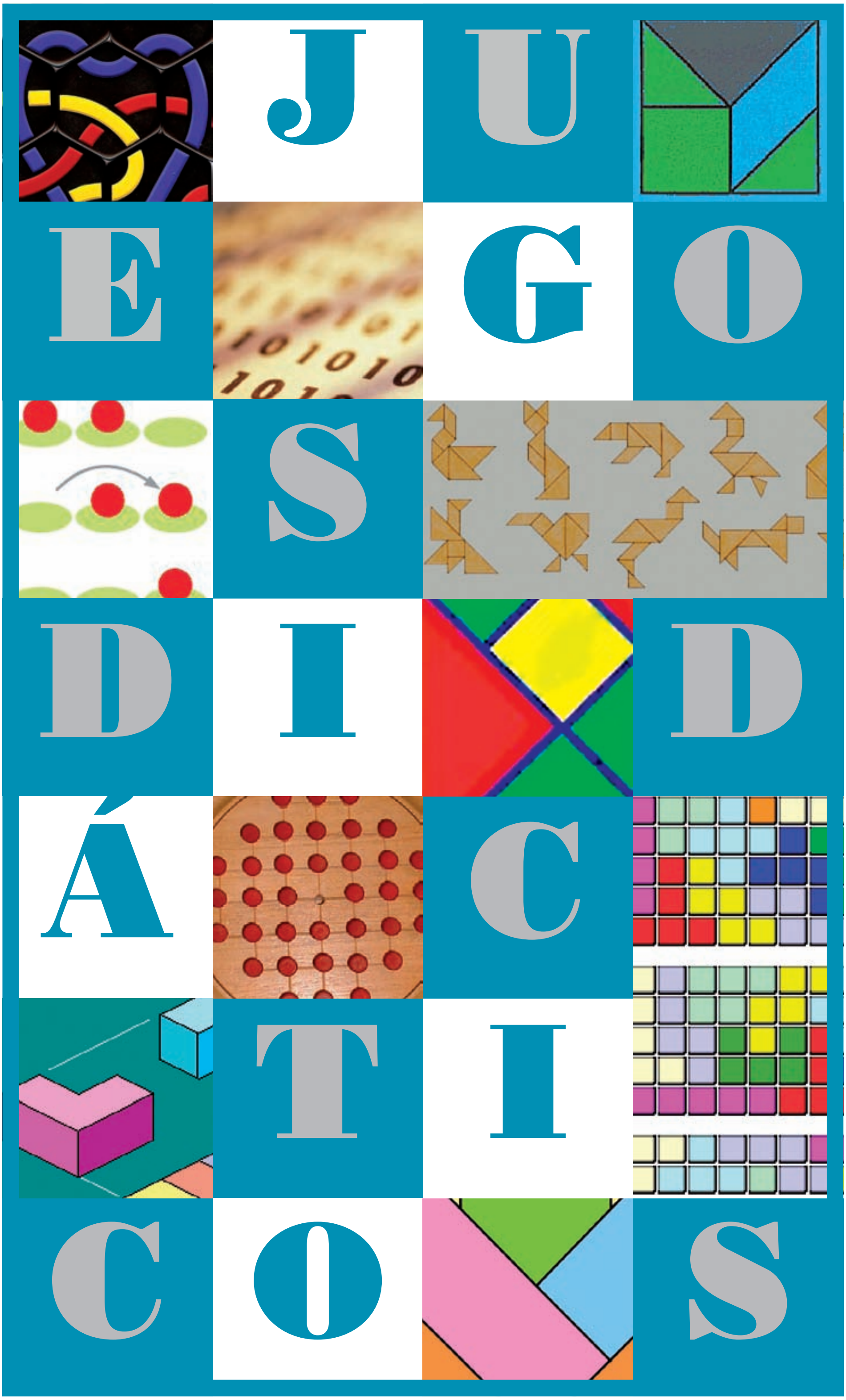


para el programa **BBK-**MATIKA

LAS MATEMÁTICAS EN LAS BIBLIOTECAS ESCOLARES

PROGRAMA **BBK**-MATIKA: Pedro Alegría ■ Santiago Fernández ■ Raúl Ibáñez ■ Goyo Lekuona

INDICE

Edita
Fundación **Bilbao Bizkaia Kutxa** Fundazioa

Textos
Pedro Alegría / Santiago Fernández / Raúl Ibáñez / Goyo Lekuona

Maquetación e imprenta
Ikeder, S.L.

Real Sociedad
Matemática Española

Introducción

En relación con el juego y la matemática, el ilustre profesor D. Miguel de Guzmán solía decir:

> *«Al igual que las matemáticas, un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita. Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros. Estos son los ejercicios elementales de un juego o de una teoría matemática».*

La matemática y los juegos han entreverado sus caminos muy frecuentemente a lo largo de los siglos. De la importancia de los juegos para despertar el interés de los estudiantes se ha expresado muy certeramente el gran divulgador Martin Gardner:

> *«Con seguridad el mejor camino para despertar a un estudiante consiste en ofrecerle un intrigante juego, puzzle, truco de magia, chiste, paradoja, pareado de naturaleza matemática o cualquiera de entre una veintena de cosas que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas».*

Jugar es descubrir cosas, explorar, investigar,… y, en definitiva, aprender. Decía al respecto el gran matemático Leibniz que el juego va más allá de ser una simple diversión; sabemos que muchas de las teorías científicas empezaron como un juego.

El juego es una herramienta muy interesante, e incluso fundamental, tanto dentro de las actividades de una biblioteca escolar, como dentro del desarrollo normal de cualquier aula. Los juegos son actividades divertidas que hacen que los estudiantes disfruten plenamente de su desarrollo, aparentemente alejado de toda materia escolar. Sin embargo, los juegos de ingenio y estrategia nos permiten trabajar el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes y hacen que éstos, sin ser conscientes de ello, se familiaricen e incluso se interesen por cuestiones matemáticas de forma natural, además de su utilidad didáctica en relación con muchos de los temas que se están enseñando en el aula.

