Para verificar la unión de las triangulaciones española y argelina, se eligieron como vértices de un gran cuadrilátero los picos de Mulhacen y Tética en la *Sierra Nevada* y de *Filabrés* y los picos de *Filhaoussen* y *M'Sabiha*, estos dos últimos del continente africano, é intervinieron en los trabajos geodésicos colaboradores tan distinguidos, de tan reconocida ilustración y competencia como los coroneles Perrier, Barraquer, los comandantes López Puigcerver, Borres, Bassot, etc., y el actual director del Observatorio astronómico de Madrid, D. Miguel Merino, con el ingeniero Sr. Esteban, para la unión astronómica.

Además de esta empresa gloriosa para los dos países que se concertaron para su realización, encomendándola á sabios tan respetables, y que forma una hermosa página en la historia científica del general Ibáñez, se le debe otro descubrimiento de gran trascendencia, recibido con universal aplauso; el aparato para medir bases geodésicas, que ofrece la notable circustancia de permitir que á la rapidez en la ejecución de las operaciones acompañe la precisión en las mismas.

No nos detendremos en lo mucho que pueden decir personas más competentes acerca de los méritos del ilustre sabio que España ha perdido para la ciencia, correspondiendo á otros autorizados críticos el dar razón circunstanciada de cuanto tiene que agradecer la patria á quien dirigió con tan brillante acierto por tantos años sus trabajos geodésicos y estadísticos, y ya que no llegue á más nuestra competencia, hemos de limitarnos á rendirle nuestro insignificante tributo de admiración, evocando el recuerdo de algo entre lo mucho que hizo en su vida científica.

Z. G. DE G.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

(CONTINUACIÓN)

Múltiples fueron las direcciones de la Geometría bajo el impulso que le dieron los talentos que honraron la institución fundada por Monge, y que ha contribuído á dar un período de gloria científica á la Francia.

Si Monge creó la nueva Geometría que refiere las figuras del espacio á figuras planas por combinaciones de planos auxiliares, y prescindiendo en absoluto de toda consideración numérica, Carnot, al proponerse fundar un nuevo algoritmo geométrico en su *Géométrie de position* y en su *Correlation des figures en Géométrie*, donde se fundieran la magnitud y la posición de tal manera, que las variaciones de la una fueran traducidas inmediatamente por las variaciones de la otra, mediante lo que llamó correlaciones *directa*, *inversa* y *compleja*, también contribuyó al progreso de la Geometría de Pascal y Desargues en su *Essai sur la Théorie des transversales* que aportó un considerable material para proseguir la organización de este cuerpo de doctrina, legando á la posteridad sus célebres teoremas; el uno, generalización del de Ptolomeo, ó extensión á un polígono cualquiera del hasta entonces solamente aplicado al triángulo; el otro, de mayor importancia, es un teorema fundamental en la teoría de las cónicas, á saber: *si todos los lados de un polígono plano cualquiera ABCDE, ó sus prolongaciones, se hallan cortados por una sección cónica cualquiera, y se designa por (Am) (Bm) los productos de los segmentos interceptados sobre AB entre cada uno de los vértices A y B respectivamente, y las dos ramas de la curva, por (Bn) y (Cn), los productos semejantes relativos al lado BC,* etcétera, se tendrá

$$(Am)\,(Bn)\,(Cp)\,(Dq)\,(Er) = (Ar)\,(Bm)\,(Cn)\,(Dp)\,(Eq),$$

teorema que, según hizo ver Carnot, se extiende á todas las curvas geométricas tomadas como transversales, cuando el polígono es plano, y á todas las superficies cuyas secciones hechas por planos cualesquiera, son curvas geométricas, cuando el polígono es alabeado.

Otro de los talentos matemáticos que contribuyeron al renacimiento científico de la Francia, impulsada por los éxitos de Monge, Laplace, Lavoisier y Lagrange, fué Brianchón, cuya *Mémoire sur les lignes du second ordre*, aunque reducida á 65 páginas, es uno de los trabajos fundamentales que dejan huella en el progreso científico, y no es de extrañar que haya bastado para inspirar al geómetra Poncelet su notable obra *Traité de propriétés proyectives des figures*, fundada como él mismo expone en su prólogo, sobre algunos de los fecundos conceptos expuestos en la obra de Brianchón.

Es materialmente imposible condensar en menor extensión cuanto de más esencial constituye la teoría de las cónicas, y sobre todo con mayor elegancia y sencillez.

