Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

El método de cuadraturas de Pietro Mengoli (1625–1686)

por

M.ª Rosa Massa Esteve

Introducción

Debido a las traducciones latinas de las obras de los geómetras griegos, a finales del siglo XVI se produjo un resurgimiento de las investigaciones geométricas sobre temas arquimedianos, en particular sobre el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Desde el año 1600 al 1680, los procedimientos utilizados por distintos matemáticos dieron lugar a variadas versiones de infinitesimales e indivisibles que podríamos agrupar, *grosso modo*, en tres grandes líneas de investigación: una, relacionada con el método de exhausción, otra con el método de los indivisibles de Cavalieri y una tercera con los nuevos métodos algebraicos del siglo XVII.

La técnica de los antiguos que hoy se llama método de exhausción fue creada por Eudoxo, siendo Euclides y Arquímedes (aprox. 300. a.c.) quienes la aprovecharon en una gran variedad de caminos para determinar áreas de figuras curvilíneas planas, volúmenes, áreas de superficies y longitudes de arcos. El método consistía en establecer una doble *reductio ad absurdum*: para demostrar que $A = B$ había que probar la imposibilidad de $A > B$ y de $A < B$. Por ejemplo, Arquímedes conseguía sus cuadraturas con la ayuda de métodos mecánicos y demostraba la validez de los resultados obtenidos mediante pruebas indirectas. Medía las figuras curvilíneas aproximándolas (exhauriéndolas) mediante figuras poligonales inscritas y circunscritas. Hasta principios del siglo XVII fue casi la única técnica que se utilizó para hacer cuadraturas y su principal ventaja era que huía de las técnicas infinitesimales que planteaban problemas con el infinito. Las principales limitaciones del método de exhausción eran la utilización de pruebas indirectas y que cada proposición se demostraba sin utilizar resultados anteriores. O sea que el método no daba, ni intentaba dar, reglas nuevas para obtener nuevos resultados.

Ya a principios del siglo XVII, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) fue uno de los primeros en desarrollar un nuevo método de cuadraturas, llamado método de los indivisibles, que se encuentra explicado básicamente en dos de sus libros: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bolonia, 1635) y *Exercitationes geometricae sex* (Bolonia, 1647)[1].

La principal virtud de este método era su fertilidad, ya que resolvía problemas clásicos y nuevos, en el primer caso obteniendo resultados que coincidían con los ya conocidos por otras vías. El método se basaba en un tipo de isomorfismo: la proporcionalidad entre dos colecciones de líneas o de planos podía ser transferida a las figuras en las que se han determinado estas líneas o planos, sin que se definiera claramente si las líneas «componían» la figura o si los planos «componían» el sólido. En el método de Cavalieri no había ningún proceso de aproximación continua, ni tampoco ninguna omisión de términos, ya que lo que utilizaba era una estricta correspondencia biunívoca entre los elementos de las dos configuraciones sin despreciar nunca ningún elemento fuera cual fuera su dimensión. De hecho, durante mucho tiempo el método de los indivisibles fue discutido y criticado a causa de la poca solidez de sus fundamentos.

Otra vía para demostrar la cuadratura de las figuras mixtilíneas consistía en enunciar una regla aritmética para la suma finita de potencias expresada algebraicamente, comprobarla para dos o tres casos y deducir el valor de la suma cuando el número de sumandos tendía a infinito. A finales del siglo XVI y principios del siglo XVII, debido a la influencia de la obra *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de François Viète (1540–1603), y sobre todo de *La Géométrie* (1637) de René Descartes (1596–1650), los procedimientos algebraicos fueron cada vez más aceptados en el campo de la geometría [15, 20]. Así, algunos matemáticos, como Pierre de Fermat (1601–1665), Gilles Personne de Roberval (1602–1675) y John Wallis (1616–1703), intentaban calcular el resultado que hoy escribiríamos como lím $\frac{1^n+\cdots+t^n}{t^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ cuando t tiende a infinito[2]. Este resultado les permitía deducir las cuadraturas de las parábolas $y = x^n$ para cualquier n entero positivo. O sea, que calculaban $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

Sin embargo, lo que faltaba era encontrar un método válido en general que fuera aplicable sin ninguna modificación en cada caso particular. En su intento por hallar un método más general y más sólidamente fundamentado para calcular cuadraturas,

[1] Son las referencias [3] y [4] dadas al final del artículo. Sobre el método de los indivisibles de Cavalieri, véase [1], [9], [11], [12] y [21].

[2] Roberval, también Wallis y Fermat, hacían el límite de la suma, cuando el número de términos se hacía infinito, sin ninguna definición previa, sin ninguna demostración rigurosa y cuando lo necesitaban para sus cálculos de cuadraturas. Por ejemplo Roberval, en su *Traité des indivisibles* (1634, publicado en 1693), decía, sin demostrarlo, que la suma de la serie de los primeros n números naturales era igual a la expresión: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ y que este último término se podía despreciar cuando n es muy grande; y lo mismo con la suma de cuadrados, cubos, etc. Roberval no daba ningún tipo de justificación o prueba matemática a estas afirmaciones, sólo comprobaba que eran ciertas dando valores pequeños. Podríamos decir que el método de demostración de Roberval era una especie de inducción incompleta. Roberval, en 1636, en una carta dirigida a Fermat enunciaba la regla para encontrar la suma finita de potencias y explicaba que la utilizaba para el cálculo de las cuadraturas. También, Fermat especificaba en una carta a Cavalieri, antes de 1644, que había cuadrado las parábolas, exponiéndole la regla y un ejemplo. El propio Fermat, en 1657, demostró las cuadraturas para n racional positivo. Wallis, por su parte, también demostró estas mismas cuadraturas, en su *Arithmetica Infinitorum* (1655), utilizando la suma de potencias. Para Roberval, véase [29, pp. 171–173]. Para Fermat, véase [8, pp. 69–70, 83–84] y [10, p. 291]. Y para Wallis, véase [30, p. 384].

en particular la cuadratura del círculo, Pietro Mengoli (1625–1686), matemático boloñés discípulo de Cavalieri, hizo confluir de una manera singular estas tres líneas: el método de Arquímedes, el método de los indivisibles de Cavalieri y los nuevos métodos algebraicos de Viète. Ya en las primeras páginas de su obra *Geometriae Speciosae Elementa*, Mengoli señalaba que su método, como veremos, era una conjunción de los métodos conocidos hasta entonces:

> «Ambas geometrías, la antigua de Arquímedes y la nueva de los indivisibles de Buenaventura Cavalieri (preceptor mío), así como también el álgebra de Viète, han sido tratadas con bastante acierto por personas cultas; de ellas, ni confusamente ni como si fuese una mezcla, sino por *una perfecta conjunción*, se obtiene una nueva, la especie propia de nuestro trabajo, que no podrá desagradar a nadie.»[3]

El objetivo de este artículo es analizar el método de cuadraturas utilizado por Mengoli. Por una parte, intentaré clarificar y descodificar las herramientas matemáticas de su personal método de cuadraturas: la teoría de las cuasi proporciones y las tablas triangulares; por otra, mostraré el singular uso del lenguaje simbólico en las figuras geométricas que quería cuadrar.

