organizado y desenvuelto las teorías de las formas y de los cuaternios en Inglaterra; de los Poncelet y Chasles, que en Francia han edificado la Geometría moderna sobre la base de la proyección central y la relación anarmónica; de los alemanes Moëbius, Plücker y Clebsch, y del matemático francés Bobillier, que han dado impulso á la Geometría analítica, llevándola más allá del reducido campo señalado por las coordenadas cartesianas con otros nuevos modos de representación; de los Staudt, que han dado un carácter eminente gráfico á la Geometría, de los Hermite, Weierstrass, Bois-Reymond y Cantor, que en el Análisis han hecho amplificarse las creaciones de los Legendre, Abel y Jacobi en la teoría de las funciones elípticas; de los Cremona, Brioschi, Battaglini y Beltrami, que mantienen el progreso de la Geometría y el Análisis en Italia.

Todo este movimiento general se sigue en España, si bien reducido á aquello de más esencial que contiene cuanto ofrece inmediata aplicación, ó que es un elemento indispensable para llegar al nivel de lo que hoy constituye la cultura matemática; pero esto que se circunscribe á un reducido número de personas dedicadas por su profesión á tal género de lucubraciones, no trasciende á otro público más numeroso que podría aprovechar las ventajas de estos conocimientos, y aun llegar á contribuir al adelantamiento general, si se le facilitara el acceso á ideas que parecen más difíciles de adquirir al parecer de lo que son en realidad. Estas dificultades aparentes son consecuencia de ignorarse los fundamentos de las varias teorías ó ramas que constituyen las ciencias matemáticas.

La propaganda de las ideas es el remedio más eficaz para la desaparición de este mal.

Además de la Escuela politécnica de Francia fundada por Monge, la creación de periódicos como el *Journal de l' École polytechnique*, la *Correspondance sur l' École polytechnique*, los *Annales Mathématiques* de Montpellier, etc., contribuyeron al progreso de la Matemática en esta nación, como en Alemania el *Crelle's Journal* en Inglaterra *Philosophical transactions* y en Italia también multitud de periódicos, cuyo número é importancia aumenta de día en día.

Estas publicaciones periódicas, no solo han dado á conocer los descubrimientos de la actualidad y el verdadero estado de la ciencia, sino que han estimulado siempre para alcanzar nuevos progresos y desarrollos de lo ya conocido; y así se observa cómo todas caminan con cierto paralelismo, dentro de la variedad que les imprimen los escritores dedicados á cada una de ellas con la variedad de asuntos en ellas desenvueltos, y facilitan además el cambio de ideas en beneficio de un general perfeccionamiento en las múltiples teorías.

Convencidos de que ya se impone la existencia en España de publicaciones periódicas consagradas á la divulgación de los progresos continuados que se verifican en la ciencia matemática, acometemos la empresa de ofrecer el primer número que se publica de nuestro periódico, destinado exclusivamente á tal objeto.

Buscando un término medio entre las publicaciones que existen, nuestro periódico se referirá lo mismo á las cuestiones más elementales que á otras de índole superior, procurando presentar estas últimas en su mayor sencillez, con la más fácil exposición de que sean susceptibles.

Proponiéndonos dar á conocer la Matemática, según las múltiples fases que presenta, en correspondencia con la variedad de sus objetos especiales, daremos á conocer las teorías ú obras notables, ya de los grandes maestros que brillaron en otras épocas, ya de los talentos contemporáneos; ya se tratará de las novedades que en el día mantienen viva la atención de los maestros de la actualidad, ya de ideas ó de conceptos que, sin ser nuevos, tengan alguna importancia ó sean los antecedentes necesarios de alguna nueva teoría.

En una palabra; se atenderá por igual á lo que afecta á la organización científica ó dependencia lógica y á lo que concierne al orden histórico. Se darán á conocer los más importantes descubrimientos ó nuevos desarrollos que adquieran las teorías matemáticas, y se harán las indicaciones precisas que pongan en conocimiento de los lectores las obras útiles ya para el perfeccionamiento de la enseñanza como para la fácil comprensión de la Ciencia.

ZOEL G. DE GALDEANO.

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

La importante evolución que realizó Descartes sometiendo la Geometría al análisis algebráico, llevada á más vastos desarrollos por los nuevos métodos de Newton y de Leibnitz, fueron aminorando la importancia de la Geometría, que llegó á permanecer oculta bajo las formas de inagotable variedad debidas á los nuevos algoritmos, desenvueltos y amplificados por los Bernuilli, Euler y otros muchos analistas, cuyos nombres van unidos constantemente á detalles ó resultados diversos.

