Las matemáticas en las bibliotecas escolares

BBK-matika egitaraua

GUÍA DIDÁCTICA DE ACTIVIDADES CON LAS PIEZAS DEL

livecube

PIEZEKIN LAN EGITEKO JARDUERA GIDA

Estimulación de la habilidad espacial, lógica y de resolución de problemas mediante conceptos de policubos

(Polikuboen kontzeptuak erabiliz trebetasun-espaziala, trebetasun-logikoa eta problemak ebazteko trebetasuna pizteko)

Alexander Aginagalde, Pedro Alegría, Raúl Ibáñez

Real Sociedad Matemática Española

bbk

Programa BBK-máticas

BBK-matikak egitaraua

Argitaratzaile Edita
Fundación Bilbao Bizkaia Kutxa Fundazioa

©Testuak Textos
Alexander Aginagalde
Pedro Alegría
Raúl Ibáñez

Diseinu eta maketazioa Diseño y maquetación
Ikeder, S.L.

Inpresioa eta enkuadernazioa
Impresión y encuadernación
Baster Talleres Gráficos, S.L.L.

El camino a la sabiduría

¿El camino a la sabiduría?
Bueno, es simple y fácil de explicar.
Errar,
y errar,
y errar otra vez.
Pero menos,
y menos,
y menos.

(Piet Hein)

Jakituriaren bidea

Jakituriaren bidea?
Beno, sinplea eta azaltzeko erreza da.
Huts egitea,
eta huts egitea
eta berriz ere huts egitea.
Baina gutxiago
eta gutxiago
eta gutxiago

(Piet Hein)

Introducción SARRERA

La presente guía tiene como objetivo proponer un conjunto de actividades didácticas que pueden realizarse con las denominadas piezas de *LiveCube*. Dichas piezas son bloques en forma de cubo, todos del mismo tamaño, una de cuyas caras tiene unos salientes que permiten encajar los cubos entre sí para formar figuras complejas, lo que permite una gran versatilidad en la construcción de variados puzzles geométricos y originales figuras tridimensionales. El material citado lo distribuye la empresa *Livecube T.B.S. Inc.* a través de la página web www.livecube.com y los puzzles que pueden construirse con estas piezas constituyen una valiosa herramienta didáctica, a la vez que entretenida, con la que enseñar a los estudiantes conceptos de emparejamiento de formas y colores, así como desarrollar sus habilidades espaciales, analíticas y lógicas.

Algunas de las actividades que se describen en esta guía son un complemento de las citadas en la guía anterior "Juegos Didácticos", del programa **BBK-máticas, las matemáticas en las bibliotecas escolares**, concretamente las correspondientes a los capítulos "El cubo Soma" y "El juego de los pentominós". Además, la versatilidad de estas piezas permite construir otros modelos y realizar más actividades, como las que se encuentran en la página oficial de *LiveCube* y en las de otros diseñadores, algunos de ellos citados en las referencias al final de esta guía.

Como detalle práctico, todas las figuras que se construyan con las piezas del *LiveCube* deben estar armadas de modo que las caras exteriores sean lisas, no dejando a la vista los salientes que tienen las piezas para su ensamblaje.

Gida honen helburua LiveCubeko piezak erabiliz egin daitezkeen jarduerak didaktikoak proposatzea da. Pieza hauek, kubo formako blokeak dira, denak tamaina berekoak. Kuboaren aurpegietako batek koska batzuk ditu, honela figura konplexuagoak sor daitezke kuboak bata besteekin elkartuz, puzzle geometriko eta irudi tridimentsional aunitz eraikitzeko aukera ematen dutelarik. Aipatutako materiala Livecube T.B.S. Inc. enpresak banatzen du www.livecube.com web orriaren bitartez. Pieza hauek erabiliz eraiki daitezkeen puzzleak ikasleei koloreak eta formak elkar-erlazionatzeko, eta beraien trebetasun-espaziala, -analitikoa, eta -logikoa garatzeko benetako lan tresna didaktiko baliogarria eta era berean atsegingarria eratzen dute.

Gida honetan aipatzen diren jardueretariko batzuk BBK-matikak, matematikak eskola liburutegietan programarako "Jolas didaktikoak" gidako jarduerak osatzeko erabilgarriak dira; "Soma kuboa" eta "Pentaminoen jokua" esaterako. Gainera, pieza hauen aldakortasunak modelo gehiago eraikitzera eraman gaitzake edo eta jarduera gehiago egitera ere, LiveCuberen web orri ofizialean daudenak edo erreferentzietan aipatzen diren beste diseinatzaile batzuk sortutakoak.

Xehetasuna praktiko bezala, LiveCube bitartez eraikitzen diren irudi denen kanpoko aurpegiak leunak dira, hau da, ez ditugu piezek beraien muntaiarako dituzten koskak begi bistan uzten.

1. Policubos Polikuboak

El término “poliominó” fue acuñado por *Solomon W. Golomb* en la década de 1950 para definir las figuras que se obtienen conectando dos o más cuadrados por alguno de sus lados. Si utilizamos cubos en lugar de cuadrados, tendremos los poliominós tridimensionales, que llamaremos **policubos**, con los cuales realizaremos diferentes actividades con el fin de estimular el desarrollo de habilidades motrices y de coordinación manual, así como la destreza espacial y el razonamiento lógico.

Las actividades de esta sección consistirán en una búsqueda de las distintas formas que pueden adoptar los policubos, así como el descubrimiento de las simetrías que presentan.

“Poliomino” hitza, lauki ezberdinak alde bat edo gehiagotik elkartzetik sortutako irudiak adierazteko, *Solomon W. Golomb*ek 1950eko hamarkadan sortu zuen. Laukiak beharrean kuboak erabiltzen baditugu, poliomino tridimentsionalak izango ditugu, polikuboak deituko ditugunak. **Polikubo** hauek erabilita jarduera ezberdinak egingo ditugu mugimendu-trebetasuna eta eskuen koordinazioa estimulatzeko intentzioarekin, era berean arrazonamendu logikoa eta abilezia espaziala ere landuko ditugu.

Atal honetako jardueretan polikuboek har ditzaketen forma ezberdinak aurkitzen eta hauek izan ditzaketen simetriak aztertzen arituko gara.

Actividad 1.1 - Identificación de los pentacubos planos.

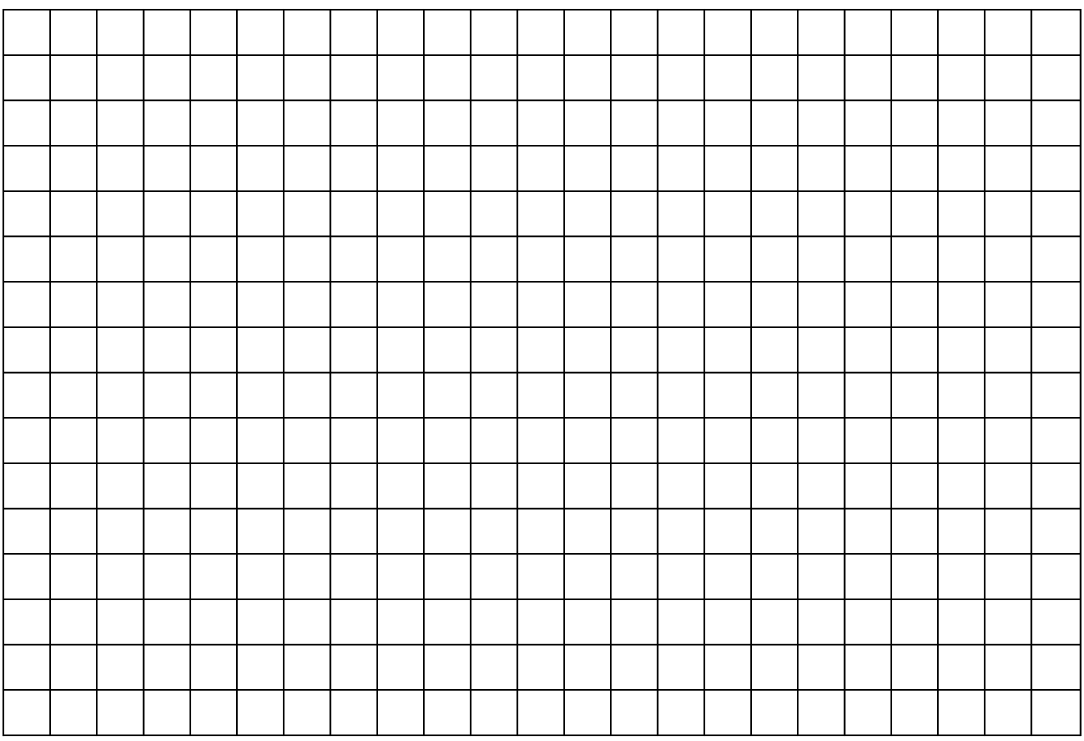
Un policubo plano es una figura plana (es decir, al colocarla sobre una superficie plana todos los cubos se apoyan en la misma) formada por varios cubos unidos por alguna de sus caras. Los policubos planos constituyen la versión tridimensional de los poliominós, ya que tienen su mismo contorno pero además tienen altura. En esta actividad se guía a los estudiantes en la identificación de todos los pentacubos planos, es decir los que están formados por 5 cubos.

Se entregan cinco cubos a cada estudiante y una hoja de papel cuadriculada, donde las dimensiones de cada cuadro coinciden con las de las piezas del *LiveCube*.

1.1 jarduera - Pentakubo planoen ezagutza.

Polikubo plano bat kubo askoz osatutako figura lau bat da (hau da, gainazal lau baten gainean kokatzerakoan kubo denak bertan jartzen diren), non kuboen aurpegiak elkarrekin dauden. Polikubo lauak poliomino tridimentsionalak dira, ingerada (aurpegi) berdina izateaz aparte altuera baitute. Jarduera honetan ikasleak pentakubo guztiak, hau da 5 kuboz osatutakoak, aztertzera bideratuko ditugu.

Ikasle bakoitzari bost kubo eta horri paper laukidun bat ematen zaio, non lauki bakoitzaren dimentsioak *LiveCube*ko piezen dimentsio berak diren.



Los estudiantes colocarán cinco cubos en la cuadrícula, siempre unidos por alguna cara, no sólo por aristas, y colorearán la figura resultante. Tratarán de encontrar el mayor número de figuras diferentes que puedan. Al final se compararán los resultados de cada estudiante para completar entre todos las diferentes figuras. Habrá que determinar y desechar aquellas figuras que se obtengan de otras mediante algún tipo de simetría espacial, en concreto un giro en el plano o en el espacio (ya que estos movimientos son los que se realizan cuando se tiene en las manos una pieza de un puzzle geométrico).

Ikasleek paper laukidunean bost kubo kokatuko dituzte, beti ere aurpegi batetik elkartuak, ez ertzetatik, eta lortutako irudia margotuko dute. Ahalik eta irudi ezberdin gehien aurkitzen ahaleginduko dira. Bukatutakoan, ikasle bakoitzaren lana besteekin alderatuko da irudi ezberdin denen klasifikazio bat osatzeko intentzioarekin. Simetria bitartez, planoko edo espazioko biraketak esaterako (hauek baitira puzzle geometriko baten piezak eskuetan izatean egiten diren mugimenduak), beste irudi batzuetatik sortzen diren errepikatutako irudiak alde batera utzi beharko dira.

Actividad 1.2 – Búsqueda sistemática de los 12 pentacubos planos.

Surgen ahora las preguntas siguientes: ¿Las figuras obtenidas en la actividad 1.1 son todos los posibles pentacubos? ¿Cómo estar seguros que no hay más? ¿Cómo encontrar los restantes?

Esto motiva la actividad de una búsqueda sistemática de todos ellos.

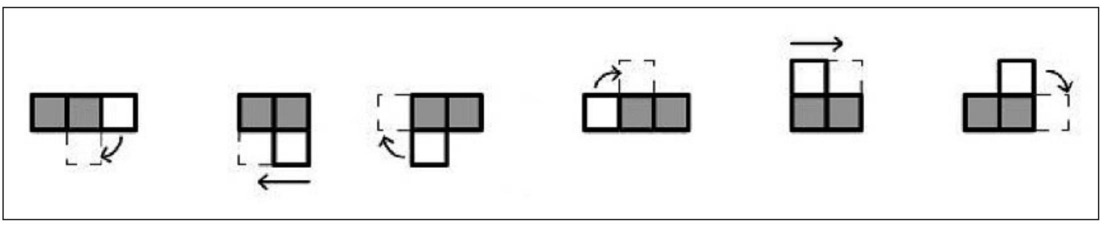
Para ello se entregan sólo dos cubos y se pide que los unan entre sí (salvo posibles simetrías, sólo hay una posibilidad). A continuación se entrega un cubo adicional para que construyan todos los posibles tricubos, colocando el tercer cubo en todas las posiciones posibles a partir de la pieza anterior, siguiendo el recorrido de la figura.

1.2 jarduera – 12 pentakubo planoen bilaketa sistematikoa.

Ondoko galderak sortzen zaizkigu: 1.1 jardueran lortutako irudiak pentakubo guztiak al dira? Nola egon gaitezke ziur ez daudela gehiago? Nola aurki ditzakegu falta direnak?

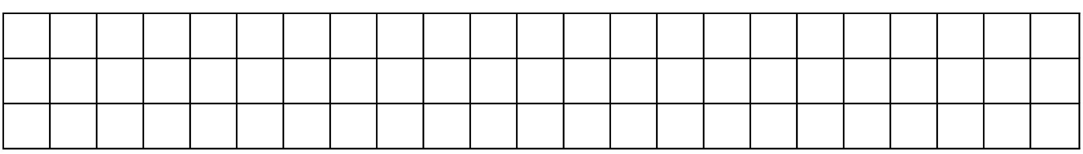
Galdera guzti hauek existitzen diren pentakubo guztien bilaketa sistematikoa ekarriko duen jarduera sortzen dute.