Por todo ello, los juegos son una parte fundamental del programa "BBK-matika, Las matemáticas en las bibliotecas escolares" (dentro del programa general de actividades extraescolares, Programa ACEX, del Gobierno Vasco y la BBK). Durante el primer año de desarrollo de este programa se ha proporcionado un paquete de juegos a las bibliotecas de los centros que han participado en el mismo, que consiste en los siguientes juegos: el **Cubo Soma**, el **Katamino** (el **Juego de los Pentominós**), el **Solitario en cruz**, el **Tangram** y el **Tantrix Discovery**. Nuestro objetivo en esta publicación es proporcionar fichas didácticas de estos juegos, y de otros cinco juegos (el **Juego del Nim**, los **Puentes de Königsberg**, el **Puzzle del Quince**, las **Torres de Hanoi** y el **Tres en Raya**) que puedan ayudar al personal de las bibliotecas escolares y a los docentes en su labor diaria. Cada una de las fichas incluye una descripción del juego, su historia, algunas variantes, su resolución, una propuesta de actividades didácticas y dónde encontrar algo más de información. Las fichas didácticas deben ser vistas no como un material rígido al que hay que seguir al pie de la letra, sino como unas sugerencias lúdicas y didácticas, que a través de la visión del personal de las bibliotecas, de los docentes o de los padres y madres, puedan convertirse realmente en una herramienta de gran valor.

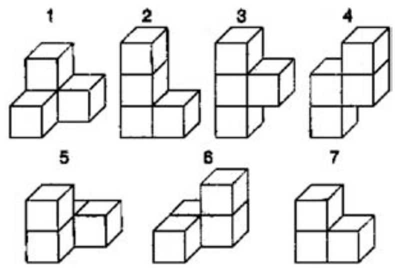
El Cubo Soma

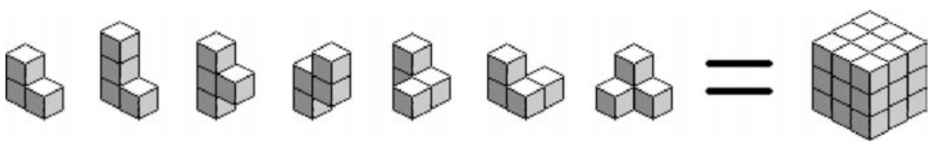
DESCRIPCIÓN. **El cubo Soma** es un rompecabezas geométrico, con siete piezas, formadas a su vez por cubitos, que hay que unir para formar un cubo mayor.

Con las piezas del cubo Soma se pueden crear otras formas, con diseños geométricos más o menos interesantes o incluso diseños figurativos. Hay recopilaciones con miles de estas figuras.

Las siete figuras que componen el cubo Soma se pueden identificar con un número o con una letra, y consisten en todas las disposiciones diferentes de cuatro cubos simples excepto el formado por los cubos en línea, a las que se añade una figura compuesta por tres cubos simples:

1.- Tetrominó tridimensional de forma de trípode
2.- Tetrominó plano en forma de L
3.- Tetrominó plano en forma de T
4.- Tetrominó plano en forma de Z
5.- Tetrominó tridimensional de forma helicoidal dextrógira
6.- Tetrominó tridimensional de forma helicoidal levógira
7.- Triominó plano en forma de L

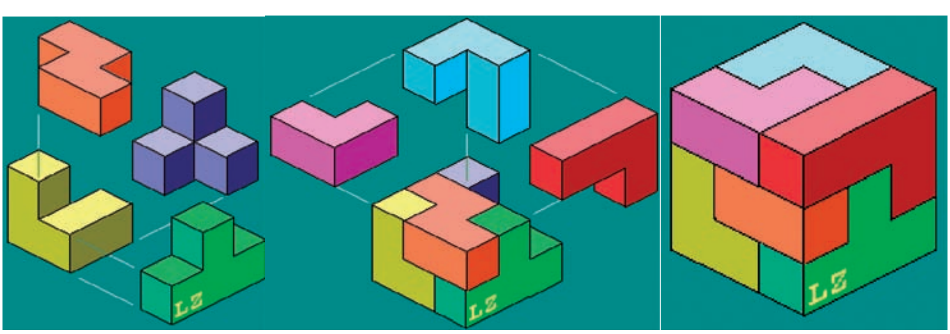




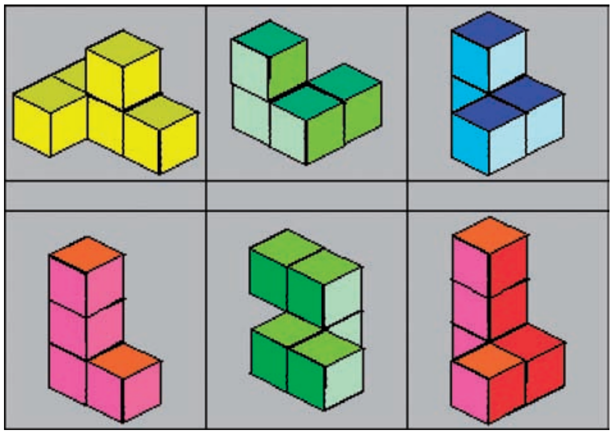
HISTORIA. El Cubo Soma lo inventó el danés Piet Hein, poeta, soñador, matemático y genio, en 1936. Se dice que durante una conferencia del físico Heisenberg, Hein empezó a pensar en los distintos policubos que se podían obtener uniendo varios cubos del mismo tamaño, y comprobó que todos los policubos irregulares formados por cuatro o menos cubos sumaban un total de 27 cubos, y podían unirse en un cubo mayor con tres cubos de arista. No fue un puzzle demasiado popular hasta 1969 cuando Parker Bros lo difundió como "La respuesta 3D al Tangram".

Posteriormente, el matemático John Conway comprobó que había 240 formas distintas de realizar el cubo de 3x3x3.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. Aquí te mostramos una de las posibilidades para componer el cubo de 3x3x3 a partir de las siete figuras anteriores:



VARIANTES. Entre las variantes más importantes desde el punto de vista didáctico se encuentra el llamado CUBO DE STEINHAUS, conocido también como cubo Mikusinski. La primera referencia a él se encuentra en los *Mathematical Snapshots*, de Hugo Steinhaus, publicado en 1950. Es muy parecido al Cubo Soma, pero está compuesto por las 6 piezas siguientes:



ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. Hoy en día el Cubo Soma no se usa sólo como un entretenimiento, se utiliza también en psicología, en educación física, en diseño, etc. En el área de enseñanza de las matemáticas el Soma se utiliza para introducir conceptos de geometría del espacio, especialmente en temas de orientación espacial. Al igual que otros juegos la utilización inteligente del cubo Soma permite relacionar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación y consolidación de ideas abstractas.

Actividad 1. Si se toman dos figuras iguales a la pieza nº 5, fácilmente puede verse que se puede obtener un cubo de 2x2x2 ¿Es posible realizar el mismo cubo de 2x2x2, utilizando otras dos figuras del Cubo Soma? ¿cuáles?