A principio de este siglo, la Geometría de Euclides de Pascal y Desasgues aparecía como estacionada ó reducida á estrechos límites, mientras que el análisis parecía desbordarse en todas direcciones, produciendo cierto desequilibrio entre las dos ramas fundamentales de la Matemática. La Geometría, si avanzaba era merced á recursos extraños, y su objeto, envuelto bajo las formas del análisis, no se ofrecía de una manera directa á las investigaciones de los matemáticos

Era necesario, para el desenvolvimiento armónico de la Matemática una reación que tendiese á equilibrar estos dos aspectos generales de la cantidad, que siendo distintos han de compenetrarse y fundirse aún conservando sus leyes propias y características; y esta evolución que había de hacer posible un desenvolvimiento paralelo de una y otra fué realizado por Monge.

Si la inteligencia, partiendo de los algoritmos por una intuición continuada lleva gradualmente á los más complicados del análisis, por su aplicación inmediata al objeto que ve desenvolverse, alterarse y multiplicarse bajo su dirección, acumulando sistemas de verdades y de relaciones á otros sistemas, también, desde el momento en que Monge creó la Geometría descriptiva, la inteligencia había de contemplar directamente la extensión bajo sus formas, punto, líneas y superficies para llegar por combinaciones inmediatas á otro sistema de verdades y relaciones. La nueva Geometría, representando clara y fielmente el objeto, tiene como auxiliar la imaginación y se presta á favorecer el desarrollo de las artes, teniendo como base el dibujo ó la representación efectiva de los objetos.

Si la Geometría descriptiva inauguró una época de progreso material por sus aplicaciones beneficiosas para el artista y para el ingeniero, no lo fué menos en el orden especulativo, pues la ciencia pudo crearse una amplia base sobre la cual realizar sus progresos futuros; la representación gráfica de los objetos permitió ayudar á las inteligencias en sus investigaciones. Como dice Dupín, la Geometría descriptiva es una lengua imitativa que tiene la doble ventaja de dibujar y hablar á la vista. «Esta Geometría fortalece eminentemente la imaginación, enseña á abarcar rápidamente y con gran precisión un vasto conjunto de formas, á juzgar de sus analogías y diferencias, de sus relaciones de posición y magnitud. El espíritu aprende á ver interiormente, y con una perfecta claridad, líneas y superficies individuales, familias de líneas y superficies; adquiere el sentimiento del carácter de estas familias é individuos, y no solo aprende á verlos aisladamente ó por grupos análogos, sino que los aproxima, los combina y prevee los resultados de sus intersecciones, de sus contactos más ó menos íntimos, etc.» (1)

Las *Leçons de Géométrie descriptive*, de que se hizo una traducción española en el año 1803, además de ser una de las obras que forman época en el progreso científico, es un libro que ofrece la belleza de la sencillez y claridad de estilo, unida á la brevedad que lleva al lector, sin esfuerzo, al conocimiento de todo el sistema de verdades reunidas en un reducido número de páginas. Principia Monge por establecer que los elementos más sencillos, el punto y la recta, no son los más adecuados para la representación sencilla de las figuras, y su razonamiento le lleva á adoptar un sistema de planos rectangulares que reduce á dos, como es sabido. Reproducir el modo de representar un punto, una recta ó un plano, una paralela á una recta, una perpendicular á un plano con la determinación de su distancia, las intersecciones de dos planos, etc., sería exponer lo que hoy se encuentra en todos los tratados destinados á la enseñanza, en los que nada se ha podido modificar de lo que salió perfecto desde su origen. Para la representación de las superficies, observa que no hay ninguna superficie que no pueda considerarse como engendrada por el movimiento de una línea curva, ya de forma constante, cuando muda de posición, ya variable al mismo tiempo, de forma y de posición en el espacio. Además, no es dando las proyecciones de algunos puntos particulares por los que pasa una superficie curva, como se determina su forma y su posición, sino haciendo de modo que para un punto cualquiera se pueda construir la curva generatriz, según la forma y posición que deba tener al pasar por este punto, lo cual depende de la destreza y sagacidad del geómetra y expresa Monge la conveniencia, para la sencillez, de considerar simultáneamente dos generaciones diferentes, é indicar, para cada punto, la construcción de las curvas generatrices, de manera que en la Geometría descriptiva, para expresar la forma y posición de una superficie curva baste dar, para un punto de ésta, del cual una de las

(1) Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge, pág. 177.

proyecciones pueda tomarse á voluntad, el modo de construir las proyecciones horizontales y verticales de dos generatrices que pasan por este punto.