1. Cuadraturas algebraicas de Mengoli (1659)

Mengoli nació en Bolonia en 1626 o en 1627[4], y su nombre aparece en el registro de la Universidad de Bolonia en el periodo 1648–1686. Estudió con Cavalieri y le sucedió en la cátedra de Matemáticas. Se graduó en filosofía en 1650, y tres años más tarde en leyes civiles y canónicas. En un primer período escribió tres obras de matemática pura: *Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum* (Bolonia, 1650), *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam et Planimetriam ornata, Maiestati Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum* (Bolonia, 1655) y *Geometriae Speciosae Elementa* (Bolonia, 1659). En 1660 fue ordenado sacerdote y hasta su muerte fue prior de la iglesia de Santa María Magdalena de Bolonia[5].

[3] «Ipsae satis amabiles litterarum cultoribus visae sunt, utraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indivisibilium nova Bonaventura Cavalierij Praeceptoris mei, necnor & Viettae Algebra: quarum, non ex confusione, aut mixtione, sed coniunctis perfectionibus, nova quaedam, & propria laboris nostri species, nemini poterit displicere» [23, pp. 2–3]. El énfasis en cursiva es mío.

[4] Aunque Fantuzzi (1788, [7]) afirma que murió el 7 de junio de 1686 a los 60 años, en el libro de bautizos consta que nació el 10 de julio de 1627. Sus años más prolíficos coincidieron con el declive de la escuela galileana y con la desaparición de los principales protagonistas de la revolución científica italiana. El final del período galileano y la creación de la *Accademia Della Traccia* (rama de la *Accademia del Cimento* en Bolonia) fueron dos acontecimientos que determinaron el tipo de aportaciones de Mengoli a la vez que la difusión de sus obras. Para los datos biográficos de Mengoli véase las obras de Natucci [25] y de M.ª Rosa Massa [14, pp. 9–26] y [18, pp. 13–15].

[5] Aunque de 1660 a 1669 no publicó nada, en 1670 aparecieron dos de sus obras: *Refrattioni e parallase solare* (Bolonia, 1670), *Speculationi di musica* (Bolonia, 1670) y, más tarde, *Circolo* (Bolonia, 1672). Estas obras reflejaban el nuevo propósito de Mengoli de investigar no únicamente sobre matemáticas puras, sino también sobre matemáticas mixtas como la astronomía, la cronología y la música. Además, su investigación estaba claramente dirigida a justificar escritos bíblicos y a hacer apología de la fe católica. Mengoli continuó escribiendo en esta línea, publicando *Anno* (Bolonia, 1675) y *Mese* (Bolonia, 1681), dos obras sobre cosmología y cronología bíblica, y *Arithmetica*

Sus obras más importantes sobre cuadraturas fueron *Geometriae Speciosae Elementa* (1659 [23], en adelante *Geometria*) y *Circolo* (1672 [24]). Mengoli calculó y demostró en la *Geometria* las cuadraturas entre 0, 1 y el eje OX de las figuras geométricas determinadas por $y = x^n(1-x)^{m-n}$ para cualesquiera números naturales m y n, lo que hoy escribiríamos

$$(m+1)\binom{m}{n}\int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}\,dx = 1. \tag{1}$$

La *Geometria*, obra con 472 páginas de matemática pura, está compuesta por seis capítulos, que denomina «elementos», y una introducción titulada *Lectori Elementario*[6]. Ya en el título «Elementos de Geometría especiosa» indica el uso singular del lenguaje simbólico en su obra y, en particular, en la geometría. Sin proponérselo, Mengoli creó una nueva parte de las matemáticas, la «geometría especiosa», basada en el álgebra «especiosa» de Viète, ya que trabajó con lenguaje «especioso», es decir, con símbolos utilizados para representar no solamente números sino también magnitudes abstractas.

La manipulación aritmética de las expresiones simbólicas permitió a Mengoli obtener nuevos resultados y nuevos procedimientos. Por ejemplo, en el *Elementum Secundum*, inventó una manera de escribir y de calcular las sumas finitas de potencias y los productos de potencias. No escribió las sumas de potencias dando valores o bien escribiendo los números con el signo + seguido de puntos suspensivos, sino que representó los números con letras y creó una construcción original y ventajosa que le permitiera calcular este sumatorio, el cual consideraba como una expresión algebraica nueva.

Mengoli consideró un número cualquiera o *tota*, representado por la letra t, y lo dividió en dos partes, abscisa «a» y residuo «$r = t - a$»[7]. A continuación consideró *tota* igual a 2, 3,... hasta 10. Además, Mengoli explicó que llamaría «sinónimos» [*synonymae*] a todos los números que separaba, a, de un mismo número, t, (así como

rationalis (Bolonia, 1674) y *Arithmetica realis* (Bolonia, 1675) sobre lógica y metafísica.

[6]En la introducción, que tiene 80 páginas, explica cada uno de los capítulos por separado. En estas explicaciones no hay demostraciones ni teoremas, aunque hay ejemplos de los resultados obtenidos en cada capítulo. En el primer capítulo, titulado *De potestatibus, à radice binomia, et residua*, demuestra las fórmulas para obtener las potencias de la suma y la diferencia de dos términos expresadas con lenguaje algebraico. El segundo, *De innumerabilibus numerosis progressionibus*, presenta los cálculos de numerosas sumas de potencias y productos de potencias, con su propia notación. En el tercero, *De quasi proportionibus*, define razón «cuasi nula», «cuasi infinita» y «cuasi un número». Con estas definiciones construye una teoría de «cuasi proporciones» basándose en la teoría de proporciones del libro V de los *Elementos* de Euclides. De hecho, Mengoli incorpora la nueva idea de cuasi razón, como antecedente del concepto actual de límite. En el cuarto capítulo, *De rationibus logarithmicis*, construye de manera análoga a la teoría de proporciones de Euclides una teoría de proporciones logarítmicas. En el quinto, *De propriis rationum logarithmis*, construye el logaritmo y sus propiedades, utilizando los resultados anteriores. En el sexto, *De innumerabilibus quadraturis*, calcula las cuadraturas de curvas que corresponden a la fórmula (1).

[7]Mengoli afirma: «Las partes de *tota* se llamarán parte separada [*abscissa*] y parte restante [*residua*], y la parte separada se representará con la letra a y la restante con r» [«2. Et partes Totae, dicentur, Abscissa, & Residua: & significabitur abscissa, charactere a; & *residua* r»]. Véase [23, p. 21].

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & O.u & & & & \\
 & & & O.a & & O.r & & & \\
 & & O.a^2 & & O.ar & & O.r^2 & & \\
 & O.a^3 & & O.a^2r & & O.ar^2 & & O.r^3 & \\
O.a^4 & & O.a^3r & & O.a^2r^2 & & O.ar^3 & & O.r^4
\end{array}
$$

Figura 1: *Tabula speciosa.*

a los restantes, r, que le quedaban) y los sumaría obteniendo sumatorios del tipo

$$
\begin{array}{lcl}
O.u & = & (t-1), \\
O.a & = & 1+2+3+\cdots+(t-1), \\
O.r & = & (t-1)+(t-2)+(t-3)+\cdots+1, \\
O.a^2 & = & 1^2+2^2+3^2+\cdots+(t-1)^2, \\
O.ar & = & 1(t-1)+2(t-2)+3(t-3)+\cdots+(t-1)1.
\end{array}
$$

Así, si t es 3, el sumatorio $O.a = \sum_{a=1}^{a=t-1} a$ valdrá 3, que es la suma de 1 y 2. Si t es 4, el sumatorio valdrá 6, la suma de 1, 2 y 3, etc. Mengoli ordenó todos estos sumatorios en una tabla triangular que llamó tabla «de las especies»[8] (ver Figura 1) y calculó y demostró el valor de estos sumatorios utilizando el número t como punto de partida para su construcción [13, p. 267].