Horretarako bi kubo bakarrik ematen dira eta elkarrekin batzeko eskatzen da (simetria posibleak aparte, aukera bakarra dago). Jarraian beste kubo bat gehiago emango da trikubo denak eraikitzeko; kubo berri hau, irudiko ibilbidea jarraituz, aurreko piezarekiko egoera ezberdin posible guztietan kokatuko da.



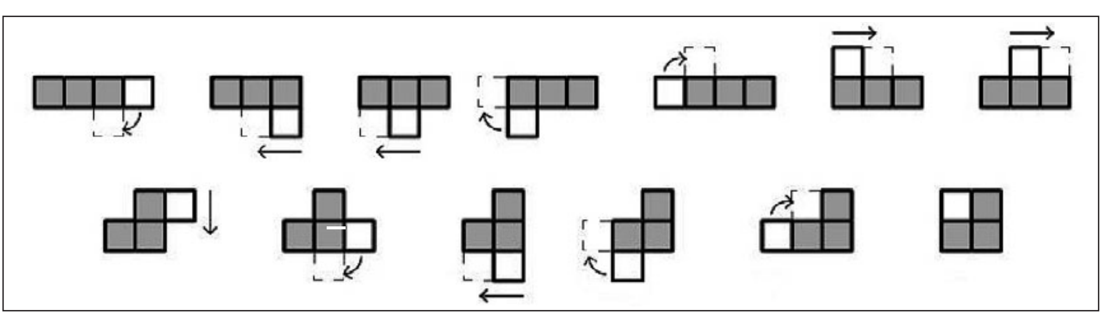
Se colorearán los resultados en una hoja cuadriculada como la siguiente, encontrando los dos únicos posibles tricubos (las demás configuraciones que aparecen se obtienen girando esos dos tricubos).

Emaitzak ondoko erako paper laukidunean margotzen dira; bi dira aukera bakarrak (beste konfigurazioak bi trikubo hauek biratuz lortzen dira).



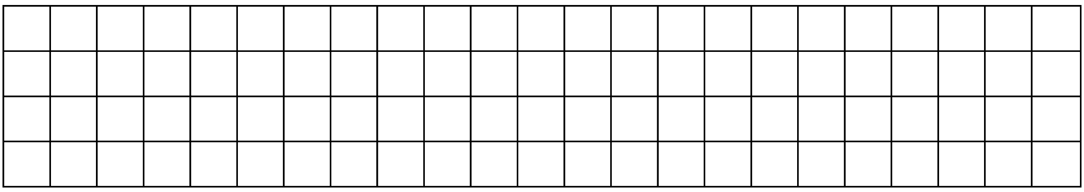
Se entrega otro cubo adicional y se trata de conseguir todos los posibles tetracubos formados por cuatro cubos añadiendo el último cubo de todas las formas posibles a todos los tricubos siguiendo de nuevo el recorrido de las figuras.

Beste kubo bat gehiago eman eta lau kuboz osatutako tetrakubo posible denak lortzen saiatuko gara, horretarako kubo berria aurreko trikuboari gehituko diogu irudian agertzen den ibilbidea jarraituz.



Las figuras obtenidas se colorearán en otra hoja cuadriculada. En caso necesario, se ayudará al estudiante a conseguir los cinco posibles tetracubos. Puede también recordarse, si procede, el juego del TETRIS, que consistía precisamente en encajar los tetrominós que iban apareciendo en la pantalla.

Lortutako irudiak beste paper laukidun batean irudikatuko dira. Jarraian, bost tetrakubo posibleak lortzen lagunduko zaio ikasleari. Behar izan ezkero, TETRIS jokoa gogoratu daiteke, pantailan agertzen ziren tetrominoak bata bestearen ondoan ahalik eta egokien kokatzean oinarritzen zen jokoa.



Por último, se añade el quinto cubo y se coloca en todas las posiciones posibles alrededor de todos los tetracubos obtenidos anteriormente para descubrir las diferentes combinaciones que se forman. Así se llegará a construir los 12 pentacubos, asegurándose que son todos los posibles y no falta ninguno (el resto de configuraciones que nos aparecen se obtienen a partir de estos 12 mediante giros espaciales).

Actividad 1.3 – Búsqueda de los policubos tridimensionales.

Si no nos limitamos a colocar los cubos en una hoja cuadriculada y tratamos de unirlos de todas las formas posibles en el espacio, aumenta el número de configuraciones con cuatro y cinco cubos. Esta actividad consiste en obtener dichas configuraciones mediante procedimientos análogos a los vistos en las actividades anteriores.

En primer lugar, se puede observar que los dos tricubos obtenidos en el plano son también los únicos posibles en el espacio.

A partir de ellos, al colocar una cuarta pieza en todas las posiciones posibles, sin limitarnos al plano, se obtienen los ocho tetracubos tridimensionales de la imagen, y cualquier otra configuración que obtengamos no es más que el resultado de girar alguno de los 8 tetracubos anteriores. Puede hacerse notar a los estudiantes que las figuras 4-5 y 4-6 son una la imagen especular de la otra, pero no podemos hacer un giro espacial que nos lleve de una a la otra.

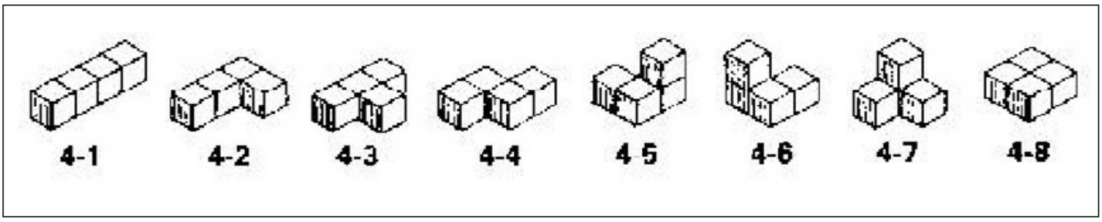
Azkenik, bosgarren kuboa gehituko da eta aurreko tetrakubo guztien inguruan kokatuko da sortzen diren aukera ezberdinak ikusteko. Honela 12 pentakubo eraikiko dira, gehiago ez daudela ziurtatuz (lortzen diren beste aukerak 12 hauen biraketa espazialak besterik ez dira).

1.3 jarduera – Polikubo tridimentsionalen bilaketa.

Paper laukiduna alde batera utziz eta kuboak espazioan elkartzen saiatzen bagara, hiru edo lau kuborekin egin daitezkeen konfigurazio kopurua handiagotzen da. Jarduera honetan konfigurazio hauek lortzen saiatuko gara, aurreko jardueran erabili ditugun bide antzekoak jarraituz.

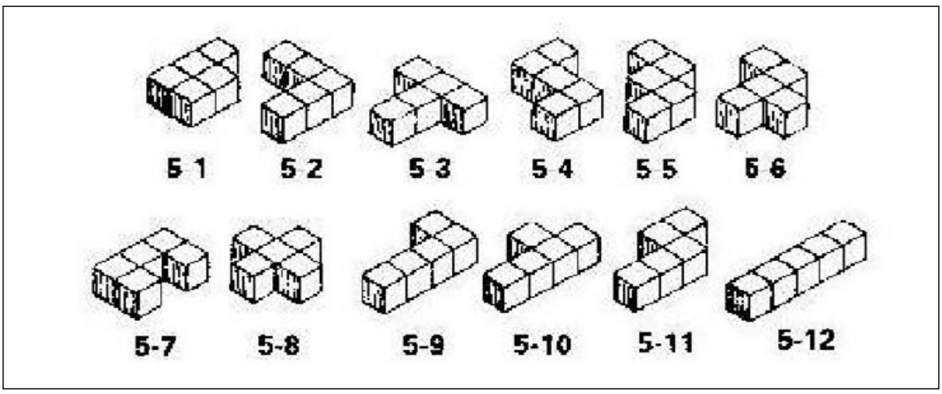
Lehenengo eta behin, planoan eta espazioan lor daitezkeen trikuboak berdinak direla ikus dezakegu.

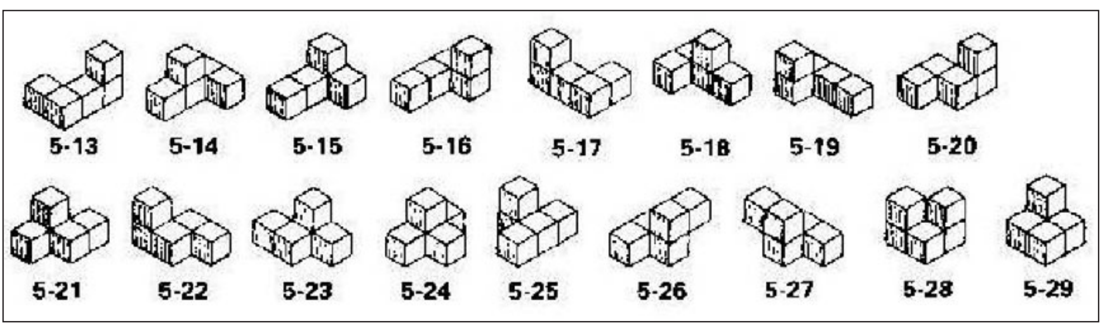
Behin trikubo posibleak ditugula ahal den modu guztietan laugarren pieza bat kokatuko dugu, honela irudian agertzen diren zortzi tetrakubo tridimentsionalak lortzen dira; eta lortzen dugun beste edozein konfigurazio 8 tetrakubo hauetako bat biratzearen emaitza besterik ez da. 4-5 eta 4-6 irudiak bata bestearen ispilu-irudiak direla ohartarazi diezaiekegu ikasleei, baina ezin dugula batetik bestera eramango gaituen biraketa espazialik egin.



Del mismo modo, añadimos un quinto cubo y trataremos de colocarlo en las posiciones posibles a partir de los tetracubos obtenidos anteriormente. Debemos conseguir las 29 configuraciones de la figura adjunta, los 12 pentacubos planos ya conocidos y otros 17 pentacubos que no pueden disponerse en un plano.

Era berean, bosgarren kubo bat gehituko dugu eta aurretik lortutako tetrakuboetan kokatzen ahaleginduko gara. Irudian agertzen diren 29 konfigurazioak eraiki behar ditugu, ezagutzen ditugun 12 pentakubo lauak eta planoan kokatu ezin diren beste 17 pentakuboak.





Una posible actividad intermedia, que puede ayudar a los estudiantes a descartar configuraciones repetidas, sería enseñar diferentes pentacubos ya construidos – algunos de ellos iguales entre sí – y plantearles que emparejen los que sean iguales.

Por último, se puede plantear la búsqueda de parejas de pentacubos, de los 29 existentes, de modo que uno sea imagen especular del otro.

Tarteko jarduera posible bat, ikasleek errepikatutako konfigurazioak alde batera uzteko lagun dezakeena, eraikitako zenbait pentakubo ezberdin erakustea litzateke – hauetako batzuk elkarrekiko berdinak direlarik – eta berdinak direnak bata bestearekin elkartzeko eskatu dezakegu.

Azkenik, existitzen diren 29 pentakuboetatik, bata bestearen ispilu-irudi diren pentakubo-bikoteen bilaketa plantea daiteke

2. Cálculo de áreas y volúmenes con los pentacubos planos
2. Azalera eta bolumenen kalkulua pentakubo planoak erabiliz

Para realizar las actividades de esta sección, cada alumno dispondrá de 60 piezas de *LiveCube* y construirá con ellas los 12 pentacubos planos, que sean iguales.

En lo sucesivo, adoptaremos como unidad de longitud la de cualquier arista de una pieza de *LiveCube*, de modo que la unidad de superficie será la de cualquier cara de una pieza. Así pues, el área de un policubo de dos piezas es dos, de un tricubo es tres, de un tetracubo es cuatro, etc.

Atal honetako jarduerak egiteko, ikasle bakoitzak LiveCubeko 60 pieza izango ditu eta berauekin 12 pentakubo lauak eraikiko ditu.

Jarraian, luzera unitate bezala LiveCubeko pieza baten hertza hartuko dugu, era berean gainazal unitatea edozein piezaren aurpegia izango da. Honela, bi piezetako polikubo baten azalera 2 da eta trikubo batena 3, tetrakubo batena 4, etab.

Actividad 2.1 – Construcción de rectángulos mediante policubos (de menos de 5 cubos).

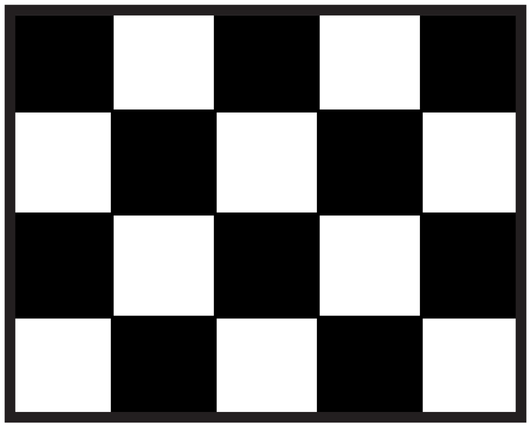
En esta actividad hay que intentar resolver dos puzzles planos, para ello se intentará encontrar una solución positiva a los mismos y si no se encuentra, demostrar o justificar que no existe tal solución.

2.1 jarduera – Laukizuzena bat eraikitzen polikuboak erabiliz (5 kubo baino gutxiagokoa).

Jarduera honetan puzzle lauak ebazten ahaleginduko gara, horretarako emaitza positibo bat aurkitzen saiatuko gara eta aurkitzen ez badugu, emaitzarik ez dagoela frogatzen edo argudiatzen ahaleginduko gara.