Esta consideración de poder ser engendrada una superficie curva por dos generatrices distintas, le lleva á la determinación del plano tangente por medio de las tangentes á éstas en cada punto, y nada hay que decir del modo de resolver el problema, no solo para las superficies cilíndrica y cónica, sino para la determinación del plano tangente á una, dos y tres esferas dadas, problemas que envuelven, según observa Monge, propiedades notables del círculo, de la esfera, de las secciones cónicas y de las superficies del segundo grado, pues de la resolución de estos problemas, empleando las superficies cónicas circunscritas, deduce desde luego la importante conclusión, fundamental para los ulteriores progresos de la Geometría, más recientemente desenvuelta por Carnot, Poncelet, Chasles y los geómetras de la actualidad, de que si se concibe circunscrita á una esfera una superficie cónica, cuyo vértice se mueve según una línea recta, todas las circunferencias de contacto pasarán por dos puntos fijos que serán los de contacto de los planos tangentes trazados por dicha recta, así como recíprocamente, si después de trazar por dicha recta cuantos planos secantes se quiera, se construye para cada sección la superficie cónica circunscrita, los vértices de todas éstas se hallarán en una misma recta; y si en un plano donde se suponen trazadas una circunferencia y una recta, se trazan desde un punto de ésta las dos tangentes á aquélla, y se concibe que el punto se mueve en la recta llevándose consigo las dos tangentes, sin que cesen de tocar al círculo, la recta que une los dos puntos de contacto siempre pasará por un punto fijo, verificándose, recíprocamente, que las intersecciones de cada par de tangentes trazadas en los extremos de rectas que pasan por un mismo punto, se hallan en línea recta, y más generalmente si, dada en el espacio una superficie curva cualquiera de segundo grado y una superficie cónica circunscrita que la toca, ésta se mueve sin cesar de ser circunscrita y de tocarla, de modo que su vértice recorra una recta cualquiera: el plano de la curva de contacto de las dos superficies siempre pasará por una misma línea recta (determinada por los puntos de contacto de la superficie de segundo grado con los dos planos tangentes que pasan por la recta de los vértices), y si la superficie cónica se mueve de modo que su vértice esté siempre en un mismo plano, el plano de la curva de contacto pasará siempre por un mismo punto. En fin, la consideración de las seis superficies cónicas circunscritas á tres esferas, la distribución de sus vértices de tres en tres sobre cuatro rectas, por las cuales pueden trazarse ocho planos tangentes, y en el caso de darse en magnitud y posición cuatro esferas, la importante conclusión de que las seis superficies cónicas circunscritas exteriormente á las mismas deban tener sus vértices en un mismo plano y en las intersecciones de cuatro rectas, así como los de las seis circunscritas interiormente deban estar de tres en tres en un mismo plano con tres de los primeros, son manifestaciones elocuentes de lo espléndida en resultados, de trascendencia suma, que nació la nueva Geometría, y de la fecundidad de la idea que la hizo surgir en la inteligencia del gran geómetra de los tiempos modernos. En todas las cuestiones, citadas como en las que terminan esta obra admirable, á saber, las intersecciones de las superficies, la curvatura y las evolutas de las curvas de doble curvatura, siempre la intuición inmediata del objeto es el fundamento que lleva directamente á la solución de las mismas. Aquellos resultados obtenidos por el razonamiento, ocultos bajo el simbolismo del cálculo, propios de la Geometría cartesiana, se desenvuelven ante la vista bajo el procedimienso gráfico de Monge, que se somete al rigorismo de la Geometría de Euclides, llevada á un grado de pureza tal, que solo aprovecha de la misma cuanto es en absoluto independiente de toda intervención del número ó la medida, de que no se halla en absoluto exento el tratado del geómetra griego.

Pero la obra de Monge no constituye un divorcio entre lo hasta entonces constituído en la ciencia, y este nuevo modo de investigación, que debiera llevarse por nuevos horizontes, consiste en aumentar las direcciones de la inteligencia dentro del plan general con una nueva y sumarla á las demás, para hacer un grandioso conjunto, apoyar la marcha del espíritu investigador en una nueva á la par que sólida base para sus ulteriores progresos. Y, en efecto, donde se detiene esta Geometría representativa avanza el análisis con la eficacia inagotable de sus recursos, y prueba de ello dió Monge en su exposición de la Geometría analítica, á la que imprimió el carácter de su Geometría descriptiva, dando una elegancia hasta entonces desconocida á las formas de sus cálculos y á la marcha de sus operaciones, haciendo destacarse la sencillez del método, no sin agregar nuevos resultados, como los concernientes á las superficies desarrollables, á las líneas de curvatura y á las aristas de retroceso, á los diferentes generos de inflexión de las curvas de doble curvatura, á las diferentes familias de superficies, y, por último, la aplicación de la teoría de la curvatura de las superficies á la investigación de las propiedades de la superficie envolvente de una serie de esferas de radio variable, cuyos centros se hallan distribuídos en una curva cualquiera, son nuevos puntos de doctrina que, expuestos en sus *Developpements de Geométrie*, aumentan el caudal de la ciencia matemática, al mismo tiempo que Laplace y Lagrange la hacían extenderse.