A lo largo del libro, Mengoli introdujo, como herramientas útiles para sus cálculos, tablas triangulares inspiradas por el triángulo combinatorio (también conocido como el triángulo aritmético)[9]. En el *Elementum Primum* de la *Geometria*, los términos de las tablas triangulares son números y son utilizadas para obtener el desarrollo de cualquier potencia de un binomio. En el *Elementum Secundum*, los términos son sumatorios y son usadas para obtener sus valores. Finalmente, en el *Elementum Sextum* y en el *Circolo*, los términos son figuras geométricas (llamadas por Mengoli «formas») y son usadas para obtener las cuadraturas de estas figuras geométricas.

La originalidad de Mengoli radica no en la definición o presentación de las tablas triangulares, sino en su tratamiento. Por un lado, Mengoli usó el lenguaje simbólico y el triángulo combinatorio para crear nuevas tablas con expresiones algebraicas, estableciendo claramente sus leyes de formación; por otro lado, utilizó las relaciones entre los sumatorios y los números del triángulo combinatorio para demostrar uno de los resultados importantes de su libro: la expresión del sumatorio de las potencias de exponente m de los primeros $t-1$ enteros.

En efecto, como ya hemos señalado en la introducción, la fórmula de las sumas de cuadrados, cubos y otras potencias de enteros fue crucial para el desarrollo de la integración en el siglo diecisiete. Mengoli llegó a este resultado independientemente de Roberval, Fermat y Wallis, utilizando el lenguaje simbólico para expresar los

[8]El nombre procede claramente de Viète y su *Logistica speciosa*. Véase [28].

[9]El triángulo combinatorio es nombrado en la historia de las matemáticas como el triángulo de Pascal ya que Blaise Pascal (1623–1662) explicó y demostró sus propiedades en un estilo muy claro (véase [2, 26, 6]). Mengoli probablemente no conoció el tratado de Pascal ya que fue publicado en 1665, pero podía haber conocido su fuente, el *Cursus Mathematicus* (1634, 1637 y 1642) de Pierre Hérigone (1580–1643), véase [19].

sumatorios, un procedimiento que le permitió obtener un cierto grado de generalización. Como ellos, encontró una regla con la que se obtiene el valor de la suma de las potencias de exponente m. Sin embargo, además de establecer la regla, Mengoli también la demostró y la utilizó para obtener los sumatorios expresando estos cálculos en lenguaje simbólico.

La idea de Mengoli era que las letras, además de representar un número dado o una incógnita, también pudieran representar variables, es decir, cantidades «indeterminadas pero determinables»:

> «Cuando escribo $O.a$, después del capítulo precedente, tengo inmediatamente la suma de todas las abscisas. Pero qué valor es esta suma, aún no sabes, si no escribes de qué número [estás calculando] el sumatorio. Pero lo sabes si asignas que $O.a$ es la suma [obtenida a partir] del número t. Y de esta manera no sabes cuánto es, si al mismo tiempo no asignas cuál es el valor de la letra t. Pero cuando te permita que fijes un valor cualquiera para la letra t, y tú, utilizando este permiso, digas que vale 5, al instante ciertamente asignarás que $O.a$ vale 10, que t^2 vale 25, que t^3 vale 125, y que $O.r$ vale 10, y si las letras t están determinadas las cantidades $O.a$, $O.r$, t^2, t^3 estarán determinadas. Por lo que, antes que tú hayas utilizado el permiso dado, tenías ciertamente $O.a$, $O.r$, t^2, t^3, cantidades [que son] determinables pero [cantidades] indeterminadas.»[10]

Los sumatorios eran cantidades indeterminadas, pero podían ser determinadas cuando se conocía el valor de t. Asignando diferentes valores a t, Mengoli explícitamente introdujo el concepto de «variable», una noción que probablemente no era conocida, y señaló además la dependencia entre el valor de t y el valor de la suma.

Mengoli aplicó su idea de variable al cálculo de las cuasi razones de estas sumas. O sea que el valor de una razón es también indeterminado pero es determinable dando sucesivos valores a t. La razón, efectivamente, no toma este valor, el cual podemos interpretar como su valor potencial; más bien, tiende a él a medida que aumenta t. Es en este sentido que Mengoli entiende la expresión «razón indeterminada determinable». Mengoli continuó dando ejemplos y clarificó su noción de «razón cuasi un número». Consideró los valores que tomaba la razón de $O.a$ a t^2 hasta $t = 10$ (por ejemplo, si $t = 3$ la razón es $3 : 9$; para $t = 4$, $6 : 16$;...; para $t = 10$, $45 : 100$) y argumentó que la diferencia entre $\frac{1}{2}$ y la razón $O.a : t^2$, que está determinada cuando el valor de t aumenta, es más pequeña que la diferencia entre $\frac{1}{2}$ y cualquier otra razón dada. El límite de esta sucesión de razones o de esta razón, en la medida en que es así determinable, es $\frac{1}{2}$, y la denomina «razón cuasi $\frac{1}{2}$». La

[10] «Cum scriptero O.a, statim ex praecedenti capite habes massam ex omnibus adscissis: sed quota sit haec massa, nondum habes, nisi scriptero, cuius numeri sit massa. Quod si assignavero O.a, numeri t massam esse; neque sic habes, quota sit, nisi simul assignavero, quotus est numerus, valor litterae t... Cum verò licentiam dedero, ut quotum quemque litterae t valorem taxes; tuque huiusmodi usus licentia dixeris, t valere quinario: statim profecto assignabis & O.a, valere 10; & t2 valere 25; & t3 valere 125; & O.r, valere 10; & determinatae litterae t, determinatas esse quantitates O.a, O.r, t2, t3, quantitates indeterminatas determinabiles» [23, p. 61]. Nótese que Mengoli no eleva los exponentes, los escribe al mismo nivel que las letras.

idea de «razón cuasi un número» sugiere, aunque de manera imprecisa, el concepto moderno de límite.

Esta noción, conjuntamente con la idea de razón indeterminada determinable fue usada, como mostramos a continuación, en las definiciones básicas de razón «cuasi infinita», «cuasi nula» y «de cuasi igualdad» del *Elementum Tertium*:

1. Una razón indeterminada determinable que, al determinarse, puede ser mayor que cualquier [razón] dada, en la medida en que es determinable, se llamará *cuasi infinita.*
2. Y si puede ser menor que cualquier [razón] dada, en la medida en que es determinable, se llamará *cuasi nula.*
3. Y si puede ser menor que cualquier razón mayor que la igualdad; y mayor que cualquier razón menor que la igualdad, en la medida en que es determinable, se llamará de cuasi igualdad. O bien, dicho de otra manera, que pueda ser más próxima a la igualdad que cualquier razón dada que no sea la igualdad, en la medida en que sea tal, se llamará de *cuasi igualdad*[11].