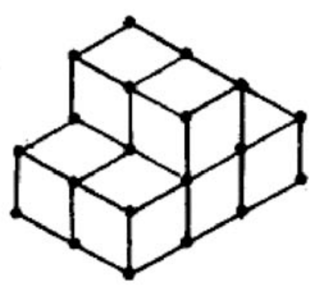
Esta actividad se puede ampliar pidiéndoles a los estudiantes que busquen todas las formas de construir un cubo 2 x 2 x 2 con dos figuras formadas por cubitos unidad, no necesariamente del cubo Soma. Clasificar el número de cubitos unidad que puedan tener las figuras determina la solución.

Es una actividad que se puede realizar a partir del primer ciclo de primaria, se trata de combinar todas las posibilidades y descubrir pautas de formación.

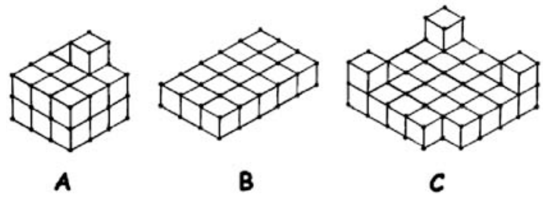
Actividad 2. Si te fijas las piezas nº 5 y la nº 6 son casi iguales ¿sabrías decir en qué se diferencian?

Es una actividad que requiere una precisión en el lenguaje matemático y el conocimiento de la simetría, por tanto es recomendable ponerla a partir del tercer ciclo de primaria.

Actividad 3. El cuerpo representado a continuación está formado por 8 cubitos y se puede construir con algunas piezas del cubo Soma. Analiza una a una las piezas del Soma e indica cuáles son.

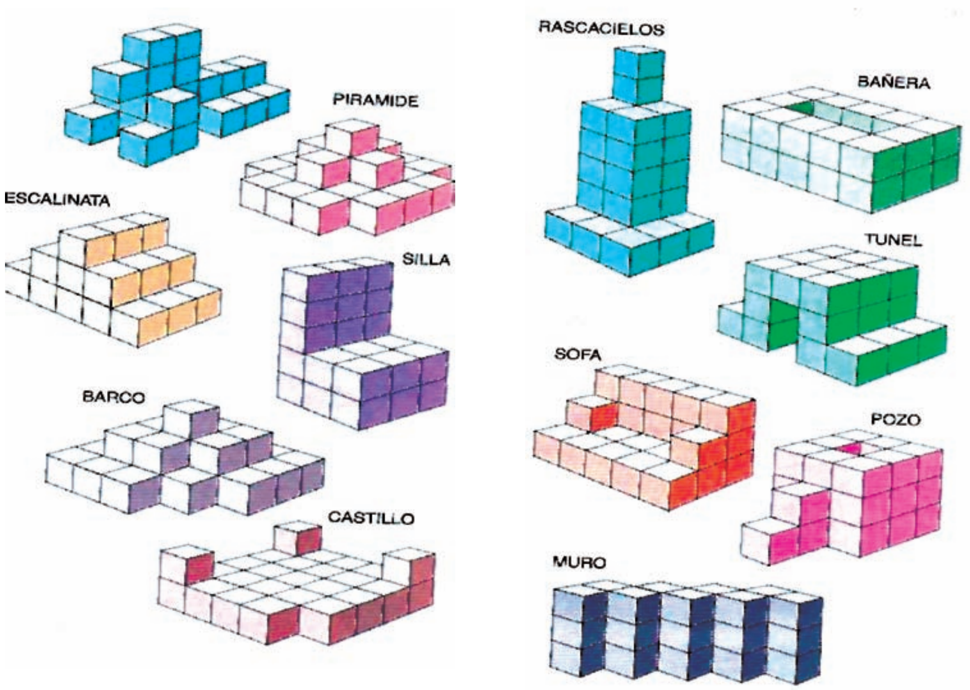


Es una actividad que puede proponerse desde los primeros años de primaria, un primer acercamiento es resolverlo mediante ensayo error. A partir del segundo ciclo de primaria se puede resolver mediante una acción más reflexiva, como es contar los cubos que componen la figura y probar con las figuras del Soma más idóneas. En esta línea estaría la siguiente actividad.



Actividad 4. Calcula, en cada caso, cuántos cubitos necesitas para su construcción; analiza una a una las piezas del Soma y estudia con qué piezas del Soma se pueden generar.

Actividad 5. Empleando únicamente las siete piezas del cubo soma trata de realizar las siguientes configuraciones:



Es una actividad de investigación, que requiere paciencia, inteligencia y suerte.

¡¡Ojo!! una de ellas no se puede realizar ¿sabes cuál?

MÁS INFORMACIÓN:

- Jugar on line: www.mm-softtools.de/cube/somacube.html

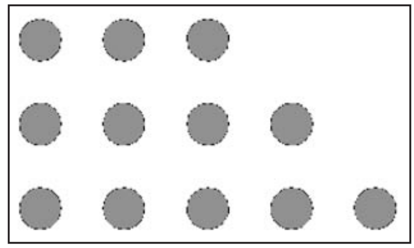
Más actividades:

www.shalafi.org/Puzzles/cubo_soma_figuras.php

www.aulamatematica.com/cubosoma/index.htm

www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM

El Juego del Nim



DESCRIPCIÓN. El Nim es un juego para dos jugadores. Para jugar se distribuyen 12 fichas (monedas, piedras, botones, cartas…) en tres filas (o montones), con 3 fichas en el primer montón, 4 en el segundo y 5 en el tercero. Los jugadores, por turnos, deben quitar una o más fichas con la condición de que pertenezcan a la misma fila. Gana el jugador que retira la última ficha. También se puede jugar con la regla de que sea la persona que retira la última ficha quien pierda.

En realidad el Nim puede constar de cualquier número de filas y de fichas por fila.

HISTORIA. Éste es un juego muy antiguo de origen chino, que al parecer está relacionado con el antiguo juego "Tsyanshidzi", que significa "cogiendo piedras" (similar al conocido como Nim de Wythoff). El origen del moderno Nim es incierto, aunque al parecer hay referencias en Europa al mismo en el siglo XVI. El nombre se debe al matemático norteamericano Charles L. Bouton, quien desarrolló un análisis completo del juego en 1901, y probablemente se deriva del verbo inglés en desuso "nim" que significa quitar o coger, o del alemán "nimm!" (coge!).