Definido el polo de una recta como el punto alrededor del que giran las cuerdas de los contactos de los pares de tangentes trazadas desde diferentes puntos de aquélla, en conformidad con la exposición hecha por Monge en su geometría descriptiva, pasa inmediatamente á definir la relación $\frac{AC}{AS} : \frac{BC}{BS}$ = constante, á que conducen tres rectas trazadas por un punto S y cortadas por una transversal arbitraria, de la que resulta la siguiente $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ = constante, correspondiente al caso de ser cuatro las rectas. La proporción armónica $\frac{AD-CD}{AD} = \frac{CD-BD}{BD}$ ó $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ subsiste, según un teorema, de la obra *Opus geometricum*, de Gregoire de Saint-Vincent, Una recta está *dividida armónicamente* por dos puntos, cuando éstos la dividen en segmentos proporcionales. Si una recta AB está dividida armónicamente por dos puntos C y D, la recta CD también lo estará por los dos puntos A y B; y originando *cuatro puntos armónicos* un *haz armónico*, el teorema de Saint-Vincent puede traducirse diciendo que: *Toda transversal trazada en el plano de un haz armónico da por sus intersecciones, cuatro puntos armónicos.*

Pero según la geometría de posición de Carnot, *cada una de las diagonales de un cuadrilátero está cortada armónicamente por las otras dos,* y esto basta para que con *la regla solamente* pueda obtenerse en la misma dirección de tres puntos el cuarto armónico D, propiedad conocida en las secciones cónicas de La Hire. La consideración de un paralelógramo con sus dos diagonales permite deducir, valiéndose de los triángulos semejantes formados en las figuras, las relaciones $\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD}$, $\frac{CA.CB}{CE.CF} = \frac{DA.DE}{DE.DF}$ que, según Brianchón, tienen lugar para todas las proyecciones de las figuras, como arriba se indicó, de manera que subsistirán todavía, si en lugar de un paralelógramo se considera un cuadrilátero cualquiera cortado por una transversal arbitraria, y como aquí no se trata más que de la dirección de las líneas, y cada par de lados opuestos pueden representar el sistema de diagonales de un nuevo cuadrilátero, de las relaciones anteriores se deducen todas las restantes que forman en los tratados modernos las siete relaciones fundamentales de la involución, que unen los doce segmentos formados sobre los lados de un cuadrilátero completo, cuyas tres diagonales son AB, CD, EF, y que son las traducciones diferentes de una misma propiedad, de manera que, para seis puntos situados en línea recta, cada una de dichas siete condiciones lleva consigo las otras seis. Y cuando aquéllos se hallan ligados por éstas, sus proyecciones gozan de la misma propiedad.

Con estos preliminares Brianchón principia la exposición de las propiedades de las cónicas (lám. I, fig. 1.ª).

Suponiendo trazada en el plano de un cuadrilátero $UXYZ$ inscrito á una cónica, una recta en la cual AB, CD, EF son los segmentos producidos por la curva y los dos pares de lados opuestos XU y ZY, ZU y YX de aquél, ante todo demuestra que los seis puntos A, B, C, D, E, F se hallan ligados entre sí por las siete relaciones arriba deducidas, y puesto que basta deducir y establecer la proposición para una de las perspectivas de la figura, lo hace así para el caso de ser un círculo, fundándose sencillamente en la propiedad que tiene el producto de los segmentos trazados desde un punto cualquiera, que es constante. Además, la aplicación del teorema de Ptolomeo al triángulo FTE formado con el segmento EF de la transversal y dos lados opuestos ZU y XY del cuadrilátero, con cada una de las transversales UX y ZY le conducen á la relación $\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD}$, y por consiguiente á concluir, que las siete ecuaciones fundamentales quedan satisfechas, y resulta que: *dado un cuadrilátero cualquiera inscrito en una cónica y una recta indefinida trazada arbitrariamente, la cuerda interceptada en ésta entre las ramas de la curva, se hallará cortada en dos segmentos por cada uno de los lados del cuadrilátero prolongados á discreción; y si en el mismo orden se formara la razón de los dos segmentos que corresponden á cada lado, el producto de las razones correspondientes á dos lados opuestos será igual al producto de las razones correspondientes á los otros lados.*