Mengoli probó que las cuasi proporciones así definidas cumplían todas las propiedades (*permutando*, *componendo*,…) de la teoría de proporciones de Euclides, estableciendo así su nueva teoría de cuasi proporciones sobre pilares sólidos. Siguiendo estas definiciones, Mengoli estableció razones entre todo tipo de sumatorios (construidos usando t, y que tienen $t-1$ sumandos con diferentes potencias) y potencias del número t, y demostró a qué tendían estas razones cuando t tiende a infinito, obteniendo así numerosas cuasi razones. Concretamente, en el Teorema 42, Mengoli demostró que

$$(m+1)\binom{m}{n}\sum_{a=1}^{a=t-1} a^n(t-a)^{m-n} \tag{2}$$

tiende a t^{m+1} cuando t tiende a infinito, en el sentido de que su razón puede devenir arbitrariamente cerca de la igualdad haciendo t suficientemente grande [13, 20]. Basó esta demostración en el Teorema 22 y en otro teorema en el que había previamente

[11] «4. Y si puede ser menor que cualquier razón mayor que una razón dada; y mayor que cualquier razón menor que la misma razón dada, en la medida en que es determinable, se llamará cuasi igual a esta razón. O bien, de otra manera, que pueda ser más próxima a cualquier razón dada que cualquier otra razón que no sea igual a ésta, en la medida en que es determinable, se llamará *cuasi igual a la razón dada.* 5. Y los términos de razones cuasi iguales entre sí se llamarán *cuasi proporcionales.* 6. Y [los términos] de razones de cuasi igualdad se llamarán *cuasi iguales.*» [«1. Ratio indeterminata determinabilis, quae in determinari potest esse maior, quam data quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicetur Quasi infinita. 2. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi nulla. 3. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet maior inaequalitas; & maior, quàm data quaelibet minor inaequalitas, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi aequalitas. Vel aliter, quae potest esse propior aequalitati, quàm data quaelibet non aequalitas, quatenus talis, dicetur, Quasi aequalitas. 4. Et quae potest esse minor, quàm data quaelibet maior, proposita quadam ratione; & maior, quàm data quaelibet minor, proposita eadem ratione, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quasi eadem ratio. Vel aliter, quae potest esse propior cuidam propositae rationi, quàm data quaelibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quasi eadem. 5. Et rationum quasi earundem inter se, termini, dicentur, Quasi proportionales. 6. Et quasi aequalitatum, dicentur, Quasi aequales.»] Véase [23, pp. 97–98]. El énfasis en cursiva es mío.

demostrado que las potencias más pequeñas podían ser ignoradas cuando t aumenta. En el Teorema 22 del *Elementum Secundum* de la *Geometria* había probado que

$$(2) = t^{m+1} - P(t^s). \tag{3}$$

Aquí, $P(t^s)$ significa un polinomio con una variable t de grado menor o igual que m, con coeficientes del mismo tipo que los «números de Bernoulli» dependiendo de números combinatorios.

Entonces, en el Teorema 41 del *Elementum Tertium*, demostró la razón de cuasi igualdad siguiente:

$$t^{m+1} \text{ es cuasi igual a } t^{m+1} - P(t^s).$$

Se sigue en el Teorema 42 que

$$(2) \text{ es cuasi igual a } t^{m+1}. \tag{4}$$

Esta cuasi razón, que utilizó después para demostrar las cuadraturas, no dependía del valor de t, pudiéndose utilizar para cualquier potencia natural, ya que las razones las establecía comparando los grados de las expresiones algebraicas.

Mengoli desarrolló su análisis algebraico de las figuras geométricas en el *Elementum Sextum*, titulado *De innumerabilibus quadraturis*. Aquí calculó, con su nuevo método, las cuadraturas de las figuras mixtilíneas en el intervalo $(0, t)$ determinadas por expresiones que actualmente tienen la forma $y = kx^n(t-x)^{m-n}$.

En la carta dedicatoria a Cassini de este *Elementum*, Mengoli calculó y demostró los valores de estas cuadraturas por el método de los indivisibles de Cavalieri (véase [21]). Después de mostrar que conocía y sabía aplicar el método de los indivisibles, reconocía que no había publicado estas cuadraturas a causa de los ataques que había recibido el método de su maestro, y además especificaba que se proponía dar fundamentos sólidos a un método nuevo para calcular cuadraturas[12].

Para ello Mengoli describió su propio sistema de coordenadas, definiendo la abscisa y la ordenada. Propuso un segmento de línea recta de cualquier medida, que llamó «Rationalis». Utilizó la palabra abscisa como nuestra x, pero en un segmento que mide la unidad o t. Trabajó siempre en una base finita en la cual la abscisa estaba representada por la letra «a» y el residuo por la letra «$r = t - a$» o bien «$1 - a$», dependiendo si la base tenía un valor dado t o la unidad 1. Respecto a la palabra «ordenada»[13], definió primero las ordenadas de figuras conocidas, tales

[12] «Mientras tanto dejé de lado este añadido hecho a la *Geometría de los indivisibles*, teniendo miedo de la autoridad de los que juzgan falsa la hipótesis que todas las infinitas rectas de una figura plana sean la misma figura plana; lo dejé no porque fuese de esta opinión sino que la esquivé porque la encontraba dudosa e intenté, si me era posible, establecer fundamentos nuevos y seguros para el mismo método de los indivisibles o para otros métodos nuevos que fuesen equivalentes». [«Ipsam interim accessionem, quam Geometriae Indivisibilium feceram, praeterivi: veritus eorum authoritatem, qui falsum putant suppositum, omnes rectas figurae planae infinitas, ipsam esse figuram planam: non quasi hanc sequens partem; sed illam quasi non prorsus indubiam devitans: tentandi animo, si possem demum eamdem indivisibilium methodum, aut aliam equivalentem novis, & indubijs prorsus constituere fundamentis.»] Véase [23, p. 364].

[13] Mengoli utilizó la palabra «ordinata» en lugar de la palabra «applicata» que se utilizaba en aquel tiempo. Descartes definió las ordenadas como «celles qui s'appliquen par ordre» [5, p. 67]. Mengoli en *Circolo* (1672) las llamó «ordinatamente applicate» [24, p. 5].

como el cuadrado (o rectángulo) y el triángulo a partir de su construcción sobre cada punto de la base. En el caso de las figuras mixtilíneas no definió las ordenadas a través de su construcción, sino que explicó que eran iguales a las abscisas o a las potencias de las abscisas y las llamó «ordenadas en forma». La igualdad entre las ordenadas y las potencias de la abscisa era expresada por medio de proporciones tales como $1 : y = (1 : x)^n$.

Mengoli describió las figuras geométricas que quería cuadrar como extendidas por sus ordenadas. Representó estas figuras (a las cuales refiere como «formas») por medio de una expresión algebraica, escrita, en notación de Mengoli, como $FO.a^n r^{m-n}$, donde «$FO.$» denota la forma, «a» expresa la abscisa (x) y «r» el residuo $(1 - x)$. Llamó a la expresión «forma de todos los productos de n abscisas y $m-n$ residuos». Es importante prestar atención a este pasaje de la obra de Mengoli ya que considero que aquí su investigación era muy original. Mengoli utilizaba nuevos símbolos, que había asociado a figuras geométricas, para sus cálculos algebraicos. Empezó con las figuras conocidas tales como el cuadrado y el triángulo y acabó generalizando con una figura mixtilínea cualquiera:

> «23. Y generalizando si sobre la base una figura es construida, no extendida por ordenadas en el cuadrado, en la cual una ordenada cualquiera es asumida como algún elemento de la tabla proporcional; esta figura será llamada «Forma de todos los tales proporcionales» y será representada por los caracteres adecuados. Por ejemplo, «Forma de todas las abscisas terceras», $FO.a^3$, «Forma de todos los productos de las abscisas segundas y los residuos», $FO.a^2r$, «Forma de todos los productos de la abscisa y de los residuos segundos», $FO.ar^2$, «Forma de todos los residuos terceros», $FO.r^3$ y así sucesivamente.»[14]

Sin embargo, Mengoli tenía que asegurar que cada una de las expresiones algebraicas definidas, que eran nuevos objetos algebraicos, podía ser asociada a una figura geométrica definida. Para ello demostró cómo construir la ordenada de la curva, correspondiente a una figura geométrica, por un punto dado utilizando su expresión algebraica [17, pp. 101–102]. Aquí Mengoli no solamente trabajó con proporciones de segmentos, sino que también identificó los segmentos con las letras de la expresión algebraica e igualó el producto de segmentos con la composición de razones utilizando la teoría de proporciones euclidiana como elemento de conexión. O sea que estableció una relación de identificación entre los objetos algebraicos y las figuras geométricas que le permitía trabajar con estas figuras utilizando sus expresiones algebraicas.