La actividad infatigable de Monge, no solo produjo una nueva rama en la ciencia, sino que formó una pléyade de inteligencias matemáticas que habían de encauzarse por las nuevas corrientes, como de ello dieron pruebas sus discípulos Meusnier, Carnot, Poinsot, Dupín, Poncelet, Gergonne, Briot, Brisson y otros muchos que han contribuído á formar el nuevo edificio cuyas sólidas bases echó el gran geómetra.

(Se continuará).

Sobre la teoría de las formas algébricas.--LEÇONS D'ALGEBRE SUPERIEUR, par G. Salmon

Después de haber transcurrido un largo intervalo de tiempo, desde que se publicó el primer fascículo de tan importante obra, traducido de la 4.ª edición inglesa por M. O. Chemin, se han visto satisfechos los deseos de cuantos esperaban con impaciencia su terminación, al ser ya un hecho el haber aparecido el segundo y último fascículo.

Conocido es el éxito, tanto de las obras geométricas, comò del notable tratado de Álgebra que la ciencia debe al ilustre profesor del Colegio de la Trinidad de Dublín, por haber contribuído de una manera eficaz á la difusión de las originalísimas teorías cuyo germen se halla en una notable Memoria de Boole *(Cambridge Mathematical Journal, 1861)*, si bien, como dice Salmon en sus notas históricas, Lagrange dió la primera idea de invariación *(Mémoires de Berlin 1773*, p. 265) del discriminante de la forma cuadrática $ax^2+2bxy+cy^2$, cuando se reemplaza en ella x por $x+\lambda y$, así como Gauss en sus *Disquisitiones aritmeticæ* estudió la transformación lineal general en su aplicación á las formas cuadráticas binarias y ternarias, debiéndose el desarrollo

de esta moderna teoría principalmente al matemático Cayley, de cuyas numerosas Memorias publicadas en *Philosophical transactions* tienen conocimiento cuantos se dedican á los estudios matemáticos.

Estas ideas, cuya propiedad pertenece á los matemáticos ingleses, por más que pueda llevarse su origen, como se ha indicado, á los trabajos de Gauss sobre las formas cuadráticas, hallaron eco entre los geómetras del continente, y gracias á la constancia y asiduidad de talentos matemáticos como Hermite, Aronhol, Clebsch, Brioschi y otros, han llegado á constituir un cuerpo de doctrina que ha aumentado el campo de la Geometría de igual modo que el del Análisis.

En pugna la nueva Geometría que fundaron y organizaron los Monge, Poncelet, Chasles y Staudt, según nuevos métodos, con el antiguo método cartesiano, parecía éste amenazado de quedar en lugar secundario ante el rápido progreso de aquélla, cuando hasta principios del siglo actual había tenido una preponderancia indiscutible.

La Geometría moderna poseía métodos propios que permitían acumular el número de sus verdades y de relaciones entre los elementos de la extensión. La dualidad, la correlación y la homografía dilataban de un modo asombroso sus horizontes, y el método cartesiano se iba reduciendo á ser un medio de verificar y generalizar los resultados de la primera. Era, pues, necesario que por un progreso correlativo llegase también á poseer, como la Geometría superior, métodos propios y eficaces para conducirla á teoremas nuevos, á verdades y relaciones geométricas, y este fin lo han realizado los descubrimientos de Boole, Cayley y Sylvester, cuya difusión es debida, muy principalmente, al talento propagandista del profesor Salmon.

El nuevo algoritmo, que pudo considerarse como constituído definitivamante con un carácter y circunscripción propios, desde el momento en que Cayley determinó la existencia de otras funciones, que además del discriminante poseían la propiedad de *invariación*, por efecto de una transformación lineal, se extiende lo mismo por los dominios del Análisis que por los de la Geometría, y no es de extrañar que la obra de que tratamos se refiera á estos dos puntos de vista relacionados también con las obras geométricas del mismo autor.

Ya se sabe que *forma*, en la nueva álgebra, es una expresión algébrica racional entera y homogénea, que toda función de los coeficientes de una forma que no cambia de valor, cuando los coeficientes varían por efecto de una sustitución lineal hecha en sus variables, es un *inva-*