Puzzle 1: Los 5 tetracubos tienen un área total de 20 unidades. ¿Se podrá construir con ellos un rectángulo 4 x 5, como el que aparece en la imagen?

1. Puzzlea: 5 tetrakubok 20 unitateko azalera osoa dute. Eraiki al daiteke, tetrakubo hauek erabilita bakarrik, irudian agertzen den 4x5 itxurako laukizuzena?



Puzzle 2: Los 8 primeros policubos tienen un área total de 28 unidades. ¿Se podría construir con ellos un rectángulo 4 x 7?

La respuesta a ambos puzzles es diferente. Mientras que el segundo tiene solución, sólo hay que encontrarla (en caso de no conseguirlo una posible ayuda es considerar uno de los tetracubos irregulares e ir analizando paso a paso los posibles lugares donde colocarlo), el primero no la tiene. Pero, ¿cómo demostrar que no tiene solución? Basta observar que el tetracubo en forma de T tapará en la cuadrícula 4 x 5 ajedrezada tres cuadros de un mismo color (por ejemplo, negro) y un cuadrado del otro, pero como los otros tetracubos tapan el mismo número de cuadrados blancos y negros (siempre dos), cualquier disposición taparía distinto número de cuadrados negros y blancos, mientras que la cuadrícula de la imagen tiene el mismo número de cuadros negros y blancos.

2. Puzzlea: Lehenengo 8 polikuboek 28 unitatetako azalera totala dute. Eraiki al daiteke berauekin 4x7 tamainako laukizuzenik?

Puzzle bakoitzaren erantzuna ezberdina da. Bigarrenak emaitza posiblea du (lortu ezean, laguntza bezala tetrakuboetako bat irregularra dela esan dezakegu eta pausuz pausu koka daitekeen lekuak aztertzea gomendatzen da), baina lehenak ordea ez. Nola froga dezakegu lehenak ez duela emaitzarik? T itxurako tetrakuboak, 4x5 sareta ajedreztatuan, kolore bereko hiru lauki estaliko ditu (beltza adibidez) eta beste koloreko (zuriko) bakarra. Beste tetrakuboekin ordea kolore bereko bi lauki estaltzen dira. Baina irudiko saretak kopuru bereko lauki zuriak eta beltzak ditu.

Actividad 2.2 – Determinación de áreas y perímetros.

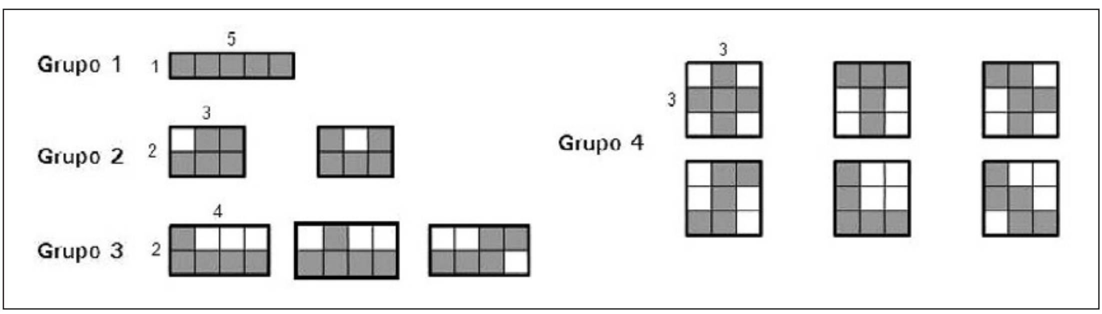
Por la suposición hecha anteriormente, los pentacubos tienen un área igual a cinco unidades. Sin embargo, las distintas formas que adoptan las piezas hacen que el perímetro sea diferente. En la primera parte de esta actividad se propone la clasificación de las piezas según su perímetro. Se comprueba que todas las piezas, salvo una, tienen el mismo perímetro. Una forma alternativa de medirlo es contar el número de uniones entre las piezas del *LiveCube*, cada una de las cuales hará que el perímetro disminuya en dos unidades (las de las caras en contacto).

Otra clasificación que puede realizarse consiste en agrupar los pentacubos según las dimensiones del rectángulo más pequeño en el que pueden inscribirse. Hay que buscar, de forma individual o por equipos, los cuatro grupos mostrados en la imagen.

2.2 jarduera – Azaleraren eta perimetroaren kalkulua.

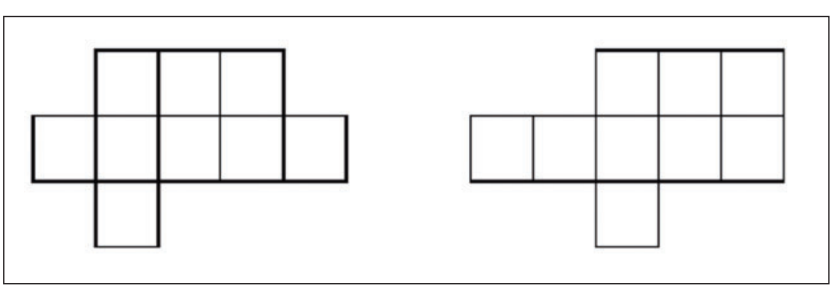
Gorago aipatutako azaleraren definizioaren arabera, pentakuboek bost unitateko azalera dute. Piezek hartzen dituzten forma ezberdinak direla eta kasu bakoitzean perimetroa ezberdina da. Jarduera honen lehenengo atalean piezak sailkatuko ditugu berauen perimetroaren arabera. Pieza denek, batek ezik, perimetro bera dutela ikustea erreza da. Hau egiteko bide bat LiveCubeko piezak elkartzerakoan eginiko elkarketa kopurua kontatzea litzateke, elkarketa bakoitzak perimetroa bi unitatetan (kontaktuan dauden aurpegienak) txikituko duelarik.

Beste sailkapen bat pentakuboak inskriba daitezkeen laukizuzen txikienaren dimentsioaren araberako litzateke. Irudian agertzen diren lau taldeak aurkitu behar dira, horretarako taldekako- edo bakarkako-lana egin daiteke.



A continuación se plantea el problema de determinar la menor superficie, no necesariamente un rectángulo, que sea capaz de contener individualmente a todos los pentacubos. Para ello se puede utilizar una hoja cuadriculada donde se irán colocando sucesivamente las piezas para tratar de encontrar dicha superficie. Las dos soluciones posibles se muestran en la figura.

Jarraian pentakubo denak barruan izango dituen gainazal txikiena, ez du zertan laukizuzena izan, aurkitzen ahaleginduko gara. Horretarako paper laukidun bat erabil daiteke, eta bertan kokatuko ditugu banan-banan piezak. Bi emaitza posibleak ondoko irudian azaltzen dira:



Actividad 2.3 – Construcción de rectángulos con pentacubos.

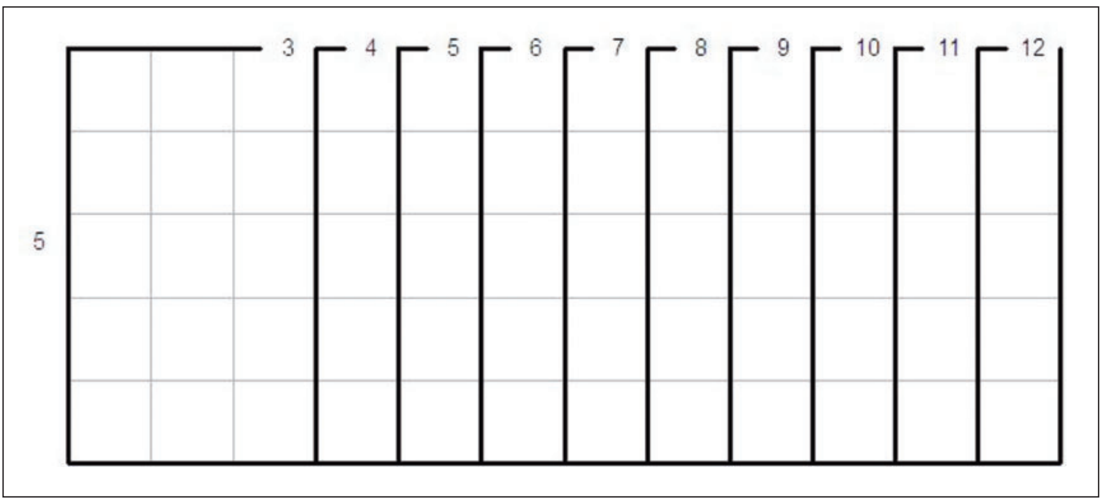
Nuestra siguiente actividad consistirá en construir rectángulos de dimensiones 3x5, 4x5, 5x5, etc., utilizando tres, cuatro, cinco, etc., pentacubos.

Empezando con tres piezas concretas y utilizando el diagrama de la figura, formar un rectángulo de dimensiones 3x5. A continuación añadir una pieza y construir un rectángulo de dimensiones 4x5. Continuar añadiendo piezas una a una para formar rectángulos de la misma altura hasta llegar al rectángulo 12x5 utilizando todas las piezas.

2.3 jarduera – Laukizuzenak eraikitzen pentakuboak erabiliz.

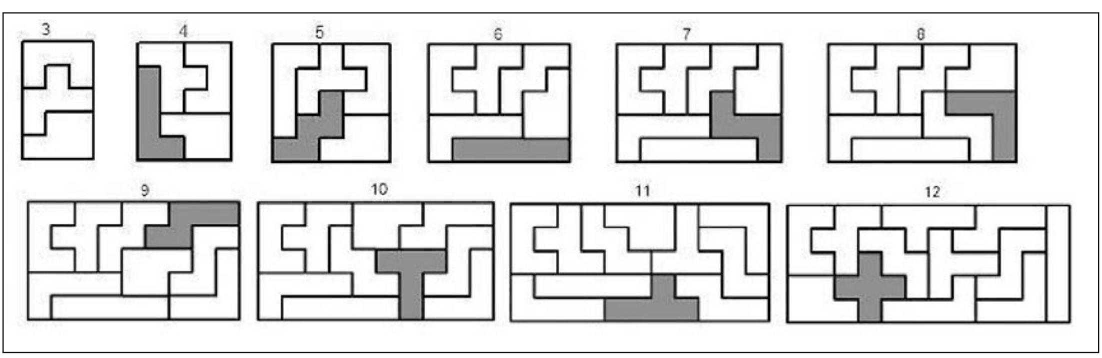
Gure hurrengo jarduera 3x5, 4x5, 5x5, etab. dimentsioko laukizuzenak eraikitzea izango da. Horretarako hiru, lau, bost, etab. pentakubo erabiliko ditugu.

Hiru pieza bakarrik erabilita eta irudiko diagrama erabilita, 3x5 dimentsioko laukizuzena sortuko dugu. Jarraian pieza bat gehitu eta 4x5 dimentsioko laukizuzena eraikiko dugu. Altuera berdineko laukizuzenak eraikiko ditugu pausuz pausu pieza berri bat gehitzen dugularik. Behin pieza denak erabili direla 12x5 dimentsiotako laukizuzena izango dugu.



Como ejemplo, se ofrece una solución comenzando con las tres piezas de la izquierda añadiendo en cada paso las piezas sombreadas.

Adibide giza emaitza posible bat ematen da, ezkerreko hiru piezetatik hasita eta pausu bakoitzean ilundutako pieza gehitzen delarik.



Sería interesante guardar un registro de las combinaciones de piezas para formar los diferentes rectángulos que van saliendo, desde las distintas posibilidades de 3 piezas para el rectángulo 3 x 5 en adelante. De esta forma se está generando un importante número de puzzles geométricos planos (como los que aparecen en el "juego de los pentominós").

Interesgarria litzateke, 3 piezekin eta 3x5 laukizuzenetik hasita, pieza guztien konbinazioak sortutako laukizuzenen erregistro bat gordetzen joatea. Era honetan puzzle geometriko lau ugari sortzen gabiltza ("pentominoen jokoan" agertzen diren bezalakoak).

Actividad 2.4 – Determinación de las dimensiones de los rectángulos.

El siguiente paso consiste en determinar qué posibles dimensiones debe tener un rectángulo que pueda construirse con todas las piezas. Para ello es necesario conocer todas las factorizaciones del número 60 en producto de dos números.

La primera factorización, 60 = 2x30, es imposible porque no todas las piezas pueden ajustarse en un rectángulo de anchura igual a dos.

La segunda factorización, 60 = 3x20, conduce a dos soluciones, una de las cuales se muestra en la imagen.

2.4 jarduera – Laukizuzenen dimentsioak finkatzea.

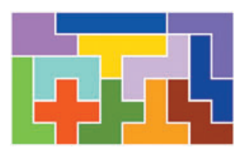
Hurrengo pausua pieza denekin eraiki daitekeen laukizuzen baten dimentsioak finkatzean datza. Horretarako 60 zenbakiaren bi faktoretako faktorizazio posible denak ezagutu behar dira.

60ren lehenengo faktorizazioa, 60 = 2x30, ezinezkoa da pieza denak ezin direlako bi zabalera duen laukizuzen batera sartu.

Bigarren faktorizazioak, 60 = 3x20, bi emaitzatara eramaten gaitu, horietako bat irudian azaltzen delarik:

El resto de formas posibles corresponde a los rectángulos 4x15, 5x12 y 6x10, y en la imagen siguiente se muestra una solución para cada caso.

Beste forma posibleak, 4x15, 5x12 eta 6x10 laukizuzenei dagozkie. Ondoko irudian kasu bakoitzerako emaitza agertzen da.



Como información adicional, se ha demostrado que existen 2339 soluciones diferentes del rectángulo 6x10 (encontradas en 1960 por *Colin Brian y Jennifer Haselgrove*), 1010 soluciones del rectángulo 5x12, 368 soluciones del rectángulo 4x15 y sólo dos soluciones del rectángulo 3x20.

