imágenes de los meridianos y paralelos anteriores, y algunos rayos de la proyección saliendo del eje e intersecando a esfera y cilindro. Otra opción: utilizar metacrilato para esfera y cilindro. Lo mismo para las proyecciones gnomónica, estereográfica y de Mercator.

Deformaciones (bachillerato). Estudiar las deformaciones en los meridianos y paralelos de la proyección de Arquímedes. Idem para la proyección gnomónica. [Ibáñez 2010]

Cartogramas. Trabajar algunas informaciones socio-económicas (población, economía, tecnología, estudios, etc.) a través de los cartogramas de la página <https://worldmapper.org>.

Construye un cartograma. Se trata de construir un sencillo cartograma (con formas geométricas, como rectángulos) con algún dato estadístico, por ejemplo, referido a una ciudad, provincia o comunidad autónoma, u otras opciones. Incluso se pueden hacer varios sobre temas estadísticos relacionados.

Mapas que preservan las geodésicas

¿Es posible construir mapas en los cuales se preserven las geodésicas, es decir, que los círculos máximos de la esfera estén representados como rectas del plano? Esto es posible mediante la proyección gnomónica, considerada la proyección más antigua conocida, que se atribuye al filósofo y matemático griego Tales de Mileto (aprox. 624-547 a.n.e.). Esta proyecta geométricamente el globo de referencia, desde su centro, sobre un plano tangente al mismo, por ejemplo, en el norte.

El mapa diseñado con la proyección gnomónica tiene las siguientes propiedades: *a*) su imagen suele ser circular y solo cubre parte de uno de los hemisferios; *b*) en su versión normal (centro en un polo), los meridianos son rectas radiales y los paralelos circunferencias concéntricas; *c*) esta proyección preserva las geodésicas, luego los círculos máximos se proyectan en rectas (figura 11), pero no distancias, ángulos o áreas; *d*) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.

Esta proyección es claramente útil para la navegación, aérea o marítima, ya que en los mapas diseñados con ella las rectas sí representan las líneas de mínima distancia, los caminos más cortos, y suele utilizarse en combinación con el mapa diseñado con la proyección de Mercator, en la cual las rectas representan a las curvas de rumbo constante. También es

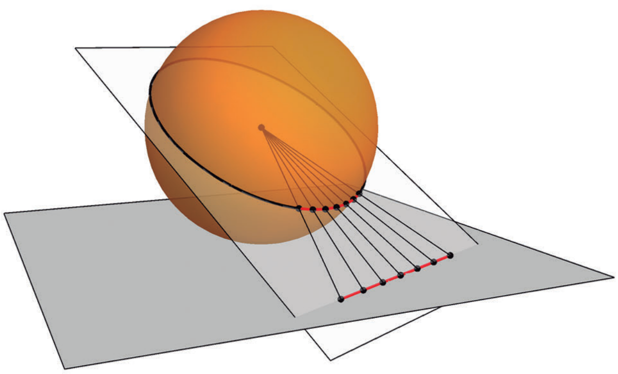

Figura 11

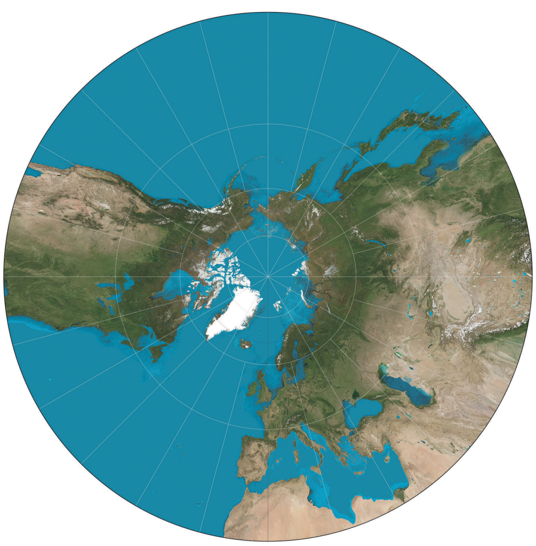

Figura 12. Mapa realizado con la proyección gnomónica, centrado en el polo norte y cubriendo parte del hemisferio norte

útil para la meteorología, la cristalografía o la sismología, puesto que las ondas sísmicas se propagan a lo largo de círculos máximos, así como las ondas de radio. Además, la proyección central es la transformación que más se ha utilizado para generar mapas poliédricos (se circunscribe el globo de referencia en un poliedro y se proyecta sobre el mismo con la proyección central, y luego se despliega el poliedro en el plano) y variaciones de estos.