Mengoli procedió a trabajar con estos nuevos objetos algebraicos y dispuso estas expresiones algebraicas en tablas triangulares de manera similar a como había hecho con los sumatorios a fin de poder calcular simultáneamente todas las cuadraturas

[14] «23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinata in quadrato: & in qua, unaquaelibet ordinata, est assumpta quaedam in tabula proportionalium: dicetur, forma omnes tales proportionales, aptoque significabitur charactere. Vt forma omnes abscissae tertiae, FO.a3: forma omnes biprimae, FO.a2r: forma omnes unisecundae, FO.ar2: forma omnes residuae tertiae, FO.r3. & sic deinceps» [23, p. 369].

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & FO.u & & & \\
 & & FO.a & & FO.r & & \\
 & FO.a^2 & & FO.ar & & FO.r^2 & \\
FO.a^3 & & FO.a^2r & & FO.ar^2 & & FO.r^3
\end{array}
$$

Figura 2: *Tabula formosa*.

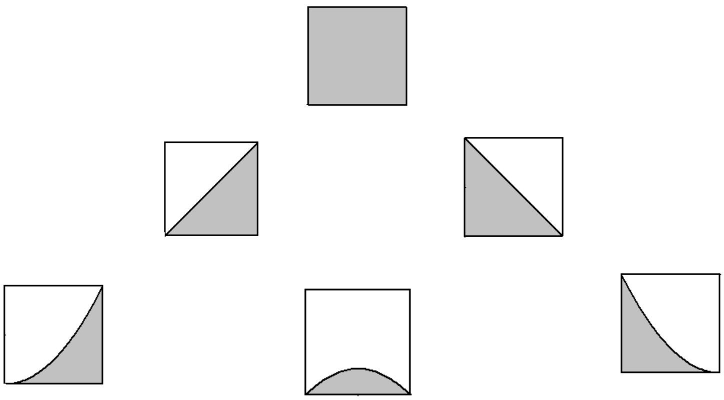

Figura 3: Dibujos de la autora para el vértice y las primeras filas de la Figura 2.

de las figuras de la tabla de la Figura 2. En ella el vértice representa un cuadrado de lado 1; las dos figuras de la primera fila (llamada por Mengoli «base de orden uno») representan dos triángulos; las tres figuras de la segunda fila (la «base de orden dos») están determinadas por las ordenadas de una parábola[15], y así en las otras filas (véase la Figura 3).

A partir de esta tabla, Mengoli obtuvo dos tablas triangulares más. De hecho multiplicó cada término $FO.a^n r^{m-n}$ de la *Tabula formosa*, primero por el coeficiente del binomio $\binom{m}{n}$ (*Tabula subquadraturarum*) y después por el número de orden de la fila más una unidad, $m+1$, obteniendo así una nueva tabla llamada *Tabula quadraturarum* (ver Figura 4) en la que Mengoli demuestra que los términos toman todos el valor 1:

$$(m+1)\binom{m}{n}FO.a^n r^{m-n} = 1,$$

fórmula que en notación moderna se escribe en la forma (1) dada al inicio de esta sección.

Analicemos en detalle la demostración de estas cuadraturas.

[15]Se trata de las parábolas $y = x^2$, $y = x(1-x)$ e $y = (1-x)^2$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & FO.u & & & \\
 & & FO.2a & & FO.2r & & \\
 & FO.3a^2 & & FO.6ar & & FO.3r^2 & \\
FO.4a^3 & & FO.12a^2r & & FO.12ar^2 & & FO.4r^3
\end{array}
$$

Figura 4: *Tabula quadraturarum.*

1.1. La demostración de las cuadraturas

Para la demostración de estas cuadraturas Mengoli utilizó la teoría de cuasi proporciones estableciendo dos cuasi igualdades. Por una parte, demostró que la figura que quería cuadrar es cuasi igual a una figura nueva, la «adscrita» a ella, y por otra, que el cuadrado de lado uno, la figura del vértice de la tabla, es cuasi igual a esta figura adscrita.

Para la primera cuasi igualdad utilizó las definiciones de figura inscrita y figura circunscrita de Arquímedes. La figura inscrita está formada por los paralelogramos máximos incluidos en la figura, la figura circunscrita por los paralelogramos mínimos que incluyen la figura. En cambio, la figura adscrita está formada por los paralelogramos construidos sobre las ordenadas correspondientes al primer extremo de la división (o bien sobre el último, como se ve en la Figura 5)[16].

Mengoli utilizó la definición de cuasi igualdad del *Elementum Tertium* para demostrar que la figura adscrita y la figura (forma) que quería cuadrar, formada por las ordenadas, eran cuasi iguales. Por un lado, demostró que la circunscrita excede a la adscrita en una cantidad rectangular determinada por la ordenada máxima y una de las partes de la base y, por otro, que la adscrita excede a la inscrita en una cantidad no mayor. También demostró que la circunscrita y la inscrita son cuasi iguales, o sea que es posible encontrar un número de divisiones de la base que haga que la razón entre la circunscrita y la inscrita se aproxime más a la igualdad que cualquier otra razón diferente de la igualdad. Al ser la figura a cuadrar y la adscrita figuras que se encuentran entre la circunscrita y la inscrita, y al ser estas últimas cuasi iguales, la figura a cuadrar y la adscrita son cuasi iguales.

Esta es una demostración a la manera de Arquímedes, pero utilizando el método directo de las cuasi razones en vez del método indirecto de reducción al absurdo. Otra diferencia con el método de exhausción es que, en él, se utiliza directamente la figura que se quiere cuadrar entre la circunscrita y la inscrita; en cambio, Mengoli usa una figura nueva, que llama adscrita, formada por rectángulos finitos.

Para establecer la segunda cuasi igualdad demostró previamente la proporción entre la razón del cuadrado (de lado 1) y la figura adscrita por una parte, y la potencia de t y la suma de potencias por otra (Proposición 8). En notación moderna,

[16] Si las figuras a cuadrar crecieran o decrecieran monótonamente la figura formada por paralelogramos construidos sobre las ordenadas podría coincidir con la inscrita o con la circunscrita, pero Mengoli también considera las figuras que no son monótonas, o sea que primero crecen y después decrecen. Por eso trabaja con esta nueva figura adscrita que además también es necesaria para poder establecer una segunda proporción con un número de rectángulos finitos.