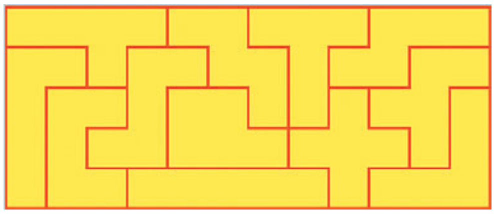
Aipatzekoa litzateke, 6x10 kasuko laukizuzenerako 2339 emaitza ezberdin daudela frogatu dela (1960an *Colin Brian*ek eta *Jennifer Haselgrove*ek aurkituak). 15X12 dimentsioko 1010 emaitza ezagutzen dira eta 4x15 dimentsioko 368 emaitza aurki daitezke, eta 3x20 laukizuzenerako ordea bi soluzio bakarrik daude.

Actividad 2.5 – Estudio de las simetrías.

2.5 jarduera – Simetrien azterketa.

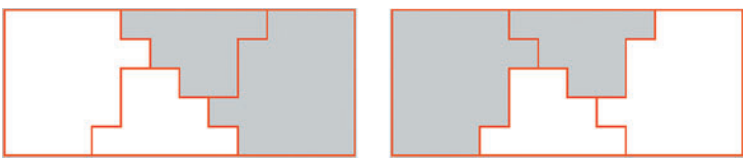
Algunos de los posibles rectángulos que pueden formarse con los pentacubos tienen formas simétricas cuya observación resulta interesante. Por ejemplo, la disposición de la figura

Pentakuboak erabiliz sortu daitezkeen laukizuzen batzuk oso interesgarriak diren forma simetrikoak dituzte. Adibidez, figuraren kokapenagatik laukizuzenaren kontrako aldeetan



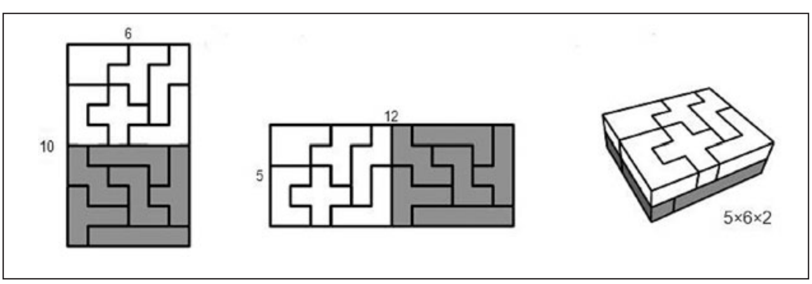
permite ver las simetrías que se forman en lados opuestos del rectángulo (al considerar solamente algunas de las líneas del puzzle), como se observa en las figuras siguientes.

sortzen diren simetriak ikustea posible da (puzzlearen lerro batzuk bakarrik kontuan hartuz), ondoko irudietan ikus daitekeen bezala:



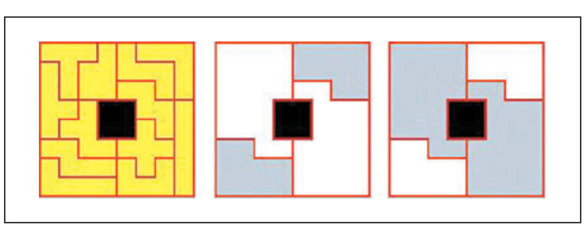
Un ejemplo interesante lo constituye el de la figura siguiente, pues se construye un rectángulo de dimensiones 6x10 a partir de dos rectángulos de dimensiones 6x5. Esto permite construir un paralelepípedo de dimensiones 2x5x6 colocando una mitad sobre la otra.

Ondoko adibidea oso interesgarria da, 6x10 dimentsioko laukizuzen bat 6x5 dimentsioko bi laukizuzenetatik sortzen baita. Honela 2x5x6 dimentsioko paralelepipedo bat eraikitzea baimentzen gaitu zati erdi bakoitza bata bestearen gainean kokatuz.



Otro ejemplo de disposiciones simétricas es el que se muestra en la figura adjunta, a partir de un cuadrado 8x8 con un hueco cuadrado en el centro.

Erdian hutsune karratu bat duen 8x8 dimentsioko karratu batetik hasita kokapen simetrikoaren beste adibide bat daukagu.



Como actividad complementaria, se pueden buscar simetrías en las soluciones que se hayan obtenido en la actividad 2.4.

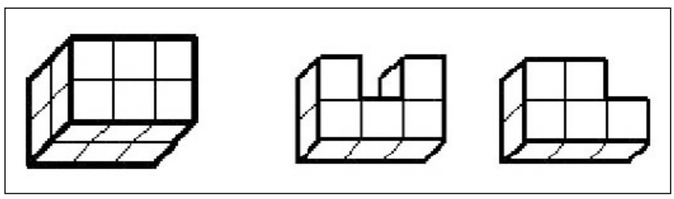
Jarduera gehigarri bezala 2.4 jardueran lortutako emaitzetan simetriak bilatzea proposatzen da.

Actividad 2.6 – Cálculo de volúmenes.

Debido a que las piezas del *LiveCube* son tridimensionales, se pueden plantear problemas de construcción de figuras en el espacio y de cálculo de volúmenes. Un problema inicial consiste en averiguar cuál es la caja de menor volumen que puede contener dos pentacubos. La estrategia adecuada consiste en utilizar los resultados de la actividad 2.1 para llegar a la solución indicada en la figura. Debido a que el volumen de la caja es 2x2x3 = 12, cualquier solución dejará dos huecos en la caja.

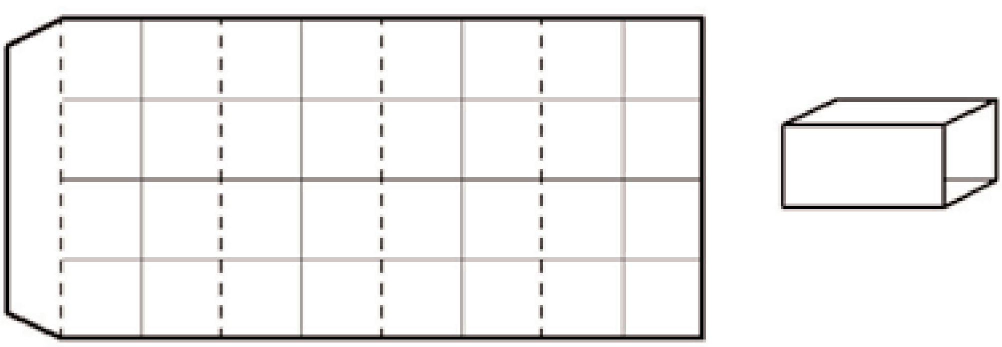
2.6 jarduera – Bolumenen kalkulua.

LiveCubeko piezak tridimentsionalak direnez, figurak espazioan eraikitzeko problemak eta bolumenaren kalkuluaren inguruko problemak plantea daitezke. Hasierako problema bat honakoa litzateke: zein bolumen izan behar du bi pentakubo barruan sartzen diren kutxa txikienak? Emaitzara heltzeko biderik egokiena 2.1 jarduerako emaitza erabiltzea litzateke, honela beheko irudian agertzen dena lortuko delarik. Aztertzen ari garen kutxaren bolumena 2x2x3 = 12 denez edozein soluziok bi hutsune libre utziko ditu kutxan.



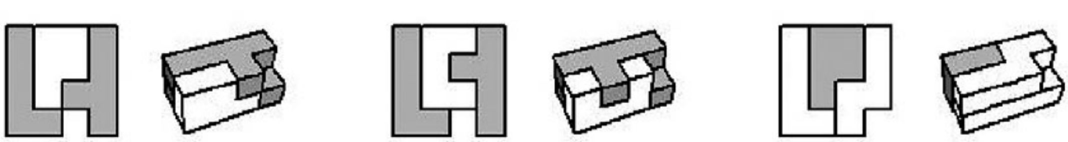
Se propone ahora la construcción de una caja de dimensiones 2x2x4 recortando la figura adjunta, doblando por las líneas discontinuas y pegando la lengüeta. Se plantea ahora la tarea de determinar los pentacubos que pueden entrar en dicha caja. Es fácil deducir que sólo cabrán las piezas correspondientes a los grupos 2 y 3.

Jarraian 2x2x4 dimentsioko kutxa eraikitzea proposatzen da, horretarako beheko irudia moztu, lerro etena tolestu eta mingaina pegatu behar da. Orain, kutxa honetan sartuko diren pentakuboak aztertzeari ekingo diogu. Sartuko diren piezak 2 eta 3 taldeei dagozkienak direla ikustea ia berehalakoa da.



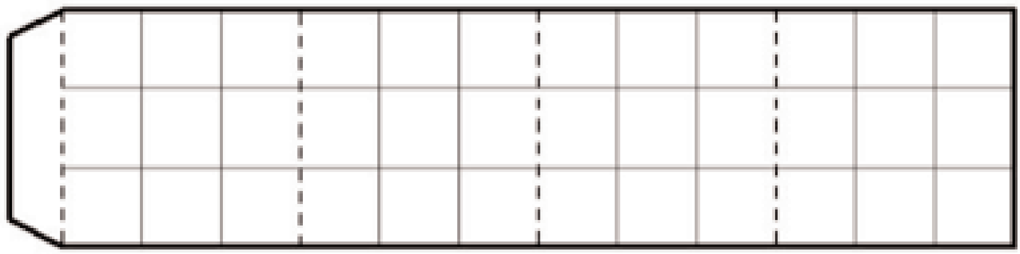
Con la información anterior, se plantea el problema de llenar dicha caja. Ahora bien, como el volumen de la caja es 2x2x4=16 y cada pieza tiene volumen igual a 5, harán falta tres pentacubos (siempre de los grupos citados) y quedará un hueco de una unidad. Se muestran en la figura adjunta algunas soluciones.

Aurreko informazioarekin, orain kutxa beteko dugu. Kutxaren bolumena 2x2x4 = 16 unitatekoa denez, eta pieza bakoitzak 5 unitateko bolumena duenez, hiru dira beharko ditugun pentakuboak (beti ere atzerago aipatutako taldeetakoak), eta hutsune bat geratuko da soberan. Ondoko irudian emaitza posible batzuk agertzen dira:



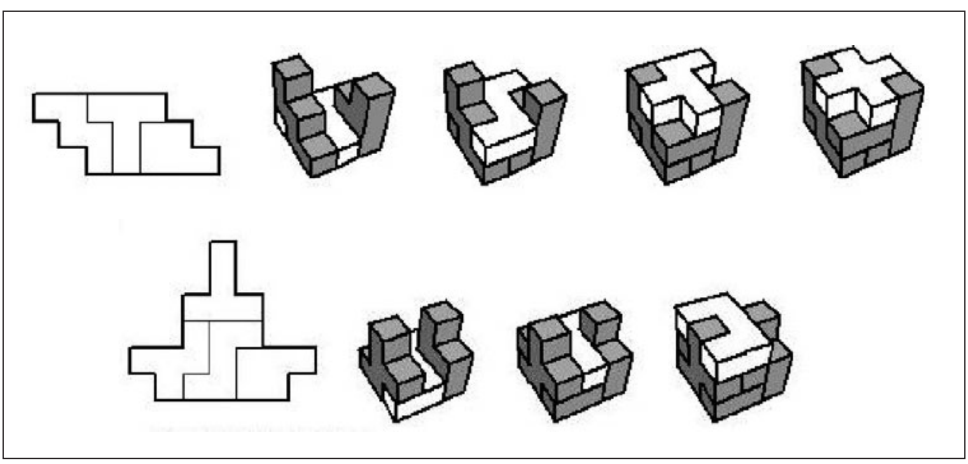
Una actividad similar puede realizarse con una caja de tamaño 3x3x3, que puede construirse con el modelo de la figura.

Jarduera antzekoa 3x3x3 tamainako kaxa batekin egin daiteke. Horretarako irudian agertzen den modeloa erabil daiteke:



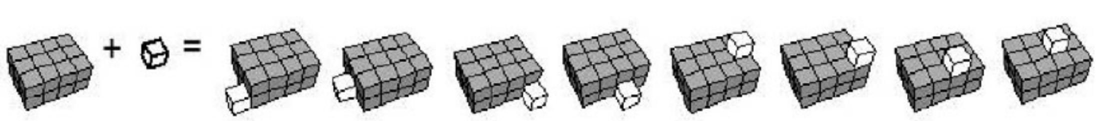
En primer lugar, debe determinarse qué piezas cabrán en dicha caja. La solución también es sencilla: sólo los pentacubos de los grupos 2 y 4 entran en dicha caja. A continuación, se buscará llenar la caja con el mayor número de pentacubos. Como la caja tiene volumen 3x3x3 = 27, se podrán utilizar cinco piezas y sobrarán dos huecos. Algunas soluciones vienen ilustradas en la figura siguiente. También pueden buscarse soluciones donde los huecos queden en lugares prefijados.

Lehenengo eta behin kutxa honetan zer pieza mota sartuko diren ikusi behar dugu. Kasu honetan ere 2 eta 4 taldeko pentakuboak bakarrik sar daitezke. Jarraian ahalik eta pentakubo gehien erabilita kutxa betetzen ahaleginduko gara. Gure kutxaren bolumena 3x3x3 = 27 denez, bost pieza erabil daitezke eta bi hutsune soberan geratuko dira. Emaitza posible batzuk beheko irudian datoz. Hutsuneak aurretik finkatutako leku batean geratzen diren soluzioak ere aurki daitezke.



Otras actividades similares pueden realizarse utilizando cajas con dimensiones diferentes a las aquí desarrolladas, incluso aquellas donde alguna pieza sobresalga de la caja. Por ejemplo, una caja de dimensiones 2x3x4 se ocupará con cinco pentacubos pero tendrá un saliente de una unidad en diferentes posiciones, como se muestra en la figura.