Este juego se hizo muy popular en Europa a raíz de la película *El año pasado en Marienbad* de Alain Resnais, en la que el protagonista usa el juego para matar el tiempo en el balneario de Marienbad, en Chequia, famoso en toda Europa desde el siglo XVI. En la película se juega al Nim de cuatro filas y con 1, 3, 5 y 7 fichas respectivamente. El protagonista siempre gana ya que conoce la estrategia ganadora.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. Este juego tiene una estrategia ganadora, haciendo uso de los números binarios, pero no es sencilla de obtener, aunque sí de entender. Esta estrategia consiste en expresar el número de fichas de cada fila en el sistema binario y quitar fichas para que la suma del número de coeficientes en cada posición binaria sea par.

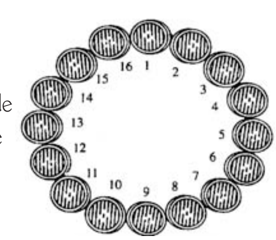
1ª fila: (3 fichas)	0	1	1
2ª fila: (4 fichas)	1	0	0
3ª fila: (5 fichas)	1	0	1
Suma coeficientes	2	1	2

Veámoslo. Para nuestro Nim 3-4-5, tenemos que el 3 se escribe en binario como $(011)_2$, el 4 como $(100)_2$ y el 5 como $(101)_2$. Así tenemos, como muestra la imagen, que la suma de los coeficientes en cada posición binaria es 2, 1 y 2. Por lo tanto, el primer jugador puede llevar a cabo la estrategia ganadora al retirar dos fichas de la primera fila, puesto que así la paridad quedará 2, 0 y 2. El segundo jugador necesariamente rompe la paridad al realizar su jugada y de nuevo el primero restablecerá la misma, así hasta terminar quitando el primer jugador la última ficha.

Si jugamos la versión de Marienbad 1-3-5-7, tenemos que las expresiones en binario de estos números son $(001)_2$, $(011)_2$, $(101)_2$ y $(111)_2$, por lo que la paridad quedará 2, 2 y 4, por lo que la estrategia ganadora servirá para el segundo jugador, ya que el primero romperá necesariamente la paridad.

VARIANTES

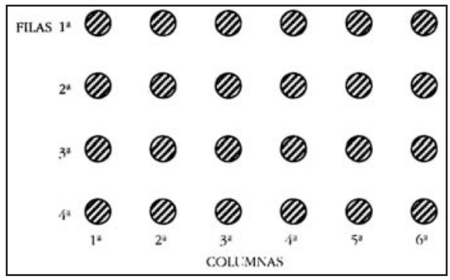
1.- *Nim simplificado*. Este es un sencillo juego para dos jugadores. Se inicia con un montón de fichas, por ejemplo 10 fichas (aunque podrían ser más), cada uno de los jugadores, por turno, retira 1 ó 2 fichas, según quiera. Pierde el jugador que se lleve la última ficha (o se puede jugar a que sea el que coge la última ficha quien gana).



2.- *La cadena* (también conocido como "la margarita"). Este es uno de los muchos juegos inventados por Sam Loyd. Se colocan en círculo un cierto número de fichas, por ejemplo 16, y los jugadores se van turnando para quitar una o dos fichas, pero si sacan dos estas deberán estar juntas, una seguida de la otra, y el vencedor será quien retire la última ficha.

3.- *Nim de Wythoff*. Este juego está formado por dos filas de fichas y cada jugador, por turnos, puede quitar las fichas que quiera de una fila o de las dos, pero en este último caso deberá quitar el mismo número de fichas en cada fila.

4.- *El Nimbi*. El polifacético Piet Hein creó este juego, que es una variación del Nim, del que no se conoce aún la estrategia ganadora. Se colocan una serie de fichas formando un cuadrado o un rectángulo de un tamaño cualquiera, por ejemplo, 4 x 6, y cada jugador de forma alternada irá retirando tantas fichas contiguas como desee de una fila o una columna. Gana el jugador que retira la última ficha.



ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. El Nim, y los juegos relacionados, son juegos de estrategia, por lo que son muy útiles para desarrollar el análisis, el pensamiento y la lógica de los estudiantes, así como para practicar algunas técnicas de resolución de problemas (ensayo-error, empezar por lo fácil, descomponer el problema, simetría,…).

Actividad 1 (a partir de 12 años). *Nim*. a) En primer lugar se les plantea a los estudiantes como un juego divertido y rápido (un minuto por partida), con el reto de que busquen estrategias para ganar a sus compañeros y compañeras. b) Un consejo para que encuentren estrategias ganadoras es que analicen situaciones más sencillas (véase actividad 2). c) Días más tarde se les explica en clase el sistema binario, cómo escribir los números en ese sistema, algunas aplicaciones de los sistemas binarios (ordenadores, CD, envío información, magia,…). d) Finalmente se les puede explicar la estrategia ganadora que utiliza el sistema binario, trabajando varios ejemplos.

Actividad 2 (a partir de 7 años). *Nim*. Para los estudiantes más jóvenes nuestra sugerencia es trabajar con una versión sencilla del Nim, por ejemplo, la 2-3-4, y en la versión en la que pierde la persona que se ve obligada a retirar la última ficha. De nuevo lo principal es que jueguen y que intenten buscar la forma de ganar por ellos mismos. Después de que hayan jugado muchas veces se les puede aconsejar que para buscar la forma de ganar analicen esquemas de fichas más sencillos, como a) que haya el mismo número de monedas en dos filas (2 ó 3); b) una moneda en una fila, dos en la siguiente y tres en la tercera; para que descubran que ganarán cada vez que dejen uno de estos esquemas al jugador contrario. Con estas indicaciones el jugador primero ganará siempre, o el segundo si juega contra alguien que no sabe la estrategia ganadora. Una actividad extra puede ser que averigüen cual es el movimiento inicial correcto en este caso 2-3-4 para estar seguro de que ganará siempre (este es que eliminen tres fichas de la fila inferior). Sería muy interesante en esta actividad pedirles a los estudiantes que tomen nota de las partidas celebradas para que extraigan sus consecuencias.