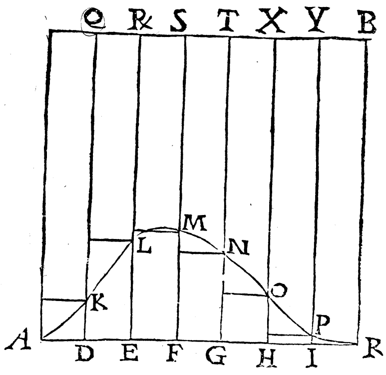

Figura 5: Figura geométrica de la Proposición 8 de la *Geometria* de Mengoli.

usando la expresión sumatoria (2) dada antes en el Teorema 42,

$$\frac{\text{Cuadrado}}{\text{Figura adscrita}} = \frac{t^{m+1}}{(2)}. \tag{5}$$

Consideremos ahora la demostración de (5) en detalle, con referencia a la Figura 5[17].

Mengoli desarrolló esta demostración para la curva correspondiente a la expresión $FO.10a^2r^3$ de la quinta fila de la tabla de las «subcuadraturas», o bien $FO.60a^2r^3$ de la quinta fila de la tabla de las «cuadraturas»[18] (como señalaremos más abajo, el procedimiento puede ser generalizado para cualquier entrada en estas tablas). Mengoli dividió la base del cuadrado en t partes iguales (tomó 7 partes en la Figura 5) y sobre ellas construyó las ordenadas de la figura mixtilínea y las del cuadrado y, con ellas, los rectángulos de la figura adscrita y del cuadrado de lado 1. Primero estableció una proporción para cada rectángulo de la figura adscrita y del cuadrado. Cabe señalar que como cada rectángulo tiene la misma base, para cada división la razón de los rectángulos es la misma que la razón de las ordenadas; así, para el primer elemento de la división,

$$\frac{\text{rectángulo del cuadrado } (AQ)}{\text{rectángulo de la figura adscrita } (AK)} = \frac{DQ}{DK},$$

siendo DQ la ordenada del cuadrado y DK la ordenada de la figura.

Pero la ordenada del cuadrado es igual a la base del cuadrado, así que podía aplicar la proporción entre la base del cuadrado, que es la unidad y la ordenada de

[17]Cabe señalar que, en la *Geometria*, hay solamente tres dibujos de estas figuras geométricas, mientras en el *Circolo* Mengoli no incluyó ningún dibujo.

[18]Recordemos que la forma $FO.a^2r^{5-2}$ corresponde en notación actual a la curva $y = x^2(1-x)^{5-2}$ y la subcuadratura y la cuadratura indicadas corresponden a las áreas bajo esta misma curva afectada de los coeficientes que se indican: $10 = \binom{5}{2}$ y $60 = 6 \cdot 10$, con $6 = 3 + 2 + 1$.

la figura geométrica. En el caso del primer elemento de la división se puede escribir

$$DQ : DK = (1:10)\cdot\left(1:\frac{1}{t}\right)^2\cdot\left[1:\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]^3 = 1:\frac{10\cdot 1^2\cdot(t-1)^3}{t^5}.$$

Por tanto, para los rectángulos (AQ) del cuadrado y (AK) de la figura adscrita, se cumple que

$$AQ : AK = DQ : DK = t^5 : 10\cdot 1^2\cdot(t-1)^3.$$

En el caso del segundo elemento de la división, se puede también establecer la proporción entre el rectángulo (DR) del cuadrado y el rectángulo (DL) de la figura adscrita, siendo

$$DR : DL = t^5 : 10\cdot 2^2\cdot(t-2)^3,$$

y así indefinidamente para los otros elementos.

Por un lado, en los consecuentes Mengoli sumó todos los $t-1$ rectángulos para obtener la figura adscrita y, por otro lado, obtuvo una suma finita de potencias (la correspondiente al Teorema 42). Respecto a los antecedentes, los multiplica por t y obtiene, por un lado, el cuadrado AB y, por otro lado, t^6. O sea que, por homología[19], multiplicando ambos antecedentes por t y sumando los consecuentes, estableció la proporción siguiente:

$$\frac{FO.u}{\text{Adscrita } FO.10a^2r^3} = \frac{t^6}{10\sum_{a=1}^{t-1} a^2(t-a)^3}. \tag{6}$$

Cabe señalar que la justificación de esta proporción está basada en la identificación de la expresión algebraica y la figura geométrica por medio de una proporción entre segmentos y cantidades.

Luego, en la Proposición 10, Mengoli estableció que «Todas las cuadraturas sobre la misma base son iguales una a otra»[20] y en la demostración usó la proporción (6) con ambos consecuentes multiplicados por 6, obteniendo

$$\frac{FO.u}{\text{Adscrita } FO.60a^2r^3} = \frac{t^6}{60\sum_{a=1}^{t-1} a^2(t-a)^3}. \tag{7}$$

Mengoli aplicó la teoría de cuasi proporciones a esta proporción. Implícitamente asumió que la proporción continúa siendo válida cuando el número de rectángulos en la parte izquierda deviene infinito y el número de sumandos de la parte derecha también. Como había demostrado con la teoría de cuasi proporciones que la segunda razón es una razón de cuasi igualdad (Teorema 42), entonces la primera razón entre el cuadrado y la figura adscrita es también de cuasi igualdad.

[19]Mengoli define la palabra «homología» en el primer *Elementum*, donde trata con las fórmulas de las potencias de los binomios y de los residuos. En el Teorema 2, Mengoli demuestra que «Cantidades proporcionales, por homología son proporcionales», donde homología representa las operaciones euclidianas de las proporciones: *convertendo*, *addendo*, *multiplicando*, *aequepartendo*, *permutando*, *dividendo*, etc.

[20]«Theor. 6. Prop. 10. Omnes quadraturae super eadem basi constitutae, sunt inter se aequales.» [23, p. 386].

Una vez establecidas las dos cuasi igualdades, una entre la adscrita y la figura a cuadrar, y la otra entre la adscrita y el cuadrado, Mengoli utilizó un teorema anterior que demuestra que, dadas dos razones de cuasi igualdad con antecedentes iguales, éstas tendrán también los consecuentes iguales.

Cuando Mengoli demostró que la suma de potencias y la potencia de t con el número de sumandos tendiendo a infinito eran cuasi iguales, se podía naturalmente pensar que Mengoli utilizaría esta cuasi igualdad para calcular el área de la curva asociada a este sumatorio. Pero no lo hizo. No intentó hallar el área de la figura directamente a través del valor de la suma cuando el número de líneas o rectángulos aumenta, y de esta manera se evitó el problema que tuvo Cavalieri para justificar si «todas las líneas» eran iguales a la figura. Mengoli, a diferencia de Cavalieri, nunca comparó dos figuras a través de la comparación de líneas, nunca superpuso figuras, sino que estableció cuasi razones entre figuras.

El punto débil de esta demostración es el paso de una razón de cuasi igualdad entre un sumatorio de potencias y una potencia (o sea entre números) a una razón entre unas figuras geométricas, el cuadrado y la adscrita. Dado que Mengoli había basado la teoría de cuasi proporciones sobre la teoría de proporciones euclidiana, para él su nueva teoría de cuasi proporciones es válida para cualquier magnitud, figura o número. Cabe señalar que esta demostración es independiente de la representación gráfica de la figura geométrica y del grado de la expresión algebraica, y puede ser utilizada en todos los casos en los que se conoce la cuasi razón de las sumas de potencias.