Jarduera honetan erabilitako dimentsiodun kutxak erabili beharrean, beste dimentsio batzuetako kutxekin antzeko jarduerak egin daitezke. Beste aukera bat piezaren bat kutxatik kanpo geratzen deneko da. Adibidez, 2x3x4 dimentsioko kutxa bost pentakuborekin bete daiteke, baina unitate bateko kubo irten bat izango du leku ezberdinetan koka daitekeena. Hona hemen irudi bat hau azaltzen duena:



Actividad 2.7 – Construcción de poliedros.

El problema que se plantea a continuación es la determinación de las posibles dimensiones de una caja que contenga a todos los pentacubos. Para ello es necesario saber las posibles factorizaciones del número 60 como producto de tres números y tratar de construir los paralelepípedos posibles con los 12 pentacubos.

Como 60 = 2x2x3x5, la primera factorización, 60 = 2x2x15, no puede construirse porque, como se ha indicado, no todas las piezas pueden encajarse en un cuadrado de tamaño 2x2.

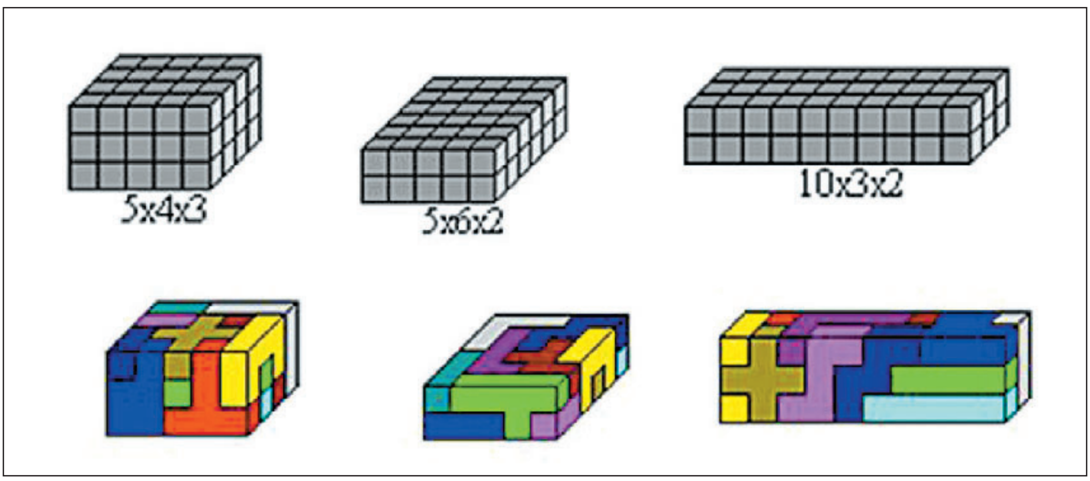
El resto de factorizaciones tiene solución en el conjunto de pentacubos, como muestra la figura siguiente.

2.7 jarduera – Poliedroen eraikuntza.

Ondorengo problema pentakubo denak barruan dituen kutxa baten dimentsioa kalkulatzea da. Horretarako 60 zenbakia hiru faktoretan faktorizatzeko era guztiak ezagutu behar dira, eta 12 pentakuboak erabiliz eraiki daitezkeen paralelepipedoak eraikitzen saiatu.

60 = 2x2x3x5 denez, 60 = 2x2x15 faktorizazioa ezin da egin, esan dugun bezala 2x2 itxurako karratuan ezin direlako pentakubo denak sartu.

Jarraian agertzen den irudian beste faktorizazio posible guztietarako emaitzak existitzen direla ikusten da:



Como información adicional, se sabe que hay 12 soluciones del paralelepípedo de dimensiones 2x3x10, 256 soluciones del de dimensiones 2x5x6 y 3940 soluciones del de 3x4x5. Pueden encontrarse todas las soluciones en la página web http://puzzler.sourceforge.net/docs/solid-pentominoes.html.

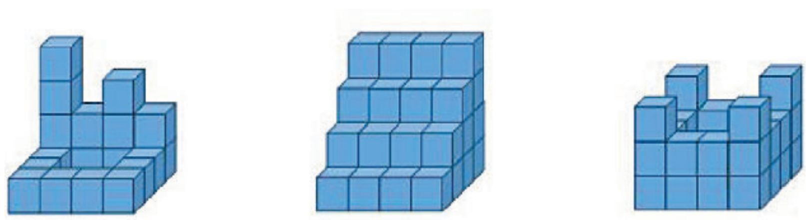
2x3x10 dimentsioko paralelepipedorako 12 emaitza posible existitzen direla dakigu, 2x5x6 itxurako paralelepipedoaren kasuan 256 dira emaitza posibleak eta 3x4x5 dimentsioko 3940 paralelepipedo daude. Emaitza guzti hauek http://puzzler.sourceforge.net/docs/solid-pentominoes.html web orrian aurki daitezke.

Actividad 2.8 – Contar los cubos.

Una actividad interesante si se ajusta bien a las diferentes edades de las personas que participen sería el juego de “contar los cubos”, que consiste en que se van mostrando bloques de cubos de diferentes formas y hay que decir cuántos cubos hay en el bloque. Puede realizarse como una actividad colectiva o de competición entre equipos. Algunos ejemplos se muestran en la imagen siguiente.

2.8 jarduera – Kuboak zenbatzea.

Jarduera benetan interesgarria “kuboak zenbatzea” litzateke, beti ere parte hartzen duten pertsonen adinera ongi egokitu ezkero. Jarduera honetan forma ezberdineko kubo-blokeak erakutsiko dira eta zenbat kubo dauden esan behar da. Taldekako jarduera bezala egin daiteke edo baita lehiaketa bezala ere. Ondoko irudian zenbait adibide agertzen dira:



3. Puzzles de construcción con policubos tridimensionales

3. Eraikuntza puzzleak polikubo tridimentsinalak erabiliz

Actividades similares a las de la sección anterior pueden plantearse con policubos de diferentes tamaños. Nos centraremos aquí en la construcción de cubos de dimensiones 3x3x3, utilizando 27 piezas de *LiveCube* unidas de diversas formas.

Muchos cubos de tamaño 3x3x3 pueden construirse con las piezas de *LiveCube*. Las actividades propuestas en esta sección consistirán en la construcción de algunos de los cubos más populares, con dificultad variable. Para ello, cada participante dispondrá de un conjunto de 27 piezas de *LiveCube*.

Para un estudio más exhaustivo de las posibilidades que ofrecen los policubos en la construcción de cubos puede consultarse la página web

http://www.asahi-net.or.jp/~rh5k-isn/Puzzle/CubePuzzles/3x3x3.html

Aurreko atalaren antzeko jarduerak tamaina ezberdineko polikuboekin ere plantea daitezke. Era ezberdinetan elkarturik dauden LiveCubeko 27 pieza erabiliz, 3x3x3 dimentsioko kuboen eraikuntza izango da aztergai atal honetan.

LiveCubeko piezekin 3x3x3 tamainako kubo asko eraiki daitezke. Atal honetan planteatutako jarduerak zailtasun ezberdineko kubo ezagunenak eraikitzen arituko gara. Horretarako parte hartzaile bakoitzak LiveCubeko 27 pieza izango ditu.

Kuboen eraikuntzan, polikuboek eskaintzen dituzten aukeren azterketa zehatzago baterako

http://www.asahi-net.or.jp/~rh5k-isn/Puzzle/CubePuzzles/3x3x3.html web orria oso erabilgarria da.

Actividad 3.1 – Cubo Soma.

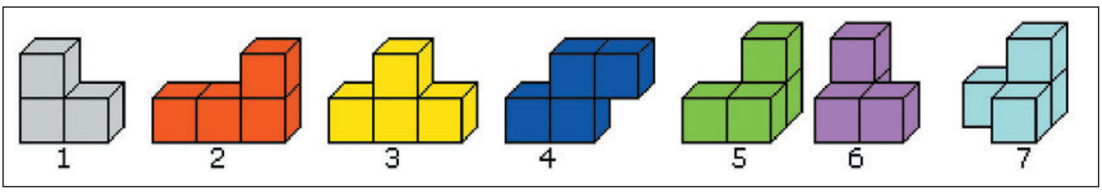
El más conocido puzzle de construcción de un cubo es llamado cubo Soma, inventado por *Piet Hein* alrededor de 1936 durante una conferencia del físico *Heisenberg*. El nombre fue sugerido por el término soma aplicado a la droga perfecta por *Aldous Huxley* en su novela "Un mundo feliz".

Hein comprobó que todos los policubos irregulares formados por cuatro o menos cubos sumaban un total de 27 cubos, y podían unirse en un cubo mayor con tres cubos de arista. Posteriormente, el matemático *John Conway* comprobó que había 240 formas distintas de construir el cubo de 3x3x3 con dichas piezas.

3.1 jarduera – Soma kuboa.

Kubo bat eraikitzeko puzzle ezagunena, 1936ean *Piet Heinek Heisenberg* fisikariaren hitzaldi batean sortutako, Soma kuboa da. Izena *Aldous Huxley* idazleak "Un mundo feliz" liburuan droga perfekturako erabiltzen zuen terminotik dator.

Hein lau kuboz edo gutxiagoz osatutako polikubo irregular guztiak, ertzak hiru kuboren luzera zuen kubo handiago batean, elkar zitezkeela konturatu zen. Geroago, John Conway matematikaria pieza horiek erabiliz 3x3x3 tamainako kuboa eraikitzeko 240 era ezberdin zeudela konturatu zen.

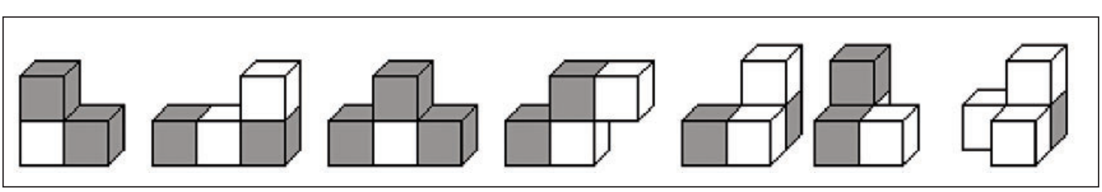


Una actividad interesante para el aula, en relación a la resolución del Cubo Soma (pero también de los diferentes puzzles geométricos de esta guía), sería que los estudiantes, o personas interesadas en este puzzle, diseñaran diferentes notaciones para expresar o describir las soluciones, discutiendo entre ellos las diferentes posibilidades. De esta forma podrían realizar un listado de las distintas soluciones que van obteniendo. Como sugerencia, se pueden numerar las piezas y dar las soluciones por capas (correspondientes a las diferentes alturas del cubo), indicando el número de la pieza que va en cada posición.

Para hacer más interesante el problema, se pueden construir las piezas usando dos colores, como se muestra en la siguiente figura. Se plantea ahora el problema de construir un cubo 3x3x3 donde los colores queden alternados.

Soma kuboarekin, zein gida honetan agertzen den beste edozein puzzle geometrikorekin zerikusia duen jarduera interesgarria emaitzak idazteko eta adierazteko notazio ezberdinak sortzea litzateke. Honela ikasleek lortzen dituzten emaitza ezberdinen zerrenda bat sor dezakete. Iradokizun bezala, piezak zenbakitu daitezke eta emaitzak kapa (kuboaren altuera ezberdinei dagokiena) bakoitzeko eman, leku bakoitzean doan piezaren zenbakia adieraziz.

Problema oraindik interesgarriagoa egiteko, ondoko irudian agertzen den bezala, piezak bi kolore erabilita eraiki daitezke. Orain, pieza hauekin, koloreak tartekatuak dituen 3x3x3 dimentsioko kuboa eraikitzea proposatzen da.