Actividad 3 (a partir de 8 años). *Nim simplificado*. De nuevo es importante que el primer contacto de los alumnos y alumnas sea jugar. Si no descubren la estrategia ganadora por ellos mismos se les puede aconsejar que empiecen por el final, viendo cómo ganarían la partida y vayan reconstruyendo la misma hacia el inicio. La estrategia ganadora para el segundo jugador consiste en quitar un número distinto de fichas que el primer jugador (si este quita una el segundo jugador quitaría dos y al revés), así la secuencia de fichas que quedan tras jugar el segundo jugador es 7, 4, 1. Extra: ¿qué ocurre si fuesen 11 monedas? ¿qué ocurre si se pueden quitar 1, 2 ó 3 fichas?

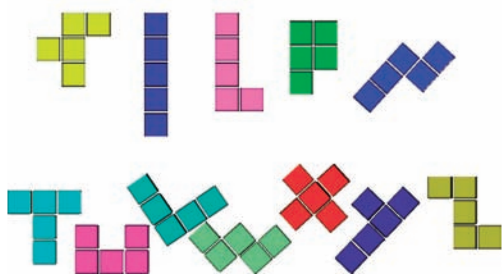
Actividad 4 (a partir de 8 años). *La cadena*. Este es un sencillo juego en el que la simetría es fundamental para obtener la estrategia ganadora. Pero antes, jugar, jugar, jugar. La estrategia ganadora consiste en realizar la acción simétrica a la del oponente. El primer jugador quitará una o dos fichas, entonces el segundo jugador retirará las fichas centrales del resto, una si queda un número impar y dos si es par. Quedarán entonces dos trozos de la cadena, a partir de entonces cada vez que el primer jugador quite una o dos fichas de uno de los trozos, el segundo hará lo mismo pero del otro trozo.

MÁS INFORMACIÓN

- Jugar on line: britton.disted.camosun.bc.ca/nim.htm
- El juego y la matemática, Luis Ferrero, La Muralla, 1991.
- Cuentos con cuentas, Miguel de Guzmán, Nivola, 2003.
- Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato, Fernándo Corbalán, Síntesis, 1998.

El Juego de los Pentominós

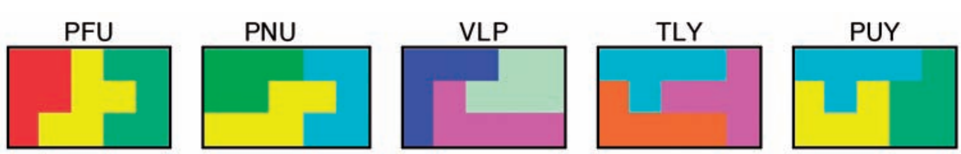
DESCRIPCIÓN. El Juego de los Pentominós es un rompecabezas geométrico cuyas piezas (llamadas pentominós) son las figuras planas formadas por cinco (en griego penta, de ahí el nombre) cuadrados yuxtapuestos de forma que tengan por lo menos un lado en común. En total salen 12 piezas diferentes, fáciles de recordar si memorizamos la palabra FILiPiNo y las 7 últimas letras del alfabeto TUVWXYZ



El juego básicamente consiste en formar diferentes figuras utilizando las distintas piezas. El juego más sencillo, apto para alumnos y alumnas de todas las edades desde los 4 años, consistiría en formar rectángulos de tamaño n x 5 (n=3, 4, 5, 6, 7, 8) utilizando, lógicamente, n pentominós, como se indica por ejemplo en la siguiente tabla:

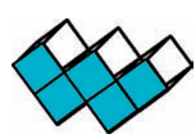
	PENTA 3			4	5	6	7	8
A	L	Y	T	P	W	Z	V	N
B	N	P	U	L	Z	Y	T	W
C	L	V	P	Y	N	U	Z	F
D	Y	P	U	N	V	F	W	T
E	L	N	V	Z	U	T	Y	W
F	P	U	F	Y	T	N	L	W
G	L	V	P	Z	Y	W	N	F

En la tabla adjunta se detallan algunas soluciones del penta 3 (rectángulo 3 x 5).



También y en un nivel un poco superior, se puede jugar a crear diferentes formas y figuras, como por ejemplo rectángulos de área igual al total del área que ocupan los 12 pentominós.

Existe la variante de utilizar piezas creadas a partir de cinco cubos en lugar de cuadrados, que da pie a una especie de piezas del cubo soma, como la que generaría la pieza W en la imagen adjunta.

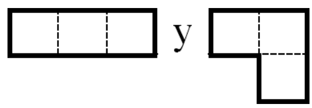


HISTORIA. La primera referencia a los pentominós es de 1954 y se debía al matemático y catedrático de la Universidad del Sur de California, Solomon W. Golomb. En 1957, la revista *Scientific American* publicó el primer artículo sobre ellos. Desde entonces el juego se ha convertido en un pasatiempo muy popular. Como anécdota podemos contar que el juego del Tetris está basado en los pentominós.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS.

Actividad 1 (a partir de 8 años). La primera actividad podría consistir en, una vez descrito el juego, ver cuántas piezas posibles tiene el mismo, es decir, averiguar de cuántas formas se pueden unir cinco fichas cuadradas yuxtapuestas que tengan un lado en común: 12 pentominós.

Una forma interesante de abordar la actividad sería comenzar con el caso más sencillo, esto es, de cuántas maneras se pueden unir tres cuadrados (ya que, claramente, 2 fichas únicamente se pueden unir de una manera):

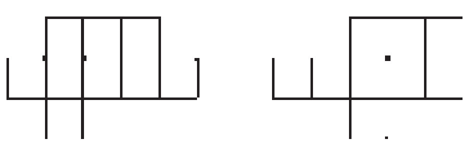


Luego, basándose en estas dos piezas conseguidas, se podría ampliar el ejercicio a las posibilidades que existen con 4 piezas (aquí se las puede relacionar con las piezas del Tetris) y concluir con los casos existentes para los pentominós.

Otra forma de abordar las posibles piezas que surgen al unir cinco piezas para formar los pentominós, sería la de realizar clasificaciones, o familias de figuras para ir ordenando las posibles soluciones que aporten los estudiantes (una posible clasificación podría basarse en el número máximo de cuadrados alineados). Dependiendo de las capacidades de los alumnos se les podría hablar además de las simetrías y rotaciones.

Una vez llegados a este punto, teniendo en cuenta que si la superficie de cada uno de los cuadrados utilizados en formar las piezas la consideramos como unidad de superficie, cada uno de los 12 pentominós tendrá una superficie de 5 unidades. Una cuestión a plantear al alumnado sería ¿tendrán todos el mismo perímetro?