2. La cuadratura del círculo (1672)

Sin embargo, la figura que Mengoli quería cuadrar era el círculo, y es por este motivo que calculó las áreas en el intervalo (0,1). Fue en una obra posterior donde interpoló la tabla de figuras (*Tabula formosa*) y la tabla de valores de las áreas de estas figuras calculadas en la *Geometria*. Así, en 1672 publicó *Circolo*, en cuyas páginas iniciales explica que ya en el año 1660 había obtenido la cuadratura del círculo, aunque sin darla a conocer. Ahora se decidía a publicarla pues necesitaba este resultado para las reglas de los solsticios y de los equinoccios.

La obra consta de 60 páginas y su estructura es diferente de la *Geometria*, sin definiciones, sin teoremas ni problemas. Contiene 160 párrafos numerados, sin demostraciones y sin dibujos de las figuras geométricas que cuadra; en el texto únicamente aparecen tablas triangulares, cálculos y explicaciones. Mengoli calculó y demostró en el *Circolo* las cuadraturas entre 0, 1 y el eje OX de las figuras geométricas determinadas por $y = x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{m-n}{2}}$ para cualesquiera números naturales m y n, y que hoy escribiríamos[21]

$$\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{m-n}{2}}\,dx = \frac{1}{(\frac{m}{2}+1)\binom{m/2}{n/2}}. \tag{8}$$

[21] Las integrales (8) son las funciones Beta de hoy, en particular $B(\frac{n}{2}+1, \frac{m-n}{2}+1)$ [22].

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1/2 && 1/2 &&& \\ && 1/3 && 1/6 && 1/3 && \\ & 1/4 && 1/12 && 1/12 && 1/4 & \\ 1/5 && 1/20 && 1/30 && 1/20 && 1/5 \end{array}$$

Figura 6: Triángulo armónico.

Mengoli obtiene la cuadratura del círculo mediante el área entre 0 y 1 y el eje de abscisas de la figura descrita por la expresión algebraica $y = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ (que corresponde al semicírculo de radio $\frac{1}{2}$), de valor $\frac{\pi}{8}$, y muchas otras cuadraturas no calculadas anteriormente. Cabe señalar que, antes de Newton y Leibniz, cuando los matemáticos querían obtener cuadraturas de figuras geométricas determinadas por expresiones algebraicas con raíces tenían que hacerlo caso por caso.

Fue precisamente en el *Circolo* donde las tablas triangulares cobraron verdadero protagonismo. Mengoli halló el instrumento generalizador en las tablas triangulares y en el álgebra, ya que las tablas se podían extender indefinidamente, eran fáciles de construir y las expresiones algebraicas le permitían identificar las figuras dentro de la tabla.

Por un lado, Mengoli construyó una tabla triangular de valores numéricos de las cuadraturas calculadas en la *Geometria*, que no es más que el hoy llamado triángulo armónico, ver Figura 6[22]. Mengoli identificó estos números con los valores de las cuadraturas de la *Tabula formosa* (Figura 2) como consecuencia de la Proposición 10 (ver la sección 1.1). En efecto, escribió el triángulo armónico y debajo la *Tabula formosa* explicando la identificación por homología de los términos de las dos tablas [22]. Por otro lado, Mengoli interpoló las figuras geométricas que había cuadrado en la *Geometria* y las dispuso en otra tabla triangular obteniendo la *Tabula formosa* interpolada de la Figura 7. A continuación, Mengoli construyó también, usando las propiedades de los números combinatorios del triángulo combinatorio y de los números figurados, una tabla interpolada de valores de las cuadraturas, que de hecho no es más que el triángulo armónico interpolado, y de nuevo por homología identificó los valores de ambas tablas [22, pp. 337–345].

Con la ayuda de las propiedades del triángulo combinatorio, Mengoli fue capaz de rellenar el triángulo combinatorio interpolado, excepto para un número desconocido «a» que está estrechamente relacionado con la cuadratura del círculo ($\frac{1}{2a} = \frac{\pi}{8}$)[23]. Mengoli calculó sucesivas aproximaciones del número «a» obteniendo una aproximación del número π con once decimales exactos.

[22]El triángulo armónico, también llamado triángulo de Leibniz, está formado por los recíprocos de los elementos (coeficientes binomiales) del triángulo combinatorio multiplicados por el número de orden de las filas más una unidad. Su definición está relacionada con las diferencias sucesivas de la serie armónica [6].

[23]De hecho, en la construcción del triángulo armónico interpolado Mengoli interpola los números combinatorios y llama «a» al número combinatorio $\binom{1}{1/2}$. Nótese que $\frac{\pi}{8}$ es el área del semicírculo que se cuadra, siendo $\frac{\pi}{8} = B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

$$\begin{array}{c}
FO.u \\
FO.a^{\frac{1}{2}} \qquad FO.r^{\frac{1}{2}} \\
FO.a \qquad FO.(ar)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.r \\
FO.a^{\frac{3}{2}} \qquad FO.(a^2r)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.(ar^2)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.r^{\frac{3}{2}} \\
FO.a^2 \qquad FO.(a^3r)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.ar \qquad FO.(ar^3)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.r^2 \\
FO.a^{\frac{5}{2}} \qquad FO.(a^4r)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.(a^3r^2)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.(a^2r^3)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.(ar^4)^{\frac{1}{2}} \qquad FO.r^{\frac{5}{2}}
\end{array}$$

Figura 7: *Tabula formosa* interpolada.

3. Conclusión

El estudio de la obra de Mengoli revela que la base de su nuevo método de cuadraturas no era el método de los indivisibles de su maestro Cavalieri, sino el triángulo aritmético y la teoría de cuasi proporciones. Así elaboró una teoría numérica de sumas de potencias y límites de estas sumas que no tienen nada que ver con las *Omnes lineae* de Cavalieri. No está clara la razón por la que Mengoli no siguió el camino de su maestro. Quizás fuera debido a que el método de Cavalieri había recibido muchas críticas y Mengoli no podía dejar de ser sensible a ellas. Quiso buscar nuevos métodos, con fundamentos más sólidos, introduciendo en sus cálculos el álgebra de Viète a través de las tablas triangulares y la teoría de las cuasi proporciones. Seguramente porque quería alejarse del método de los indivisibles y de sus críticas, Mengoli recurrió a este nuevo lenguaje algebraico. En este sentido, podemos decir que era «moderno». Pero Mengoli era clásico en la forma de presentar su obra y su pensamiento, ya que uno de sus grandes pilares fue *Elementos* de Euclides. La teoría de proporciones euclidiana era una de las bases de su matemática [16]. Con la teoría de proporciones construyó la teoría de cuasi proporciones. Esta teoría, sin embargo, muestra también que era innovador ya que trabajó con el infinito, comparó infinitos de diferente orden y demostró numerosas cuasi proporciones. Mengoli, por tanto, siguiendo una investigación muy original «conjuntó perfectamente» en su obra la matemática clásica, representada en este caso por Euclides (teoría de proporciones) y Arquímedes (método de exhausción), el método de los indivisibles de su maestro y la matemática innovadora de aquel momento, representada por el álgebra de Viète.