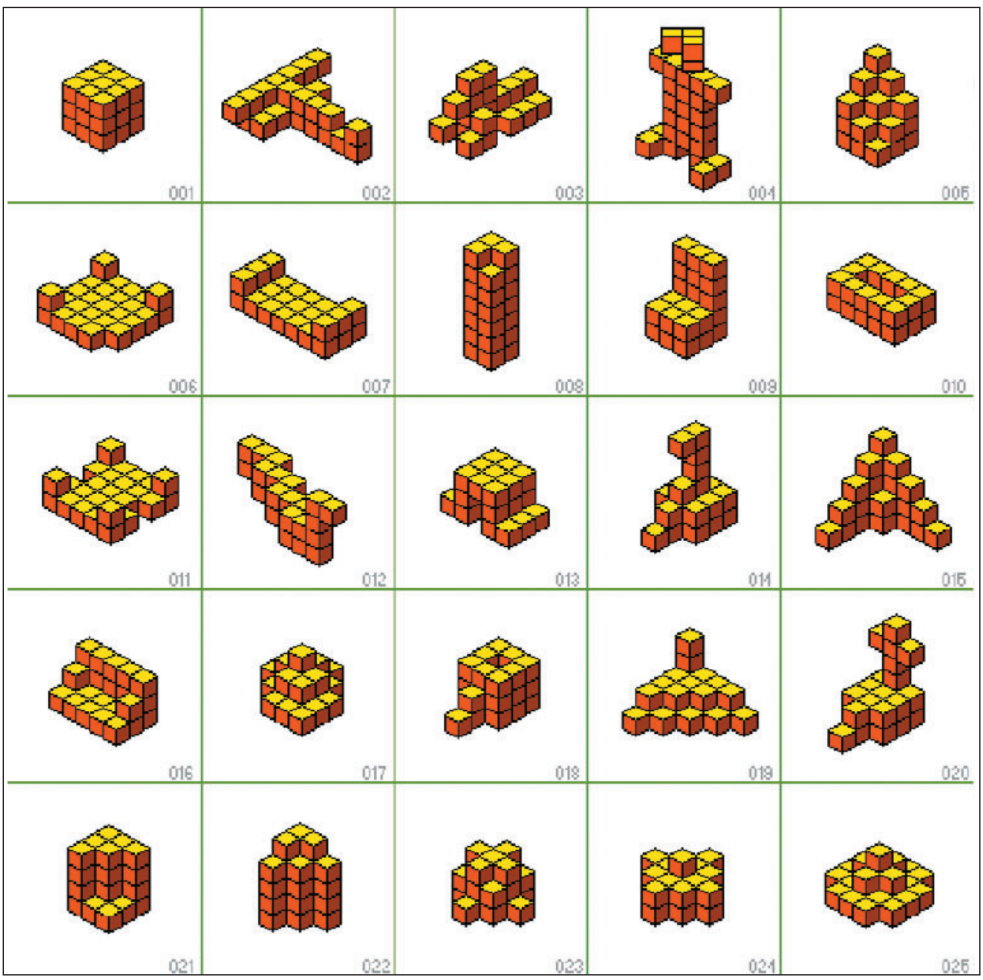


El hecho de tener 240 soluciones posibles lo convierte en uno de los más sencillos. Pero

240 emaitza posible izateak, mota honetako kubo errazena bihurtzen du. Baina, 3x3x3

además del cubo 3x3x3, se han popularizado muchas otras construcciones posibles con las piezas de este puzzle. En la página http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM se encuentra una de las mayores colecciones disponibles. Algunas de estas figuras se muestran a continuación. En cualquier caso, una actividad creativa muy interesante consiste en tratar de diseñar construcciones que imiten a animales u objetos.

dimentsioko kuboaz aparte, puzzle honen piezekin beste eraikuntza ospetsu ugari ere badaude. http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM web orrian ezagutzen den bilduma handiena aurki daiteke. Zenbait figura jarraian agertzen dira. Puzzle pieza hauekin lan egiteko jarduera oso interesgarria animalien edo objektuen itxura duten figurak diseinatzean datza.



Al ser el más popular de los puzzles de construcción de cubos, se ha utilizado también en psicología, en educación física, en diseño, etc. También es útil para introducir conceptos de geometría del espacio, especialmente en temas de orientación espacial. Al igual que otros juegos, la utilización inteligente del cubo Soma permite relacionar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación y consolidación de ideas abstractas.

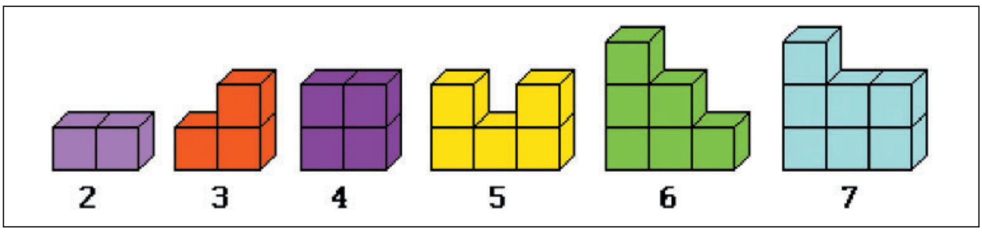
Eraikuntza-puzzle benetan ezaguna da; hau dela eta psikologian, heziketa fisikoan,diseinuan, eta beste arlo askotan erabili izan dira pieza hauek. Oso erabilgarriak dira ere, geometria espazialeko kontzeptuak azaltzeko, gehienbat orientazio espazialaren inguruko gaietan. Beste joko asko bezala, Soma kuboaren erabilera argiak eta joko bidezko materialen manipulazio zehatzak heziketa eta ideia abstraktuen finkatzea bideratzen du.

Actividad 3.2 – Cubo diabólico.

Uno de los modelos más antiguos aparece en el libro “Puzzles Old and New” del profesor *Hoffmann* (Angelo Lewis), publicado en 1893. Recibe el nombre de cubo diabólico a pesar de tratarse de uno de los más fáciles de resolver pues tiene 13 soluciones diferentes. Está formado por las seis piezas de la figura adjunta y tiene la particularidad de que todas las piezas son planas y están formadas por un número creciente de cubos individuales: 2+3+4+5+6+7 = 27.

3.2 jarduera – Deabruaren kuboa.

Ezagutzen den kubo modelo zaharrenetakoa *Hoffmann* (Angelo Lewis) irakaslearen “Puzzles Old and New” (1893) liburuan agertzen da. Deabruaren kuboa bezala ezagutzen den arren ebazteko errazenetakoa da 13 baitira existitzen diren emaitza posibleak. Beheko sei piezekin osatua dago; pieza denak lauak izatearen eta kubo kopuru ezberdinez, 2+3+4+5+6+7 = 27, osatuak izatearen berezitasunak dituzte..

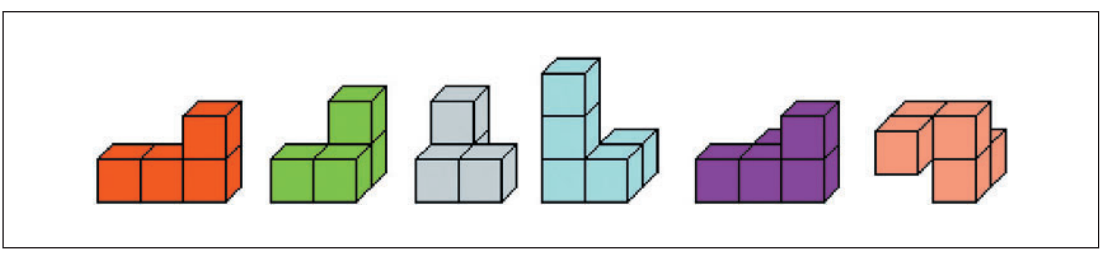


Actividad 3.3 – Cubo Mikusinski.

No tan conocido como el cubo Soma es el llamado cubo de Mikusinski, debido a que su creador fue el matemático polaco J.G. Mikusinski. Fue dado a conocer por Hugo Steinhaus en el libro “Mathematical Snapshots”. Las piezas son las que se indican en la figura adjunta (27 = 4+4+4+5+5+5) y sólo tiene dos soluciones.

3.3 jarduera – Mikusinski Kuboa.

Soma kuboa bezain ezaguna ez izan arren Mikusinski kuboa ere existitzen da, kubo honen sorrera J. G. Mikusinski matematikari poloniarrari egokitzen zaio eta Hugo Steinhausek “Mathematical Snapshots” liburuan jakitera eman zuen. Piezak beheko irudian agertzen direnak dira (27 = 4+4+4+5+5+5), eta bi emaitza posible bakarrik ditu.

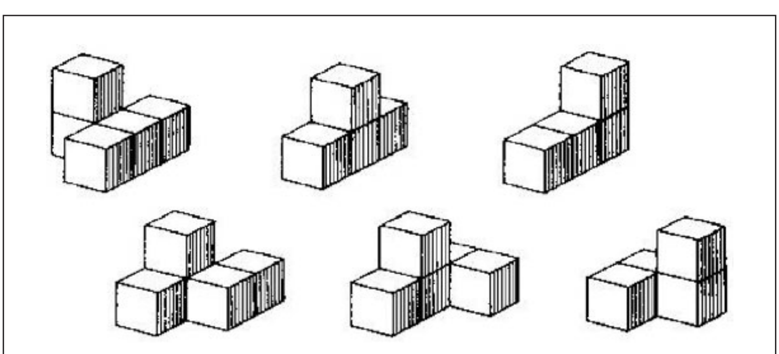


Actividad 3.4 – Cubo de la media hora.

Uno de los más difíciles cubos 3x3x3 tiene solución única y se construye con las seis piezas que se muestran a continuación.

3.4 jarduera – Ordu erdiko kuboa.

3x3x3 tamainako kubo honek (dagoen zailenetakoa) emaitza bakarra dauka eta jarraian azaltzen diren sei piezekin eraikitzen da:

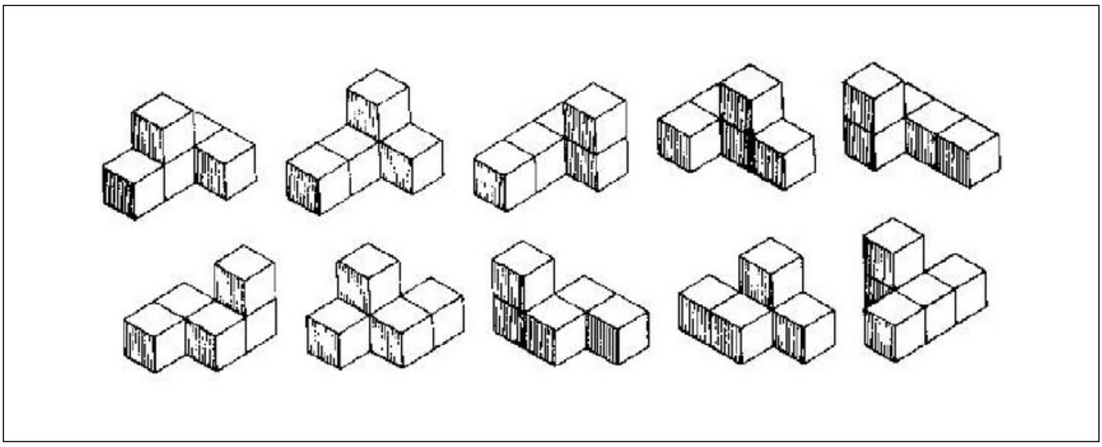


Actividad 3.5 – Pentacubo ajedrezado.

Es sabido que hay 12 pentacubos planos y 17 que no lo son. Se puede observar también que hay 12 que tienen un eje de simetría y 17 que no lo tienen. Incluso, hay 12 que ni son planos ni tienen un eje de simetría. Si se eliminan arbitrariamente los dos de ellos que entran en una caja de tamaño 2x2x2, quedan las 10 piezas de la imagen.

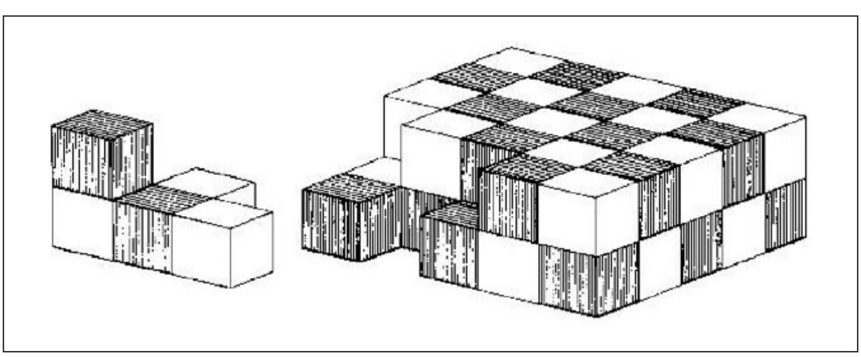
3.5 jarduera – Pentakubo ajedreztatua.

Lehenago aipatu dugu 12 direla pentakubo lauak eta 17 lauak ez direnak. Bestalde, 12 dira simetria ardatzak dituztenak eta 17k berriz ez dituztenak. Eta badaude gainera 12 ez direnak lauak eta simetria ardatzik ez dituztenak ere. 2x2x2 tamainako kutxa batean sartzen direnak alde batera uzten baditugu, irudian agertzen diren 10 piezak izango ditugu:



Con estas piezas se puede hacer una caja de tamaño 5x5x2 de 19264 formas diferentes, de modo que no es difícil encontrar una de ellas. Se puede hacer más interesante si se alternan los colores en cada pieza formando un ajedrezado (como en la figura siguiente). Esto se puede hacer de dos maneras: de forma aleatoria, se construyen las piezas y se intenta formar la caja. Hay 512 maneras diferentes de construir las piezas de forma ajedrezada de las cuales 510 tienen múltiples soluciones, una tiene solución única y una no tiene solución. La otra posibilidad es armar el puzzle con un solo color y después realizar el ajedrezado de cada pieza.

Pieza hauekin 5x5x2 tamainako kutxa bat eraiki daiteke 19264 modu ezberdinetan, beraz, hauetako bat aurkitzea ez da oso zaila izan behar. Pieza bakoitzaren koloreak tartekatzen baditugu (irudian bezala) askoz ere interesgarriagoa bilakatzen da problema. Bi eratara egin daiteke hau. Lehenengorako piezak ausazko eran eraiki eta kutxa eraikitzen ahaleginduz. 512 modu ezberdinetan koka daitezke piezak; hauetatik 510ek soluzio anitz dituzte, batek bide bakarra du eta beste batek ez du soluziorik. Bigarren aukera kolore bakarreko puzzlea eraikitzea litzateke eta behin puzzlea daukagula pieza bakoitzaren koloreztatzea egitea. Bigarren bide hau oso erreza da.

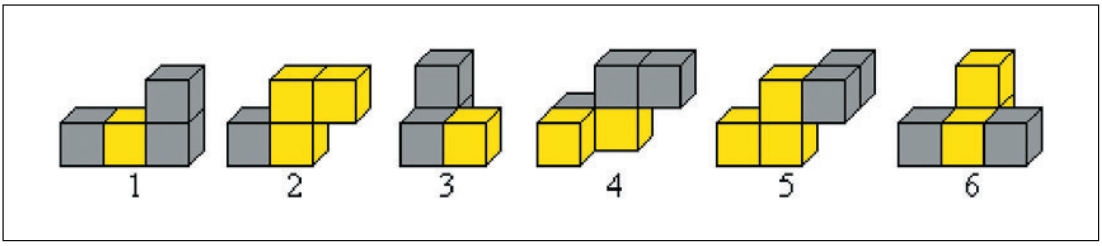


Actividad 3.6 – Cubo con bucle.