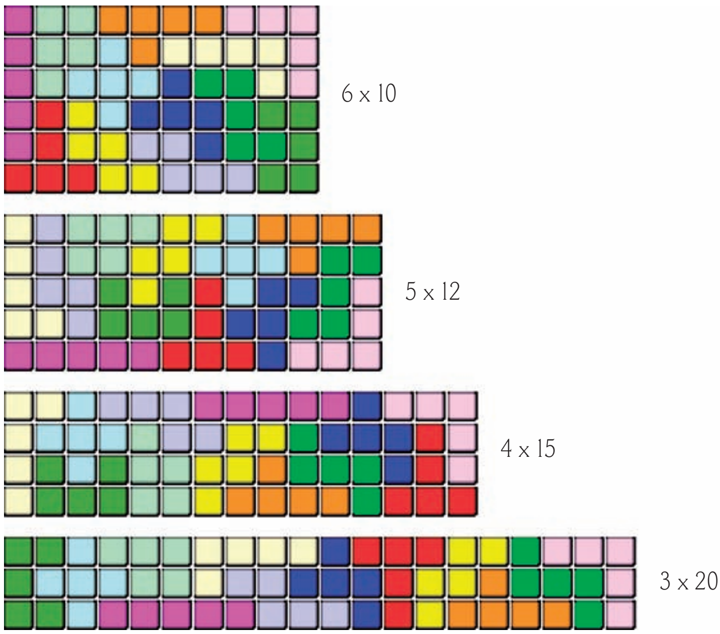
Actividad 2 (a partir de 8 años). Una vez los alumnos disponen de las 12 fichas posibles, y teniendo en cuenta que están formadas por 5 cuadrados, está claro que podríamos colocar cada una de ellas sobre una superficie cuadrada de tamaño 5 x 5. Pero la actividad consiste en encontrar la menor superficie capaz de albergar a cualquiera de las 12 fichas del juego de los pentominós. La solución, en lugar de la superficie original de 25 unidades, se puede conseguir con una de únicamente 9 unidades de superficie. Soluciones:



Actividad 3 (a partir de 8 años). Supongamos que los estudiantes han realizado ya la actividad 1 o que tienen las 12 piezas del juego delante. La siguiente actividad consistirá en estudiar y clasificar qué tres piezas permiten construir un Penta 3 (un rectángulo de dimensiones 3 x 5), a continuación un Penta 4 (4 x 5) y así continuar hasta que se considere interesante por el profesorado. Obsérvese que en la tabla inicial se dan muchas respuestas a esta cuestión. La actividad se puede completar dejándoles utilizar su imaginación para diseñar diferentes objetos, animales,…con las piezas del juego.

Actividad 4 (a partir de 12 años). Dado que el conjunto completo de todas las piezas tiene una superficie total equivalente a 60 unidades (12 piezas de cinco unidades cada una) ¿podríamos construir una caja rectangular que sirviese para guardarlas sin dejar huecos? ¿Qué figuras podría adoptar la caja contenedora?

Según el nivel de los alumnos, se les podría aportar alguna de las soluciones de las figuras básicas y se podría discutir si creen que la solución es única, cómo conseguir más soluciones, etc



Actividad 5 (a partir de 12 años). Una actividad un poco más avanzada sería la siguiente. Teniendo un juego de pentominós en tres dimensiones (esto es, creado a partir de un cubo de lado unidad, en lugar de un cuadrado, que es una figura plana) ¿podríamos construir paralelepípedos con todas las piezas, sin dejar huecos? Las soluciones serían: 2x5x6 y 3x4x5 que dan figuras de volumen 60. Dos posibles soluciones, aunque difíciles de obtener, serían:

			2	x	5	x	6															3	x	4	x	5									
P	P	N	N	N		P	P	L	L	L	L		F	F	V	V	V		X	F	F	P	T		U	F	U	P	P		U	U	U	P	P
W	N	N	X	U		F	F	L	Z	Z	U		X	N	N	N	V		X	L	T	T	T		X	L	L	L	L		I	I	I	I	I
W	W	X	X	X		V	F	F	Z	T	U		N	N	Z	Z	V		X	W	W	Z	T		W	W	Y	Z	Z		W	Y	Y	Y	Y
Y	W	W	X	U		V	F	Z	Z	T	U																								
I	I	I	I	I		V	V	V	T	T	T																								

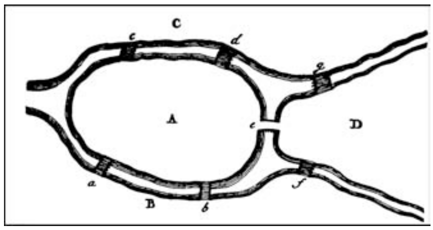
Actividad 6 (a partir de 12 años). Juego para dos jugadores. Este juego se juega con los 12 pentominós y un tablero 8 x 8 sobre el que poder colocar las piezas. El primer jugador, elegido por sorteo, tomará un pentominó y lo pondrá sobre el tablero, a continuación el segundo jugador hará lo mismo, y seguirán jugando por turnos hasta que gana el último jugador que ha sido capaz de colocar un pentominó. Una variante consiste en repartirse las 12 fichas entre los jugadores antes de iniciar el juego.

MÁS INFORMACIÓN:

- Katamino. Versión comercial del juego de los pentominós, que ha sido distribuida dentro del programa "BBK-máticas, Las matemáticas en las biblioteca escolares", y que cuenta con una guía de puzzles con los pentominós muy extensa.
- thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/55_56-2-o-pentomino.html
- Para jugar on line: www.yupis.es/juegos/pentamino/#play

Los Puentes de Königsberg

DESCRIPCIÓN. En la ciudad de Königsberg había una isla llamada Kneiphof y el río que la rodeaba, el río Pregel, se dividía en dos brazos sobre los que cruzaban siete puentes (véase la imagen). El problema es ¿se puede organizar un paseo que pase por todos los puentes y de tal modo que se cruce por cada puente una única vez?

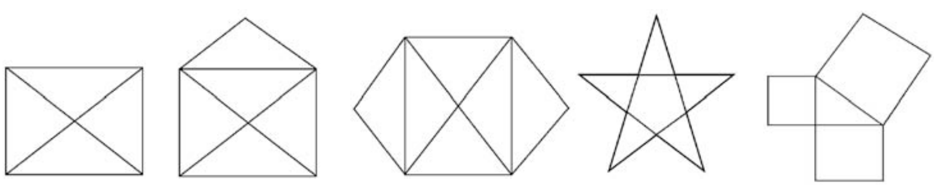


HISTORIA. Se cuenta que entre los habitantes de la ciudad prusiana de Königsberg (en la actualidad esta ciudad se llama Kaliningrado y pertenece a Rusia) existía una diversión muy popular que consistía en intentar resolver el problema del paseo por los mencionados puentes. Algunos habitantes decían que sí era posible y otros que no, pero nadie había podido hallar la solución.