Actividades

Mapas poliédricos. En la excelente página web sobre mapas de Carlos A. Furuti pueden encontrarse versiones imprimibles de mapas poliédricos, con los que construir mundos poliédricos y/o trabajar con estos objetos y sus mapas, o incluirlos en una exposición <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/ProjPoly/Foldout/>.

Figura 13. Globo terráqueo con forma de dodecaedro realizado con la proyección gnomónica

Mapas que preservan los ángulos

Para que una proyección preserve los ángulos, debe preservar el ángulo entre meridianos y paralelos (90º) y, además, la distorsión que se produce en la dirección de los meridianos y de los paralelos debe de ser la misma, de hecho, en cualquier dirección. Por este motivo, si estiramos el mapa de Lambert en la dirección norte-sur de forma que la distorsión en la dirección de los meridianos sea la misma que tenía este mapa en la dirección de los paralelos (que eran estirados cada vez más al acercarnos a los polos), obtendremos una proyección conforme, la creada por Mercator.

El mapamundi de Mercator es, sin lugar a dudas, el mapa más familiar. Fue diseñado en 1569 por el cartógrafo flamenco Gerardus Mercator (1512-1594). Su mérito fue construir un mapa útil para la navegación marítima, en parte, heredero de los antiguos portulanos[5], donde los instrumentos utilizados eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y, por supuesto, la brújula. No podemos olvidar que esa era una época de grandes viajes, de descubrimientos, y los navegantes y viajeros necesitaban mapas para sus desplazamientos. Los mapas medievales, que no habían sido diseñados de forma científica, no eran fiables en lo que se refiere a la navegación y, en general, no se podía realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en muchas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas de su verdadero destino.

Las propiedades del mapa de Mercator: *a*) es rectangular; *b*) los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan en ángulo recto; *c*) es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, geodésicas o formas; *d*) las loxodrómicas, o líneas de rumbo fijo, se transforman en rectas; *e*) la distorsión de áreas, formas y distancias es pequeña cerca del ecuador, pero muy fuerte según nos acercamos a los polos. Esta propiedad la hace muy conveniente para regiones cercanas al ecuador.

Las loxodrómicas, o líneas de rumbo fijo, se trasforman en rectas en el plano de Mercator. Por consiguiente, si un navegante quiere ir de un punto A a un punto B de la Tierra, solo necesita trazar en el mapa la recta que une ambos puntos y tomar el rumbo marcado por la misma. Sin embargo, las loxodrómicas no son geodésicas y, por lo tanto, no nos dan el camino más corto entre esos dos puntos, aunque sí el más sencillo de seguir, por ser de rumbo constante (basta con la brújula). Cualquier otra curva entre esos puntos requiere de continuos cambios de rumbo. Normalmente en la navegación se toma una solución in-