Utilizando piezas de *LiveCube* con dos colores, se pueden construir los siguientes policubos

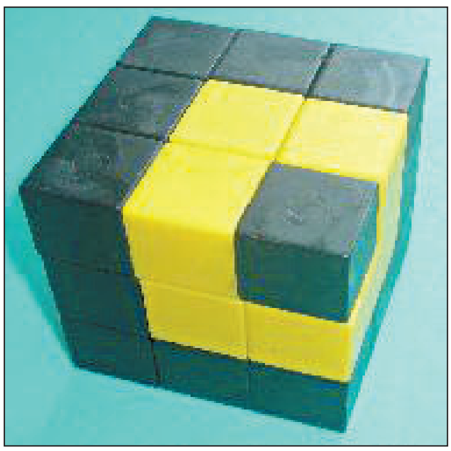
3.6 jarduera – Bukledun kuboa.

LiveCubeko bi koloredun piezak erabiliz, ondoko polikuboak eraiki daitezke:



y formar un cubo 3x3x3 con los colores dispuestos como se indica en la imagen.

eta 3x3x3 tamainako kubo bat sortu non koloreak irudian agertzen diren bezala agertzen diren:



4. Demostraciones visuales.
4. Frogapen ikusgarriak.

Los cubos del *LiveCube* se pueden utilizar también para mostrar a los estudiantes demostraciones visuales de algunas sencillas ecuaciones aritméticas, es decir, figuras o diagramas que ayudan a entender porqué una determinada ecuación o verdad matemática es verdadera.

LiveCubeko kuboak ikasleei ekuazio aritmetiko errazen frogapen ikusgarriak erakusteko baliogarriak dira ere. Frogapen ikusgarri hitzarekin ekuazio aritmetiko bat edo egia matematiko bat ulertzeko erabilgarria den diagrama edo figurak esan nahi dugu, hau da, irudien bitartez ikus daitezkeen frogapenak.

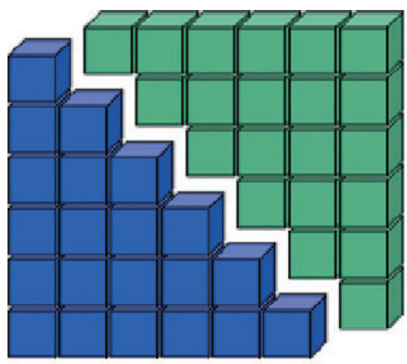
Actividad 4.1 – Sumas de números naturales consecutivos.

El objetivo es construir, por etapas, una figura con los cubos que se convierta en una demostración visual de la fórmula para la suma de los n primeros números naturales,

4.1 jarduera – Ondoz ondoko zenbaki arrunten batura.

Kasu honetan helburua lehen n zenbaki arrunten baturaren formula

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$



y que se familiaricen con la misma. Esta actividad se puede completar con la historia de cómo demostró la fórmula cuando era un niño, el matemático *Karl F. Gauss*. Esta demostración ya era conocida por los griegos.

Se necesitarán 30 ó 42 piezas del LiveCube, a ser posible la mitad de cada color. La demostración hay que ir construyéndola por etapas, desde n=2 (n=1 es trivial) hasta n=5 (ó n=6, dependiendo del número de piezas). Como se observa en la imagen, primero se construyen dos zonas “triangulares”, una de cada color, uniendo 1 cubo, más 2 cubos, más 3 cubos, así hasta n cubos (6 en el caso de la imagen), es decir, el número de cubos de cada zona triangular es 1+2+3+…+n. A continuación, se juntan ambas zonas formando un rectángulo de n y n+1 cubos en cada lado, es decir, con n(n+1) cubos en total. Así se obtiene fácilmente la fórmula descrita.

frogatuko duen irudia pausuz pausu eraikitzea da. Jarduera hau Karl F. Gauss matematikariak, ume zenean problema hau ebazteko egin zuen bidearen istorioa kontatuz osa daiteke. Grekoek garaian frogapen hau ezaguna zen.

LiveCubeko 30 edo 42 pieza behar dira, ahal den heinean kopuruaren erdia kolore batekoa. Frogapena zatika egin behar da, n=2tik (n=1erako berehalakoa da) n=5arte (edo pieza kopuruaren arabera n=6rarte). Irudian ikus daitekeen bezala, lehenengo eta behin “triangelu” itxurako bi gune eraikitzen dira, kubo 1, 2 kubo, 3 kubo,… n kubo elkartuz (6 irudiaren kasurako); hau da, triangelu itxurako gune bakoitzeko kubo kopurua 1+2+3+…n da. Jarraian bi guneak elkartzen dira n eta n+1 aldeko laukizuzena lortzen da, hau da, n(n+1) kuboz osatutako laukizuzena. Honela goian agertzen den formularen bigarren atala lortzen da.

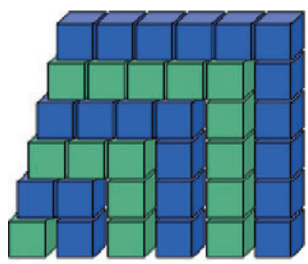
Actividad 4.2 – Sumas de números impares consecutivos.

Para esta actividad se necesitan 25 (10+15), ó 36 (21+15), cubos de *LiveCube*, de dos colores a ser posible. Al igual que en la actividad anterior se irá construyendo la figura (véase la imagen) que nos muestra esta demostración visual para todas las etapas, desde n=1 hasta n=5 (ó n=6, dependiendo del número de cubos), de la fórmula para la suma de números impares consecutivos:

4.2 jarduera – Ondoz ondoko zenbaki bakoitien batura.

Jarduera honetarako 25 (10+15) edo 36 (21+15) LiveCubeko kubo behar dira, ahal izan ezkero bi koloretakoak. Aurreko jardueran bezala n=1 pausutik n=5 pausura (edo n=6ra, kubo kopuruaren arabera) figura eraikitzen (irudian ikusi) joango gara, ondoz ondoko zenbaki bakoitien baturaren formula lortzeko:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$



Según *Roger G. Nelsen*, esta demostración se debe a *Nicómaco de Gerasa* (hacia el año 100), autor del famoso libro "Introducción a la Aritmética".

Roger G. Nelsen arabera, frogapen hau *Gerasako Nikomakorena* da (K.O. 100 urte ingurukoa), Nikomako "Aritmetikarako sarrera" liburu famatuaren idazlea da ere.

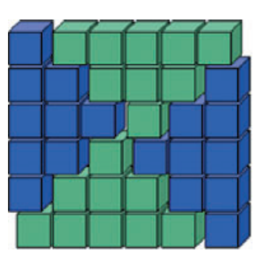
Actividad 4.3 – Sumas de números impares consecutivos II.

La fórmula anterior de la suma de los números impares consecutivos, se puede demostrar visualmente de otra manera. Para entender la nueva prueba hay que construir el esquema que aparece en la imagen (con 36 cubitos, la mitad de cada color). Es fácil ahora deducir la fórmula

4.3 jarduera – Ondoz ondoko zenbaki bakoitien batura II.

Ondoz ondoko zenbaki bakoitien baturaren aurreko formula, modu ikusgarriago batean froga daiteke. Froga berri hau aurrera eramateko irudian agertzen den irudia eraiki behar da (36 kuborekin, erdia kolore bakoitzean). Behin figura daukagula formula lortzea ia berehalakoa da:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$



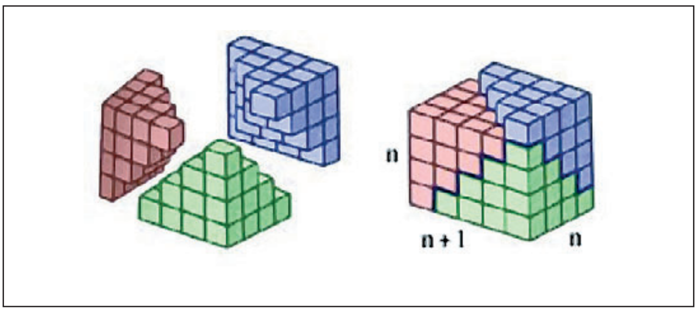
Actividad 4.4 – Suma de números cuadrados consecutivos.

En las actividades anteriores se realizan figuras planas, pero también podemos desarrollar demostraciones visuales con figuras tridimensionales para demostrar fórmulas aritméticas, como por ejemplo la ecuación de la suma de los cuadrados de números naturales consecutivos:

4.4 jarduera – Ondoz ondoko zenbaki arrunten karratuen batura.

Aurreko jardueretan figura lauak eraiki ditugu, baina figura tridimentsionalak erabil ditzakegu frogapen ikusgarrien bitartez formula aritmetikoak frogatzeko. Adibide bezala ondoz ondoko zenbaki arrunten karratuen baturaren formula aztertuko dugu:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$



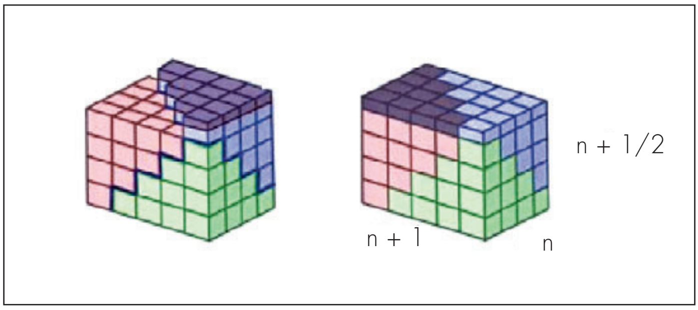
La demostración sin palabras más clásica de esta igualdad, que se encuentra en el libro de Nelsen, consiste en la realización de tres figuras de tipo piramidal iguales como las que se muestran en la imagen, con un cubo arriba, seguido de 4 cubos en la siguiente fila, 9 cubos en la tercera, así hasta n^2 cubos en la última (n=3, si disponemos de 27 cubos, ó n=4 si disponemos de 64 cubos, que sería lo adecuado, y además sería mejor que fueran un tercio de cada color). Así cada una de las tres figuras piramidales posee $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ cubos. Entonces con las tres figuras se intenta formar una "caja", tal que la base es un rectángulo con n y n+1 cubos en la base y altura n, lo que hace un total de n^2 (n + 1) cubos. Pero ojo, se nos había olvidado contar los que quedan sueltos arriba, que son precisamente 1+2+3+…+n. Por lo tanto, utilizando la fórmula de la Actividad 4.1, se concluye nuestra fórmula:

Berdintza honen hitzik gabeko frogapen klasikoena, Nelsenen liburuan datorrena da. Irudian agertzen diren piramide itxurako figurak eraikitzean datza. Lehenengo lerroan edo goian kubo bat, ondorengo lerroan 4 kubo, 9 kubo ondorengoan, eta horrela n^2 kubo izan arte azken lerroan (n=3, 27 kubo baldin baditugu edo n=4, 64 kubo baditugu, gainera gomendagarria da kubo kopuru totalaren herena kolore batekoa izatea). Honela figura piramidal bakoitzak $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ kubo ditu. Orduan hiru figura hauekin "kutxa" bat eraikitzen ahaleginduko gara, non oinarria n(n+1) itxurako laukizuzena delarik eta altuera n delarik; guztira n^2 (n+1) kubo ditugu. Baina kontuz, goian solte geratzen direnak kontatzea ahaztu zaigu, gure kasuan 1+2+3+…+n direlarik. Beraz, 4.1 jarduerako formula erabilita ondoko formula lortzen dugu:

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

En el libro de *R. B. Nelsen* se ofrece una alternativa más visual a la última parte, que es la de la siguiente imagen.

R. B. Nelsen-en liburuan azken atal hau baino ikusgarriagoa den ondoko irudia aurki dezakegu.

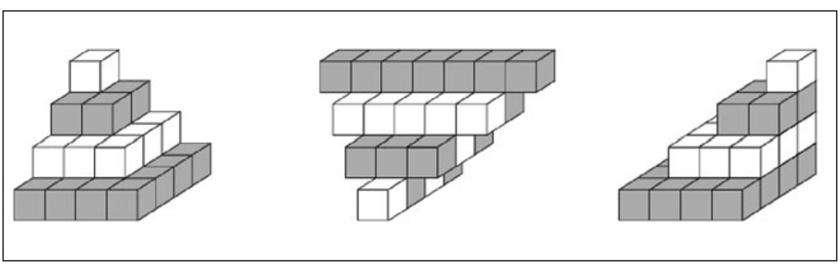


Actividad 4.5 – Suma de números cuadrados consecutivos II.

4.5 jarduera – Ondoz ondoko zenbaki karratuen batura II.

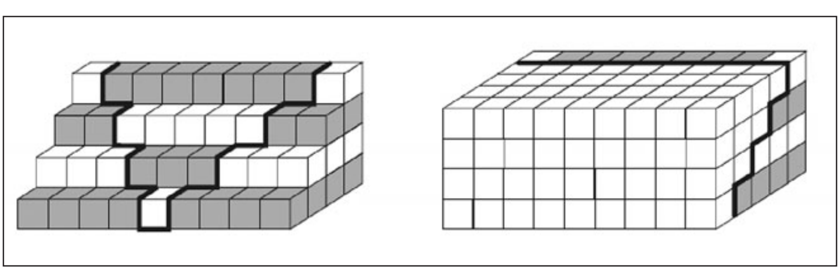
Existe una nueva demostración visual de la anterior igualdad publicada en la revista Student en 1999 por *N. Wermuth* y *H.J. Schuh*. Se trata de una demostración muy interesante y atractiva, aunque se necesitan muchos cubos (84 cubos para el caso n=3). Se empieza creando tres figuras distintas con $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ cubos:

Student aldizkarian 1999an N. Wermuthek eta H. J. Schuhek argitaratutako artikulu batean aurreko berdintzaren frogapen ikusgarri berri bat daukagu. Frogapen oso interesgarria eta erakargarria da, baina kubo asko behar dira (84 kubo n=3 kasurako). $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ kubo dituen hiru figura ezberdin eraikiz hasten da:



A continuación se juntan las tres piezas, como se indica en la imagen, y luego se vuelve a realizar de nuevo la misma construcción, para acabar juntando las dos partes (que por tanto tendrán 6 ($1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ cubos) y creando una caja con lados de n, n+1 y (2n+1) cubos.