Sin embargo el genial matemático Leonhard Euler resolvió el problema en la famosa memoria "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" que presentó en la Academia de Ciencias de San Petersburgo en 1735. Esta memoria se considera el origen de dos ramas de las matemáticas muy importantes, como son la Topología (que Euler llamó "Geometría de la Posición") y la Teoría de Grafos.

VARIANTES.

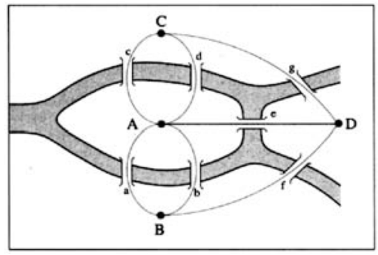
a) *Pintar de un solo trazo*. Se trata de dibujar de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz, sin pasar dos veces por la misma línea y sin pintar líneas de más, figuras como las que aparecen en la imagen u otras que se nos puedan ocurrir.



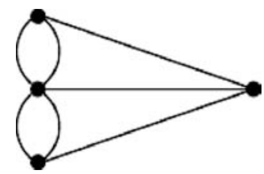
b) *Los retoños*. Este es un juego para dos jugadores y que se juega sobre un papel en el que hay pintados un cierto número de puntos (por ejemplo, tres), que van a ser los nudos de una red. El primer jugador debe unir dos de los puntos, o un punto consigo mismo, con un arco y marcar un nuevo punto en la mitad del arco trazado, que será un nuevo nudo de la red. Luego, el segundo jugador hará lo mismo e irán jugando por turnos, siempre que se respeten las dos condiciones siguientes: a) los arcos podrán tener cualquier forma, pero no pueden cortarse a sí mismos, ni a ningún otro arco y no pueden pasar por otro punto anterior; b) cualquier punto puede utilizarse como extremo de un arco, salvo los puntos a los que llegan 3 arcos (que podemos rodearlos con un círculo para denotar que están fuera de juego). El objetivo del juego es dejar al otro jugador sin posibilidad de movimiento, por lo que gana el último jugador que consigue pintar un arco.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. El primer intento de resolver el problema de los puentes de Königsberg es enumerar todos los posibles paseos y ver uno a uno a ver si resuelve el problema, pero debido al gran número de permutaciones posibles esto hace el intento impracticable. Veamos cómo lo resolvió Euler.

La primera clave es eliminar los elementos irrelevantes del mismo (abstracción) para quedarnos solamente con lo importante (creando un modelo matemático). Los datos esenciales de este problema son los territorios que aparecen en el problema (independientemente de su tamaño y forma) y los puentes que los unen (independientemente de las propiedades físicas de los mismos), por lo que se puede sustituir el mapa anterior por una red o grafo en la que cada territorio está representado por un punto (vértice) y los puentes son arcos que unen dichos puntos, como aparece en la imagen. El problema se ha convertido entonces en demostrar que el grafo no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por el mismo arco (el problema de pintar de un solo trazo).



A continuación, hay que analizar el modelo matemático, el grafo, e intentar utilizar las herramientas necesarias para resolver el problema. Euler se dio cuenta de que la clave estaba en observar el número de arcos que llegaba a cada vértice (grado) y que había vértices de grado par y otros de grado impar. Teniendo en cuenta que si se llega a un vértice y se vuelve a salir del mismo se están implicando dos arcos de ese vértice, se deduce que todos los vértices deben de tener grado par, salvo los vértices inicial y final en el caso de que no se exija empezar y terminar en el mismo vértice, en cuyo caso todos los vértices tendrían grado par.

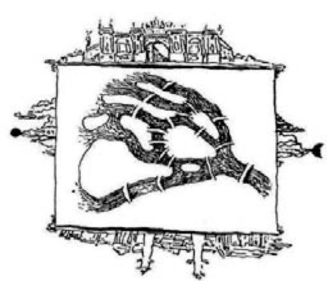


Al analizar el grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg, se observa que hay tres vértices con grado 3 y uno con grado 5. Como todos los vértices son impares el problema es imposible de resolver.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS.

Actividad 1 (a partir de 8 años). Se les plantea a los estudiantes el problema de los puentes de Königsberg para que busquen posibles soluciones. Dependiendo de la edad se les puede trazar el dibujo del río, la isla y los puentes con cinta aislante en el suelo de un aula o con tiza en el patio (incluso, sobre todo si son muy jóvenes, se les pueden colocar fichas a lo largo del "recorrido" y plantearles el problema de recoger todas las fichas, con la condición de que no se puede pasar si no hay fichas en el camino), o simplemente se les pasa un dibujo amplio con el gráfico para que trabajen sobre el mismo.

Una vez que han tratado de resolver el problema por sí mismos, es hora de ayudarles. Lo primero es hacerles ver que hay aspectos del problema que no son importantes para su resolución, como la distancia entre las orillas del río, que la isla sea más o menos grande, alargada o redonda, que los puentes sean estrechos o anchos, rectos o curvos,… es decir, tenemos que eliminar lo superfluo y quedarnos con lo esencial (se les puede explicar que este proceso se conoce en matemáticas con el nombre de abstracción). Se les explica cómo llegar al grafo asociado al problema y que este se ha convertido en un problema de pintar de un solo trazo (se puede hablar de que esto es lo que en matemáticas se conoce como un modelo matemático). [Si se ha trabajado la versión de dejar fichas en el suelo, se les puede mostrar que las fichas forman el grafo].



De nuevo deben ser ellos quienes intenten primero resolver el problema de pintar el grafo asociado a los puentes de Königsberg con un solo trazo.

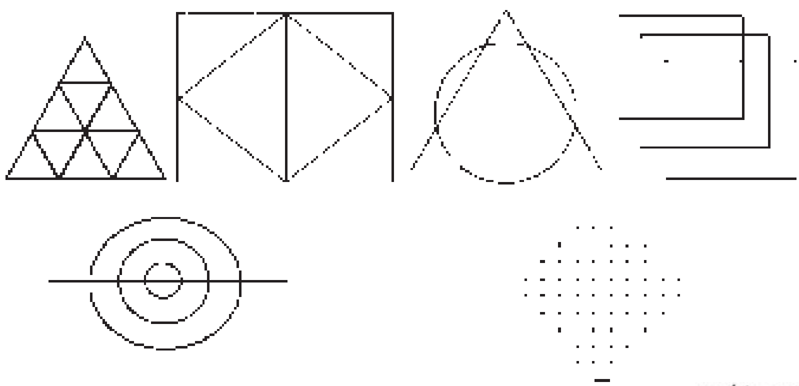
Después se les plantea que quizás el problema no tenga solución y se les anima a justificar el motivo. Mientras buscan la solución se les irá ayudando poco a poco a llegar a la explicación dada arriba.