Aunque su método fuera singular, es una realidad que muchos matemáticos de la época no se lo leyeron debido a su manera de escribir enrevesada y poco clara. Mengoli elaboró un lenguaje algebraico propio, donde la notación, a medida que se avanzaba, se complicaba cada vez más. Además, los procedimientos que Mengoli utilizó para introducir el álgebra en la geometría quedaron obsoletos en pocos años a causa de las influyentes y fructíferas nuevas teorías del cálculo de fluxiones de Newton y el cálculo infinitesimal de Leibniz. También pudieron influir factores externos, ya que durante la segunda mitad del año 1600 se produjo en Bolonia una crisis cultural muy importante y los científicos con más renombre la abandonaron —por ejemplo, Cassini se trasladó a París (para dirigir el observatorio real) y Montanari a Padua [27]—. Los centros conectados con los ambientes europeos estaban limitados a los florentinos, alrededor de la corte de los Médicis, y a los romanos, atados a la Curia, quedando fuera de estos contactos los de Bolonia.

Otro aspecto que podría ayudar a explicar el olvido en que cayó su obra es el giro intelectual de Mengoli en su investigación a partir del año 1660. Después del *Circolo*, que le debía permitir averiguar las reglas de los solsticios y de los equinoccios, no escribió más obras de matemática pura, sino obras relacionadas con la cronología y la cosmología bíblica y que, además, no concordaban con el pensamiento filosófico de la época.

Quizás no haya una única razón y sea la conjunción de todos estos argumentos la que puede encaminarnos a encontrar una respuesta al porqué del alejamiento de sus contemporáneos.

Pero si en su época la utilización del lenguaje algebraico fue un hándicap para su difusión, es precisamente esta característica peculiar la que, actualmente, hace más interesante su estudio. Hay que destacar que Mengoli utilizó el lenguaje especioso tanto como medio de expresión cuanto como instrumento analítico. Trabajó con especies (sumatorios), formas (figuras geométricas), tablas triangulares y cuasi proporciones utilizando el lenguaje especioso. Así, se puede considerar que las tablas triangulares de figuras geométricas, que Mengoli construyó indefinidamente como estructuras visuales, eran verdaderas herramientas algebraicas. Usando estas tablas, Mengoli clasificó las figuras geométricas en tres tipos y estudió las propiedades de cada tipo de figuras. Además, es significativo que Mengoli utilizó también la simetría de las tablas triangulares y la regularidad de las filas de la tabla para generalizar las demostraciones. Mengoli dio por supuesto que si un resultado era cierto para una fila de la tabla, este resultado también era cierto para todas las filas y no había necesidad de probarlo en las filas restantes.

Sin embargo, considero que el aspecto más innovador de su investigación radica en la utilización de letras y símbolos para tratar directamente con la expresión algebraica de las figuras geométricas. Por una parte, Mengoli expresó una figura geométrica mediante una expresión algebraica, en la cual la ordenada de la curva que determina la figura está relacionada con la abscisa por medio de una proporción, estableciendo así la teoría de proporciones euclidiana como un elemento de conexión entre álgebra y geometría y, por otra parte, Mengoli mostró cómo estas expresiones algebraicas podían ser usadas para construir geométricamente la ordenada de la figura en un punto dado. Esta identificación le permitió trabajar con las figuras geométricas que cuadraba utilizando sus expresiones algebraicas.

Así pues, como una de las razones para justificar la emergencia del lenguaje algebraico en las matemáticas del siglo XVII fue la introducción de éste en los problemas de cuadratura, podemos concluir que Mengoli también contribuyó al desarrollo de este lenguaje. De hecho, el uso del lenguaje especioso en las tablas y en las tablas interpoladas, le permitió deducir simultáneamente valores, ya conocidos y otros aún no conocidos, de cuadraturas de infinitas figuras geométricas con un método innovador y singular.

Agradecimientos

Quiero agradecer al editor, profesor Luis Español, por sus desvelos y su ayuda en la redacción para que el artículo comunique de la mejor manera posible las ideas matemáticas de Mengoli. También debo destacar que mi investigación se beneficia de una ayuda del Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto HAR2010-17461).

Referencias

[1] K. Andersen, Cavalieri's Method of Indivisibles, *Arch. Hist. Exact Sci.* **31** (1985), 291–367.

[2] H. Bosmans, Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal, *Mathesis* **38** (1924), 1–59.

[3] B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, trad. de L. Lombardo-Radice, Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino, 1966.

[4] B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bolonia, 1647.

[5] R. Descartes, *The geometry of René Descartes* (D. E. Smith y M. L. Latham, eds.), Dover, Nueva York, 1954.

[6] A. W. F. Edwards, *Pascal's Arithmetical triangle. The story of a mathematical idea*, Oxford University Press, Nueva York, 2002 (1.ª ed., 1987).

[7] G. Fantuzzi, *Notizie degli scritori Bolognesi*, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bolonia, 1788.

[8] P. de Fermat, *Oeuvres*, 4 vols. y suplementos (Paul Tannery y Ch. Henry, eds.), Gauthier-Villars, París, 1891–1922.

[9] E. Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Edizioni Cremonese, Bolonia, 1980.

[10] M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton University Press, Princeton, 1973.

[11] A. Malet, *From Indivisibles to Infinitesimals. Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1996.

[12] M.ª R. Massa, El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **9** (1994), 68–100.

[13] M.ª R. Massa, Mengoli on «Quasi Proportions», *Historia Math.* **24** (1997), 257–280.

[14] M.ª R. Massa Esteve, *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625–1686)*, Tesi Doctoral, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1998. `http://www.tdx.cat/TDX-0506108-144948/`.

[15] M.ª R. Massa Esteve, Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII, *Llull* **24** (2001), 705–725.

[16] M.ª R. Massa Esteve, La théorie euclidienne des proportions dans les «Geometriae Speciosae Elementa» (1659) de Pietro Mengoli, *Rev. Histoire Sci.* **56** (2003), n.º 2, 457–474.

[17] M.ª R. Massa Esteve, Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625–1686), *Historia Math.* **33** (2006), 82–112.

[18] M.ª R. Massa Esteve, *L'Algebrització de les Matemàtiques. Pietro Mengoli (1625–1686)*, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 2006.

[19] M.ª R. Massa Esteve, Symbolic language in early modern mathematics: the «Algebra» of Pierre Hérigone (1580-1643), *Historia Math.* **35** (2008), 285–301.

[20] M.ª R. Massa Esteve, The role of symbolic language in the transformation of mathematics, *Philosophica* **87** (2012), 153–193.

[21] M.ª R. Massa Esteve, The role of Indivisibles in Mengoli's quadratures. En V. Jullien (ed.), *Seventeenth century indivisibles revisited*, Birkhäuser, en prensa.

[22] M.ª R. Massa Esteve y A. Delshams, Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works, *Arch. Hist. Exact Sci.* **63** (2009), 325–356.

[23] P. Mengoli, *Geometriae Speciosae Elementa*, Bolonia, 1659.

[24] P. Mengoli, *Circolo*, Bolonia, 1672.

[25] A. Natucci, Pietro Mengoli. En C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 9, 303–304, Scribner's, Nueva York, 1970–1991.

[26] B. Pascal, *Oeuvres complètes*, Gallimard, París, 1954.

[27] L. Pepe, Il Calcolo Infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* **1** (1981), n.º 2, 43–101.

[28] F. Viète, *Opera mathematica* (Jan Van Schooten, ed.), Olms, Nueva York, 1970.

[29] E. Walker, *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval*, Columbia Univ. Press, Nueva York, 1986.

[30] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, vol. 1 de *Opera mathematica* (3 vols.), Olms, Nueva York, 1972.

M.ª Rosa Massa Esteve, Departament de Matemàtica Aplicada 1, Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica, Universitat Politècnica de Catalunya

Correo electrónico: `m.rosa.massa@upc.edu`