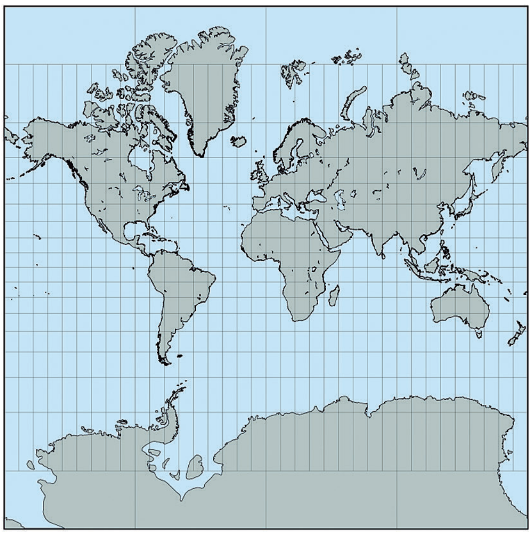

Figura 14. Mapa diseñado a partir de la proyección de Mercator

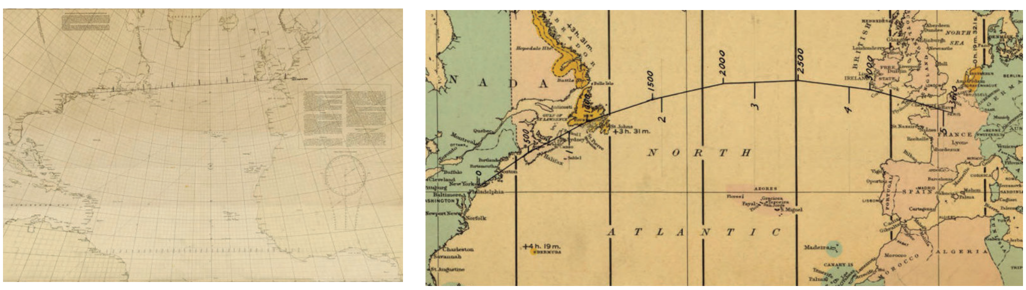

Figura 15. A la izquierda, carta de navegación (1926) de Charles Lindberg, realizada con la proyección gnomónica, en la que está marcada la ortodrómica (círculo máximo) que une Nueva York y París. A la derecha, trozo del Mapa de Mercator (1927) de Charles Lindberg, en que están marcadas las loxodrómicas (líneas de rumbo constante) entre algunos puntos que están en el círculo máximo (camino de mínima distancia) entre Nueva York y París

termedia. Para realizar su travesía del Atlántico, en 1927, el aviador Charles Lindbergh decidió cambiar de rumbo cada 1 000 kilómetros y seguir una sucesión de curvas loxodrómicas que se aproxima al círculo máximo.

Si en lugar de considerar el ecuador como curva tangente al cilindro de proyección en el diseño de la proyección de Mercator, se considera uno de sus meridianos, se obtendrá la proyección de Mercator transversa, centrada en dicho meridiano. El mapa diseñado a partir de ella es también conforme, aunque ahora los meridianos y paralelos no son rectas, y la distorsión que se produce cerca del meridiano de tangencia es muy pequeña. Por este motivo es la base de la proyección UTM (de Mercator Transversa Universal). Se divide a la Tierra, entre la latitud 84º N y 80º S, en 60 zonas de 6º de longitud, y se utiliza en cada una de ellas la proyección de Mercator transversa con meridiano en la mitad de la zona considerada. Por otra parte, cada una de esas franjas se divide en 20 zonas de 8º de latitud, formándose el sistema UTM. Este sistema es utilizado universalmente por la mayoría de las agencias topográficas, geológicas, geodésicas, cartográficas, militares, marinas o similares de todo el mundo, para mapas de escalas mayores o iguales a 1:500 000, por ejemplo, 1:200 000 o 1:50 000.

Los mapas conformes, que preservan los ángulos, producen distorsiones pequeñas en las formas localmente, es decir, en territorios pequeños. No así en grandes territorios, por ejemplo, cerca de los polos para el mapa de Mercator. Sin embargo, este mapa se ha utilizado, y se utiliza, en herramientas de internet, como *Google Maps* (en 2018 han incluido además una representación 3D del mundo), *OpenStreetMap* o *MapBox*, mapas interactivos donde se realizan zooms a zonas pequeñas, ya que la deformación en las formas es mínima para regiones pequeñas.

Otras proyecciones conformes son la proyección estereográfica, la aplicación cónica conforme de Lambert o la aplicación cónica conforme bipolar oblicua.

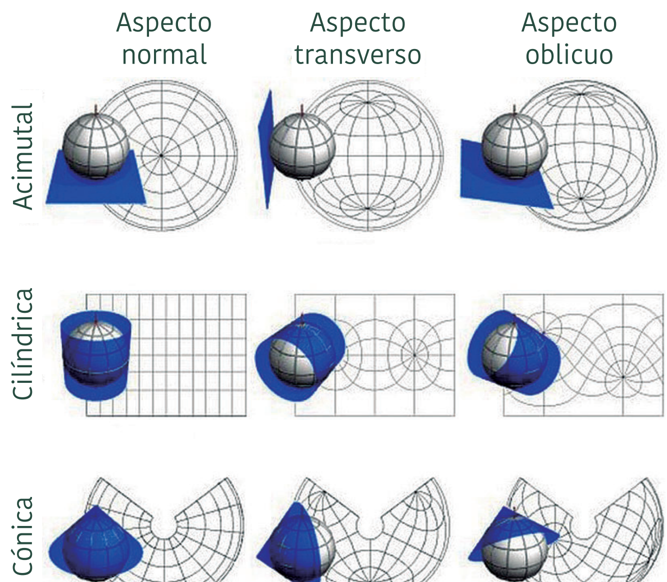

Figura 16. Aspectos normal, transverso y oblicuo de las proyecciones acimutales, cilíndricas y cónicas

Actividades

Loxodrómicas. Trabajar el concepto de loxodrómica, curva de rumbo constante (corta a todos los meridianos formando el mismo ángulo), en contraste con las ortodrómicas, camino más corto (geodésica), y la importancia que tuvo para la navegación (las brújulas). Mostrar mapas con las loxodrómicas trazadas.