Después de señalar como consecuencias inmediatas de estas conclusiones, que en las curvas de segundo orden las cuerdas paralelas tienen sus puntos medios distribuídos en una recta que se llama *diámetro*, así como las propiedades concernientes á los *centros, diámetros conjugados, etc.*, llega al célebre teorema de Pascal solamente con aplicar el teorema de Ptolomeo al triángulo ETF de la figura empleada anteriormente, en la que D, H, I son las intersecciones de los lados opuestos del exágono $ABUZYX$ cortado sucesivamente por las transversales UX, YZ, UB, AX y multiplicando por la que arriba se deduce, ó sea $FA.FB.ECED = EA.EB.FC.FD$, las $EC.FC.ZU = EC.FU.ZX$ y $EU.FD.FZ = ED.FE.EU$ se obtiene

$$EX.EY.EA.FB.TU.TI = EA.EB.FU.FE.TX.TY. \quad (\gamma)$$

y multiplicando la $EY.FD.EF = ED.FZ.ZX$ y las $EI.FD.FU = EB.FU.TI$, $EX.FA.FU = EA.FU.EX$ dividiendo después por la fórmula (γ) obtiene fácilmente $EI.FD.TU = ED.FU.ZY$, que según el teorema de Ptolomeo exige se hallen los tres puntos I, H, D en línea recta, determinando una transversal en el plano del triángulo ETF.

(Se continuará).

LEITFADEN DER EBENEN GEOMETRIE

(GUÍA DE LA GEOMETRÍA)

Bearbeitet von Dr. Hubert Müller

Una obra que reuna á la brevedad y sencillez la condición de poner en conocimiento de los lectores cuestiones generalmente juzgadas como de un orden superior á las propias de los elementos, constituye un verdadero triunfo para el autor, y esto puede aplicarse á la obra del Dr. Hubert Müller, constituída por tres reducidos cuadernos: el 1.º (cuya 3.ª edición apareció en 1889) trata de las figuras rectilíneas y del círculo; el 2.º es un desarrollo del primero, al mismo tiempo que una introducción á la «Geometría moderna», y el 3.º se halla destinado á las secciones cónicas y á los elementos de esta geometría.

Esta obra, como su título indica, no es un tratado completo de Geometría; su autor se ha propuesto iniciar al alumno mediante una breve exposición, en las cuestiones más varias, en los conceptos más capitales de la ciencia de la extensión. El molde de la geometría euclidiana ha quedado profundamente alterado bajo la multiplicidad de las modernas teorías, que se imponen con imperiosa necesidad y que se hallan combinadas con el dogmatismo característico de la geometría tradicional.

No es la obra de que tratamos la única en su género, pues en la docta Alemania se intenta constantemente por los escritores matemáticos, exponer la geometría proyectiva, la geometría de la relación anarmónica, de la dualidad y de la polaridad, etc., ya sola, ya combinada con la geometría elemental; y uno de los más notables ejemplos que pueden ser citados, justificando nuestro aserto, es el ofrecido por la ya vulgarizada geometría del ilustre profesor Baltzer.

Acaso esta nueva evolución de la enseñanza no hubiera tardado tanto en ser un hecho, si, como dice Chasles en su obra *Los trois livres de porismes d'Euclide*, la obra del geómetra griego, solo conocida por los vestigios que de ella se conservan en las obras de Pappus, se hubiera transmitido hasta nosotros bajo la influencia decisiva de tan respetable autoridad.

La variedad de teorías con que se ha enriquecido la geometría, exige una alteración en el plan de exponerla y de enseñarla. El riguroso dogmatismo de los elementos de Euclides siempre es admirable, siempre ofrece un modelo de lógica que lleva á las inteligencias por un encadenamiento de consecuencias de solidez inquebrantable; pero las verdades en él relacionadas que se refieren exclusivamente á la perpendicularidad, al paralelismo, á la igualdad ó la desigualdad y á la proporcionalidad, han hecho sitio á otras proposiciones, en las cuales se prescinde de estos modos especiales de la posición y de la magnitud.

La geometría de Euclides, ya cual salió del pensamiento de este geómetra, ya según la han presentado modificada autores como Legendre, Lacroix, etc,, favorece el desarrollo intelectual, por cuanto exige del espíritu fijeza y una fuerza suficiente para ahondar en los elementos de cada cuestión, para analizarla en sus más mínimos detalles; pero no es tan eficaz para educar los espíritus en el modo de producir grandes síntesis y llevarlos á esferas más amplias, donde las ideas se hallan enaltecidas por su generalidad, esto es propio y exclusivo de los métodos modernos.

En la obra del Dr. Müller se halla expuesta la geometría elemental, revestida de ese carácter generalizador propio de la geometría moderna, que debe al predominio de la idea de situación ó disposición de los elementos de las figuras, así como al concepto de correlación, que permite duplicar las proposiciones bajo la forma simétrica impresa por la constante aplicación del principio de la dualidad.

Según este principio, al considerarse en un plano infinidad de rectas que pasan por un punto, se considerarán los infinitos puntos que se hallan en línea recta, y el conjunto de aquéllas conducirá al *haz de rayos* como el de éstos á la *serie de puntos*. Al ángulo, figura compuesta