Jarraian irudian azaltzen den bezela, hiru piezak elkartzen dira, eta eraikuntza bera egiten da berriz ere. Amaitzeko bi zatiak elkartuko ditugu (ondorioz, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ kubo ditugu) alde bakoitzean n, n+1 eta (2n+1) kubo dituen kutxa bat sortuz.



5. Actividades de creatividad.
5. Sormena lantzeko jarduerak.

Hasta ahora hemos elaborado puzzles de construcción de figuras geométricas pero las piezas del *LiveCube* también son apropiadas para fomentar la creatividad. Se proponen en esta actividad la elaboración de algunas piezas figurativas y se anima a idear otras figuras originales con los cubos proporcionados.

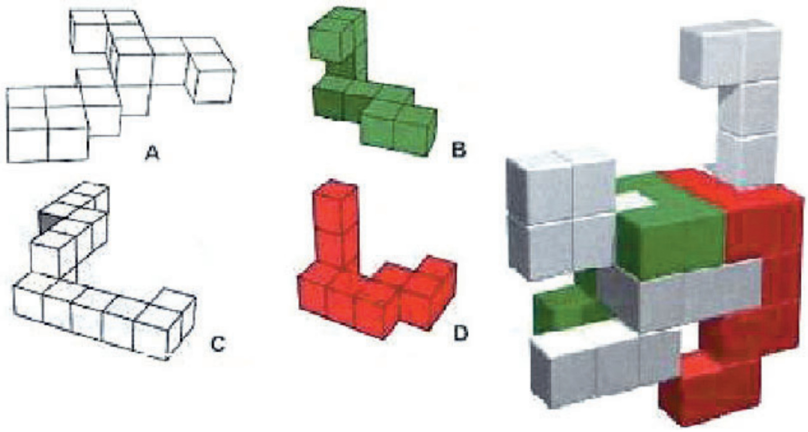
En todos los casos se muestran las piezas que deben construirse para formar la correspondiente imagen. Constituye un ejercicio de habilidad unir adecuadamente las piezas para conseguir la figura del animal.

Orain arte figura geometrikodun eraikuntza puzzleak egin ditugu, baina LiveCubeko piezak sormena bultzatzeko egokiak dira ere. Jarduera honetan pieza figuratiboak eraikitzea proposatzen da eta emandako piezekin beste figura original gehiago sortzera animatzen da.

Kasu guztietan lortu nahi den figura lortzeko eraiki behar diren piezak erakusten dira. Animali itxurako figurak lortzeko piezak behar bezala elkartzea trebetasun ariketa interesgarria da.

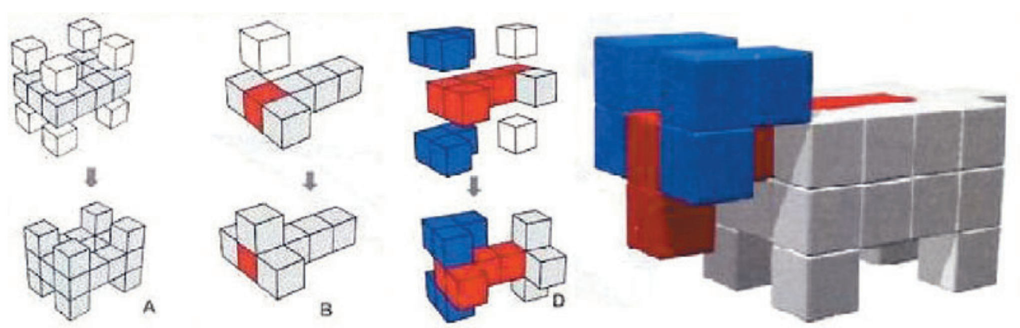
5.1 – Mono.

5.1 – Tximua.



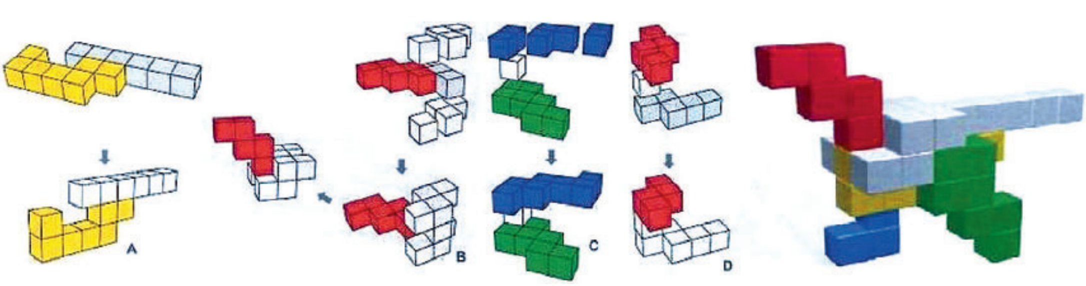
5.2 – Carnero.

5.2 – Aharia.

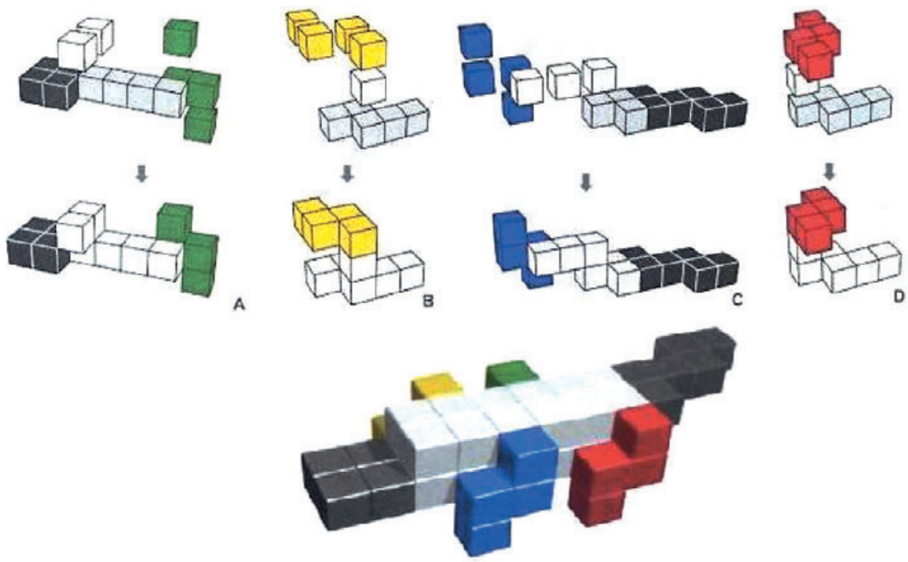


5.3 – Velociraptor.

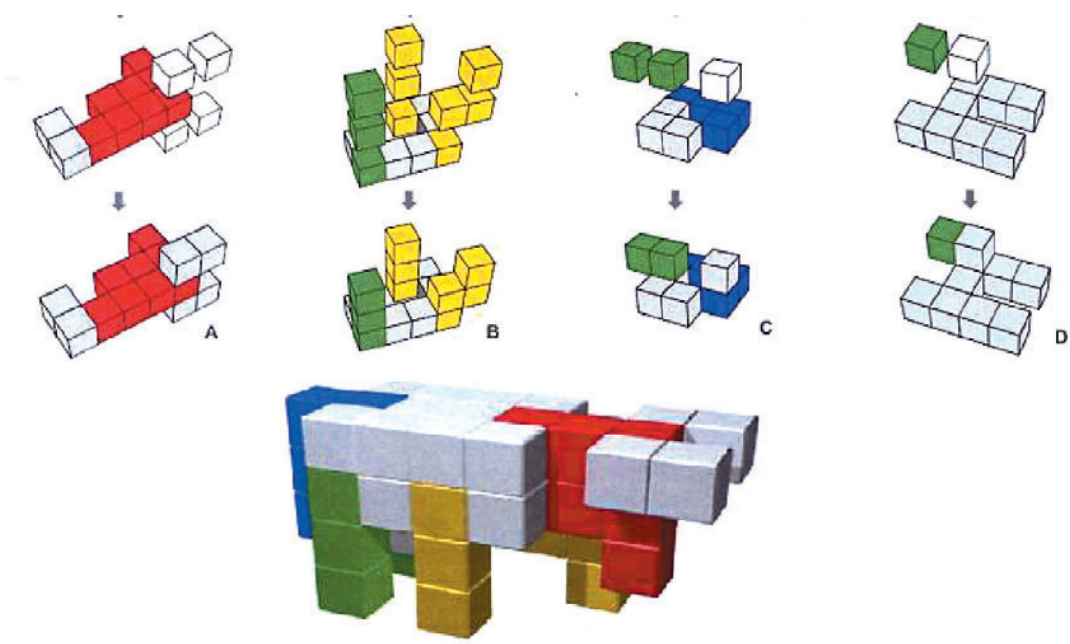
5.3 – Beloziraptorea.



5.4 – Caimán. 5.4 – Kaimana.

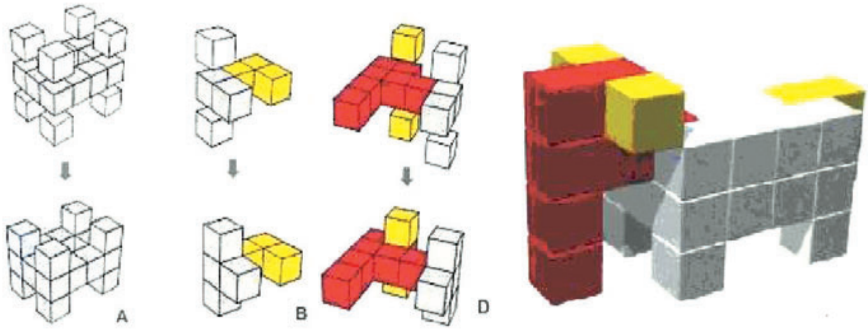


5.5 – Toro. 5.1 – Zezena.



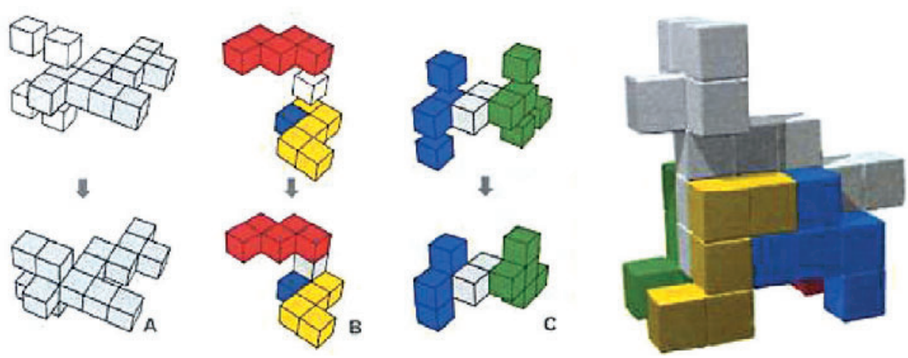
5.6 – Elefante.

5.5 – Elefantea.



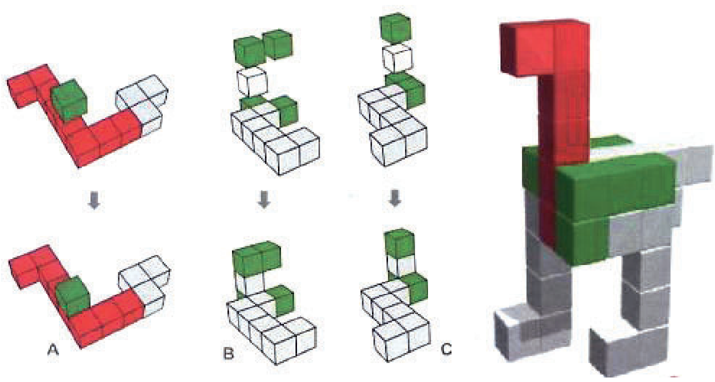
5.7 – Perro.

5.7 – Txakurra.



5.8 – Avestruz.

5.8 – Ostruka.



Estos modelos constituyen una pequeña muestra de las posibilidades que ofrecen las piezas de *LiveCube*. Con imaginación y paciencia se pueden crear figuras originales como el árbol de Navidad de la siguiente figura.

Modelo hauek LiveCubeko piezekin egin daitezkeen aukera posible batzuk dira. Pazientzia eta irudimenarekin ondoko eguberri-zuhaitza bezalako figura originalak lor daitezke.

Referencias. Erreferentziak.

• Stewart Coffin, The puzzling world of polyhedral dissections (1985).
Gran recopilación de puzzles de todo tipo. Accesible online desde la página http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/

• Jürgen Köller, Soma Cubes. Completa información sobre el cubo Soma y sus variantes.
En http://www.mathematische-basteleien.de/somacube.htm.

• Equipo de LiveCube, Developing Mental Reasoning Through 3-D Pentomino Concepts.
Guía de actividades con las piezas del LiveCube.

• Roger B. Nelsen, Demostraciones sin palabras. Proyecto Sur, 2001.

• Rob Stegmann, Puzzle Page. Contiene modelos realizados con piezas de LiveCube.
En http://home.comcast.net/~stegmann/homemade.htm

• Nanny Wermuth, Hans-Jürgen Schuh, Proof without words: Sum of Squared Integers.
Student 3 (1), 41-43, 1999.