El viaje de Charles Lindbergh. Se trata de reconstruir la idea del trazado de la trayectoria del viaje de Lindbergh, cuando cruzó el Atlántico en solitario y sin escalas, formada por trozos de loxodrómicas, que aproximan a la ortodrómica, pero eligiendo dos ciudades del mundo cualesquiera, aunque sin océano entre ellas para poder localizar ciudades intermedias que estén en la geodésica entre ambas. Se necesitan dos mapas, uno gnomónico (se traza la ortodrómica y se elige un pequeño número de ciudades en ella) y el de Mercator (se trazan las rectas, y se obtienen los rumbos de navegación, entre las ciudades intermedias), que incluyan las dos ciudades elegidas.

La deformación de las formas. Considerar las diferentes formas de un territorio grande, como Australia, Europa o África, a través de diferentes proyecciones cartográficas, comparando la deformación de las formas resultantes a través de ellas.

¿Existe el mapa perfecto?

Hemos visto que se pueden construir mapas que preservan alguna de las propiedades métricas básicas, como el área, los ángulos y las geodésicas, pero ¿existirán mapas que preserven todas las propiedades métricas, es decir, mapas construidos a partir de isometrías?

A lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir mapas correctos de la Tierra, pero tampoco demostraron que esto no fuese posible, hasta que el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) lo probó en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano* (1778). La demostración es sencilla: supongamos que existe una proyección de la esfera en el plano que preserve todas las propiedades métricas, una isometría, y tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por tres círculos máximos, dos segmentos de meridiano entre el polo norte y el ecuador con un ángulo de 90º entre ellos, además del segmento del ecuador que une ambos meridianos y que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90º. Entonces, la imagen cartográfica de este triángulo geodésico de la esfera debería ser un triángulo del plano, ya que se preservan las geodésicas, con tres ángulos de 90º, ya que se preservan los ángulos. Aunque, esto es absurdo ya que la suma de los ángulos de un triángulo del plano es, por geometría básica, 180º, y no puede ser 270º. Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven al mismo tiempo geodésicas y ángulos. Es decir, no existen mapas perfectos, todos los mapas son falaces en algún sentido.

El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de diseñar mapas, o de utilizarlos, de diferentes regiones de la Tierra o de todo el planeta, es considerar para cada situación concreta las proyecciones que se ajusten lo más posible a las necesidades. A la hora de utilizar un mapa no hay que dejarse llevar por la supuesta fama o por ser el mapa

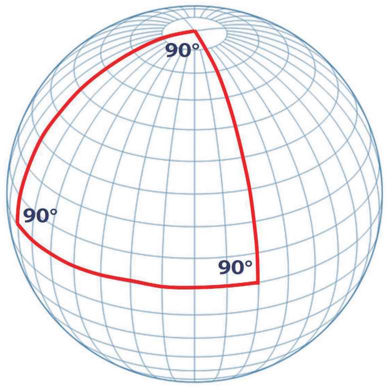

Figura 17

apoyado por alguna asociación, sino que la elección debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en el mapa y una posterior elección dentro de la gran variedad de alternativas posibles.

En conclusión, no existen los mapas perfectos de la Tierra, existen muchas proyecciones cartográficas isoareales, bastantes conformes y una que preserva los caminos más cortos. Pero, además, existen más tipos de proyecciones cartográficas. Véase «Mapas, mapas, mapas» en la página del DEM de la FESPM <http://www.fespm.es/-Dia-Escolar-de-las-Matematicas->.

Actividades

La suma de los ángulos de un triángulo. Trabajar demostraciones de que los ángulos de un triángulo del plano suman 180°, con papiroflexia, Geogebra o geometría euclídea.

La demostración de Euler. Material: globo terráqueo y cinta aislante de color. Construir sobre el globo terráqueo el triángulo geodésico, con tres ángulos rectos, de la prueba de Euler, después despegarlo unido e intentar colocarlo en una hoja de papel formando un triángulo. Es imposible, salvo que modifiquemos los ángulos.

Demostración matemática. Trabajar en el aula el concepto de demostración. Significado, importancia, técnicas, ejemplos, etc. Utilizar también, aunque no son técnicamente demostraciones, las demostraciones sin palabras (para ver, e incluso tocar), una excelente herramienta para algunos niveles.

