si P se aleja al infinito, las razones $\frac{Pa}{Pa'}$ y $\frac{Pc}{Pc'}$ entre cantidades infinitamente grandes, cuyas diferencias aa' y cc' son finitas, son iguales á la unidad; luego

$$\frac{ba}{bc} = \frac{b'a'}{b'c'}$$

(Se continuará).

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

Observa Poncelet que la proyección *central* ó *cónica* no altera ni la correlación ni el grado ú orden de la figura primitiva ni, en general, toda especie de dependencia gráfica entre las partes de esta figura que sólo se refiere á la dirección indefinida de las líneas, su intersección mútua, su contacto, etc.; pero podrá hacer variar solamente la forma, la especie particular de estas líneas, y, en general, todas las propiedades concernientes á propiedades absolutas y determinadas, tales como las aberturas de ángulos, los parámetros constantes, etcétera. Así por ejemplo, de que una recta es perpendicular á otra en la figura primitiva, no se puede inferir que lo sea en la proyección de esta figura sobre un nuevo plano.

Esto sentado, define Poncelet las *figuras proyectivas* como aquéllas cuyas dependencias son indestructibles por el efecto de la proyección, llamando *relaciones ó propiedades proyectivas,* todas aquéllas que subsisten á la vez en las figuras dadas y en sus proyecciones.

Distingue entre las propiedades las *gráficas,* que son independientes de toda magnitud ó medida determinada, como por ejemplo, una propiedad relativa á puntos de intersección de ciertas líneas rectas que pasan por puntos de posición asignada ó que tocan líneas dadas de segundo grado, y las propiedades *métricas* que conciernen á relaciones de magnitudes en las que nada indica *á priori* si subsisten en las proyecciones. En cuanto á las primeras, de las cuales se ocupa exclusivamente, ó *propiedades de posición,* bastará establecerlas y demostrarlas en una posición cualquiera de la figura, para que sean aplicables, en general, á esta figura y á todas sus proyecciones posibles. En cuanto á las segundas, no se podrá afirmar *á priori* sin un exámen prévio, ni que estas propiedades subsisten ni que dejan de subsistir en la figura primitiva.

Para establecer el criterio que deba seguirse al examinar si una ralación subsiste ó no en las figuras que son proyecciones de otra dada, observa que al proyectarse desde un punto S los diferentes puntos A, B. C, ... de una figura, cuyas proyecciones son los nuevos puntos A', B', C' ..., como las áreas de los triángulos SAB, SA'B' que tienen un ángulo común se hallan entre sí en la razón de los productos SA. SB, SA'. SB' de los lados que los comprenden, llamando $\frac{1}{2}m$ esta razón, tan sólo dependerán de la mayor ó menor abertura de dicho ángulo, se tendrá, representado por a, b las longitudes de las proyectantes SA, SB, y p la de la perpendicular bajada desde S al lado AB: Área $SAB = \frac{1}{2}p.\ AB = \frac{1}{2}m.\ a.\ b,$ de donde resulta $AB = m\frac{ab}{p}$, y para otra recta CD se tendrá $CD, = m'\frac{cd}{p'}$, etc., etc. Ahora bien, para que esta relación subsista, cualquiera que sea la posición particular de los puntos A, B, C ... ó A', B', C' .... sobre las proyectantes SA, SB, ..., al sustituir en lugar de las cantidades que entran en la relación de que se trata sus valores obtenidos, deberá quedar satisfecha, independientemente de toda magnitud particular atribuída á las rectas SA, SB, ... ó a, b, p .... que fijan la posición de los puntos correspondientes A, B, C .... ; luego *estas rectas ó distancias deben desaparecer por sí en el resultado de la sustitución, como factores de todos sus términos; de modo que sólo quedará una relación entre las cantidades* m, m', m" ..... *si se reemplazan al mismo tiempo las perpendiculares* p, p', p" .... *por los valores que representan en cada triángulo parcial* SAD, SA'D' .... y recíprocamente, si esto se verifica, la relación mencionada será necesariamente proyectiva. Además, existe una clase de relaciones, muy extensa, para las que las perpendiculares p, p', p'' .... desaparecen á la vez con a, b, c, ... del resultado de la sustitución, sin que sea preciso reemplazarlas, cómo en la hipótesis anterior, por los valores que representan en los triángulos correspondientes; y como no se ha hecho ninguna hipótesis particular sobre la situación de los puntos A', B', C' ... en el espacio, lo mismo que respecto á los puntos A, B, C ... de que son las proyecciones, resulta que toda relación que satisfaga á las condiciones precedentes, *tendrá lugar, no sólo para las proyecciones ordinarias de esta figura sobre un plano, sino para todas las figuras rectilíneas y alabeadas que podrían concebirse como resultantes de la primera por la especie de proyecciones consideradas.* Además, para cualquiera especie de proyección, ya sea la perspectiva ó proyección sobre un plano, ó sobre un plano, ó sobre una recta, dichas condiciones deben subsistir también entre las constantes m, m', m''... solo dependientes de la abertura de los ángulos ASB, CSD,.... ó *ángulos proyectantes de las rectas AB, CD,...., y, como son las cantidades* m, m', *los senos de los ángulos proyectantes resulta que: si á partir de un punto cualquiera tomado como centro de proyección un haz de rectas proyectantes hácia los diferentes puntos de una figura dada arbitrariamente en el espacio ó en un plano, y las partes de una figura tienen una ó varias relaciones métricas proyectivas que satisfacen á las condiciones precitadas, las mismas relaciones tendrán lugar entre los senos de los ángulos proyectantes que les corresponden respectivamente.* Además, un teorema análogo resulta para el caso de coincidir el centro de proyección con el de una superficie esférica y al efectuarse la proyección sobre ésta.