Construye tu propio globo terráqueo. a) Una esfera básica: se empieza con una bola de plástico, cartón o poliespán, del tamaño deseado (también, se puede realizar una en papel maché, a partir de un globo hinchable). *b*) Imprimir el mapa de la Tierra realizado con gajos para poder pegarlo, desde el ecuador a los polos, sobre la bola esférica, con cuidado de imprimir el mapa de gajos al tamaño para que ajuste bien con la bola (mapas de gajos pueden encontrarse en la red, por ejemplo, en <www.davidrumsey.com>, <www.loc.gov o www.bnf.fr>). Puede ser un modelo histórico, como los de Waldseemüller o Cassini, un modelo con imágenes modernas de la NASA o la USGS, o un modelo simple en blanco y negro. *c*) Para finalizar se puede pintar de una forma artística, para que sea un modelo personal y bonito. Variante: existen modelos de mapas para realizar globos de diferentes planetas y globos celestes.

Actividades

¿Qué mapa nos gusta más? Las personas responsables de la actividad deben de elegir una serie de mapamundis, por ejemplo, 20 mapas del mundo, realizados con diferentes proyecciones cartográficas, y con diferentes perspectivas, posiciones y centros de las mismas. Sería interesante añadir la información básica de la proyección. Pueden ser mapas reales u obtenidos en la red (Furuti, Ibáñez (2018), wikimedia, programa G-projection). La actividad puede plantearse como un debate sobre la imagen que obtenemos de la Tierra a través de las mismas o como una especie de concurso de belleza.

Programa G-projection. Este programa de la NASA es una excelente herramienta digital para trabajar las proyecciones cartográficas. Este programa transforma una imagen cualquiera, que nosotros hayamos elegido, y que considera que es la imagen de la proyección rectangular (es decir, el sistema de coordenadas cartesiano de longitud y latitud), a través de unas 200 proyecciones cartográficas, viendo cual es el efecto de las diferentes proyecciones cartográficas. Puede empezarse por no introducir una imagen externa y utilizar la imagen del mundo mediante la proyección rectangular, que ya está en el programa. Un segundo paso puede ser utilizar imágenes geométricas, como mosaicos. Y finalmente tomar fotos cotidianas y transformarlas. La actividad puede terminar con un concurso de imágenes artísticas <https://www.giss.nasa.gov/tools/gprojector/>.

Los mapas en el arte y literatura. Los mapas aparecen también en el arte y la literatura, por este motivo pueden prepararse actividades que incluyan esta perspectiva.

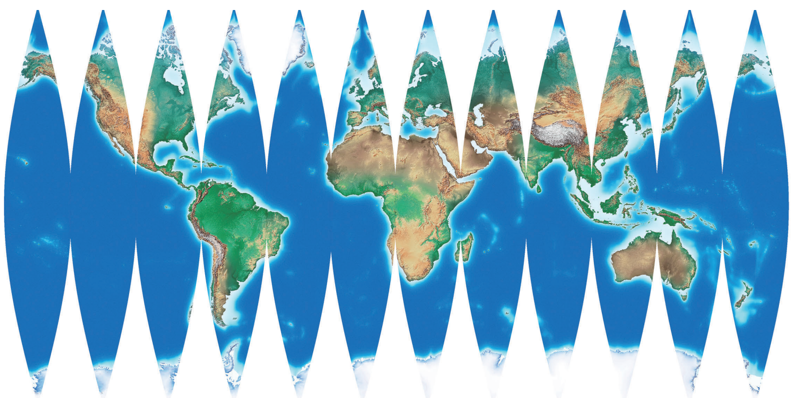

Figura 18. Gajos sinusoidales de la superficie terrestre para construir un globo terráqueo

Referencias bibliográficas

Feeman, T. G. (2002), *Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps*, AMS, Providence.
Furuti, C. (1996-2018), *Cartographical Map Projections,* <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/TOC/cartTOC.htm>.
Garfield, S. (2013), *En el mapa. De cómo el mundo adquirió su aspecto*, Taurus, Madrid.
History of cartography y *Map projection*, <https://en.wikipedia.org/>.
Ibáñez, R. (2002), *Muerte de un cartógrafo, Un paseo por la Geometría*, UPV/EHU [versión online en la sección textos-on-line de <www.divulgamat.net>].

Ibáñez, R. (2006), «El problema de Arno Peters, un problema cartográfico», *Suma*, n. 52, pp. 101-109.
– (2010), *El sueño del mapa perfecto, cartografía y matemáticas,* El mundo es matemático, RBA, Barcelona.
–, *Cuaderno de Cultura Científica* (blog): «Mapa Dymaxion», «Arte cartográfico, arte con mapas», «Cartogramas, una herramienta de información visual» (2015), «Matemáticas para ver y tocar», «Más matemáticas para ver y tocar» (2016), «Imago Mundi, 7 retratos del mundo», «Imago Mundi 2, otros 6 retratos del mundo», «Imago Mundi 3, y 9 retratos más del mundo» (2018).
Old maps of the world, Maps by year y *Maps by projection*, <https://commons.wikimedia.org/>.
Rumsey, David (1996-2018), *David Rumsey Map Collection*, <https://www.davidrumsey.com/>.
Snyder, J. P. (1993), *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press, Chicago.
Snyder, J. P., y Ph. M. Voxland (1989), *An Album of Map Projections,* USGS Professional Paper 1453, Reston.
University of Wisconsin, Milwaukee, *Digital Map collection*, <https://uwm.edu/lib-collections/agsl-digital-map-collection/>.
U.S. Library of Congress, *World Digital Library*, <https://www.wdl.org/en/>.

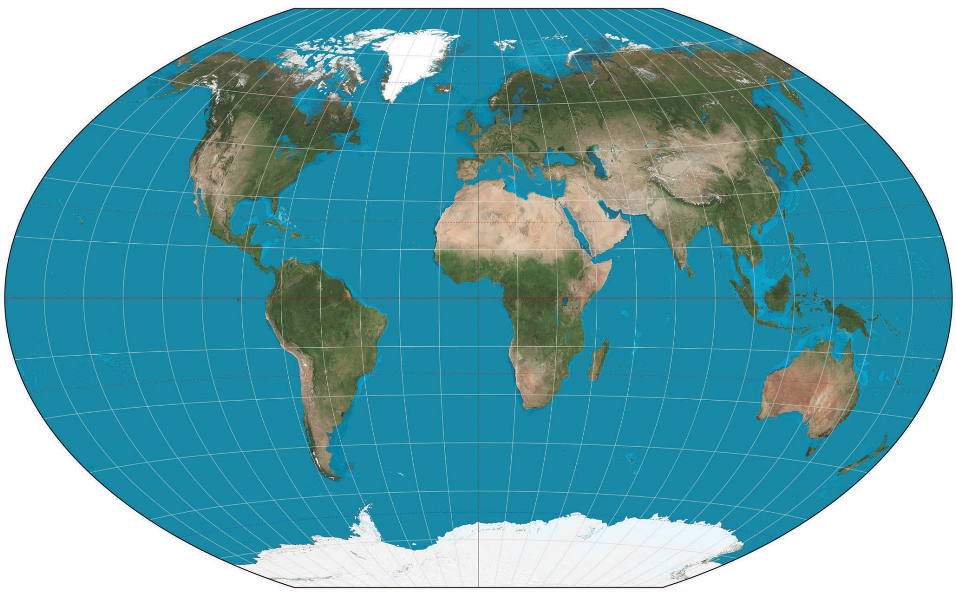

Figura 19. Mapa del mundo realizado con la proyección de Winkel tripel, que es la utilizada por *National Geographic* para los mapas del mundo entero, desde 1998

1 Una referencia clásica: *The Earliest Cosmologies,* William F. Warren, 1909 [archive.org]. Una referencia moderna y muy completa: *The Power of Stars,* Bryan E. Penprase, Springer, 2011. Tres referencias no tan exhaustivas: [Ibáñez 2010]; *El tamaño del universo*, Teodoro Vives, *Sirius,* 1994; *Historia de la cosmología,* Helge Kragh, Crítica, 2007.

2 Véase la descripción de ambas mediciones en la página web del DEM2019 de la FESPM.

3 Lo ideal sería utilizar mapamundis comerciales, aunque se pueden imprimir (teniendo cuidado de conocer la nueva escala en función del tamaño de impresión; en los mapas cilíndricos normales se puede recalcular con la longitud del paralelo del ecuador) de alguna de las páginas web sugeridas en la bibliografía.

4 Más información en Snyder y Voxland, Furuti o Wikipedia.

5 Véase «Un breve paseo por los mapas a lo largo de la historia» en la página del DEM2019 de la FESPM.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Presidente: Paulino Estévez Alonso
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidentea: M.ª Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)