(Se continuará)

Z. G. G.

INVESTIGACIONES FILOSÓFICO-MATEMÁTICAS

SOBRE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS

por D. APOLINAR FOLA, *Oficial del cuerpo de Carabineros.*

Antes de exponer el objeto principal de este artículo, que es dar noticia á nuestros lectores de la «segunda seccion de la obra» *Investigaciones filosófico-matemáticas sobre las cantidades imaginarias*, que acaba de publicar el ilustrado oficial del Cuerpo de Carabineros don Apolinar Fola, nos es indispensable, para tomar la cuestión desde su origen en nuestra pátria, por desgracia tan poco pródiga actualmente en lucubraciones de esta índole, remontarnos hácia los años de 1850 hasta 1861 en que era profesor del Instituto del Noviciado (hoy del Cardenal Cisneros) el ilustre pensador y filósofo profundo D. José M. Rey y Heredia.

Lamentábase este exímio catedrático de Lógica entre sus compañeros y amigos íntimos de que, la Matemática con ser ciencia de tan frecuentes y portentosas aplicaciones, rara vez sea considerada bajo su aspecto metafísico y trascendental, doliéndose, como de una profanación, al ver que son tantos los que operan sobre la *cantidad*, el *número*, el *espacio*, etc., y tan pocos los que comprenden estas nociones fundamentales, ó saben darse razon adecuada de las mismas teorías que rutinariamente han aprendido y por rutina aplican».

Una parte muy importante de la gloria que alcanzó Rey y Heredia al escribir su notabilísima obra *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias,* cuando ya por desgracia estaba próxima á extinguirse en la edad que constituye el apogeo de la vida, aquella luz tan espléndida que brotaba de su poderosa inteligencia, corresponde sin género de duda, al benemérito y respetable profesor del mismo Instituto D. Acisclo F. Vallin y Bustillo, que adivinando las dotes escepcionales de aquel peregrido ingenio, algo del espíritu matemático que bullía en tan privilegiado cerebro, le impulsó, asediándole continuamente para que hiciera brotar la claridad desde las tenebrosas regiones del imaginarismo matemático, y así en efecto se hizo.

Poco diremos actualmente acerca de la *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* que se publicó en 1865 bajo los auspicios del Gobierno, porque es obra muy conocida entre los aficionados á la matemática.

Nos limitaremos á manifestar que, esta obra, bajo su aspecto matemático se funda en los escritos de Argand, Buée, François, Warren, Peacock, Vallés, Mourey, Faure, Renouvier, Cournot, etc. Bajo su aspecto filosófico, evoca las doctrinas de la filosofía kantiana, en cuyo cuadro de las categorías halla Rey y Heredia el punto de partida en que ha de afianzar su doctrina filosófica del imaginarismo.

«Las categorías de la *cantidad* intervienen en la formación de todas las nociones del número, de la unidad, de la pluralidad, de la medida, del múltiplo, de la totalidad, de la fracción ó parcialidad.»

«Las de la *cualidad* dan un sentido y una afección, á las cantidades, y juegan en todas las teorías acerca de números positivos, negativos é imaginarios.»

Esta última categoría de la cualidad en la que los juicios existen en sus tres estados de *positivos, negativos y limitativos*, en los que, respectivamente, un concepto se halla incluído en la esfera de otro concepto (predicado), fuera de ella, ó en una esfera que se halla fuera del predicado, forman la base de la doctrina de Rey y Heredia, estableciéndose en ella que el concepto matemático de las cantidades *positivas, negativas* é *imaginarias* deriva naturalmente de las funciones que ejerce el entendimiento en dichos tres estados del juicio, y representa el esquema que contiene todo el cuadro de las oposiciones lógicas de la cualidad matemática, por dos rectas perpendiculares correspondientes á los juicios: A *es* B, A *no es* B, A *es no* B, A *no es no* B, respectivamente, observando que, no es precisamente la posición perpendicular de las cantidades indirectas la que se infiere de la teoría lógica, sino la exterioridad de su cualidad, con cuya condi-