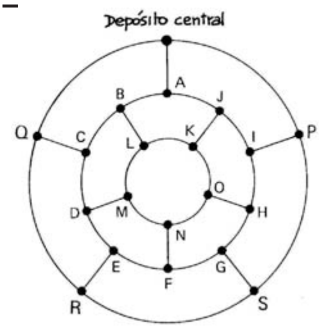
Llegados a este punto se puede terminar con las siguientes cuestiones:

a) ¿Si se quita algún puente del río Kneiphof tendrá solución el problema? ¿Y si se añade?

b) El recreativo Yakov Perelman plantea si es posible recorrer los 17 puentes que unen diferentes partes de la ciudad de Leningrado (véase imagen).

c) Pintar de un solo trazo las figuras que aparecen arriba y las que aparecen a continuación.

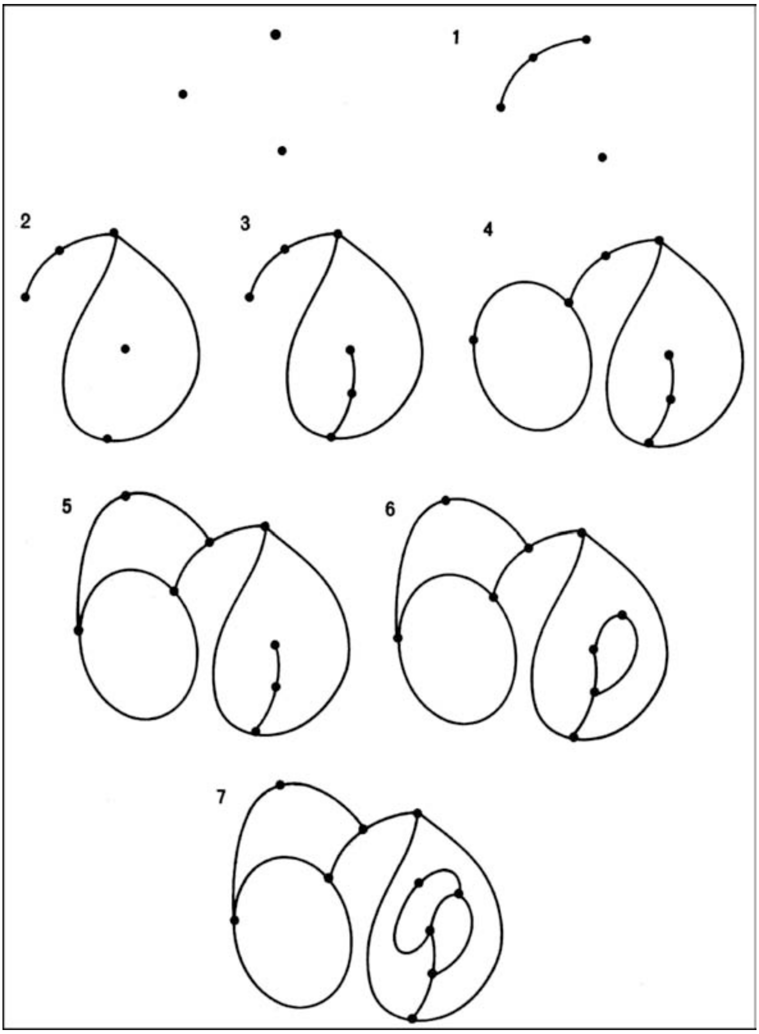




Actividad 2 (a partir de 8 años). La recogida de la basura. Una gran ciudad tiene un sistema de calles circulares y transversales, como indica la figura. En cada empalme de calles hay un contenedor de basura. Demuéstrese que el conductor de un camión de la basura puede salir del depósito central, recoger la basura de todos los contenedores y regresar al depósito sin pasar dos veces por el mismo sitio.

Actividad 3 (a partir de 8 años). Plantear a los estudiantes jugar al juego de los retoños que se juega con tres puntos, dejándoles tiempo (quizás algunos días) para que se diviertan e incluso busquen por sí mismos estrategias ganadoras. Entonces llega el tiempo para las actividades. La primera sería preguntarles qué ocurriría si se juega a los retoños empezando con un solo punto: ganaría el segundo jugador. La siguiente actividad es que analicen y tomen nota de las diferentes posibles partidas del juego con dos puntos iniciales, para concluir que existe una estrategia ganadora para el segundo jugador. Para el juego de tres puntos existe una estrategia ganadora para el primer jugador. Una actividad extra sería que intenten explicar por qué el juego debe terminarse después de un número limitado de movimientos (si el juego se inicia con tres puntos, habrá nueve arcos disponibles para ser trazados, ya que a cada punto le pueden llegar tres posibles arcos; pero teniendo en cuenta que en cada movimiento se inutilizan dos arcos y se introduce un nuevo punto, entonces en cada movimiento se pierde en conjunto la disponibilidad de un arco y el número de movimientos posibles será ocho).

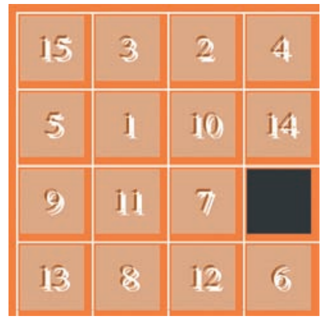
Ejemplo de una partida:



MÁS INFORMACIÓN

- Divertimentos Matemáticos, Brian Bolt, Labor, 1988.
- Cuentos con cuentas, Miguel de Guzmán, Nivola, 2003.
- Para jugar on line: www.aulademate.com/contentid-200.html

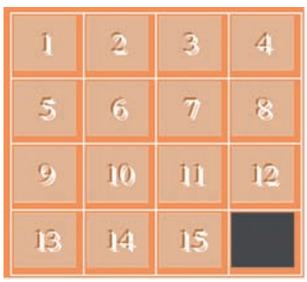
El Puzzle del Quince

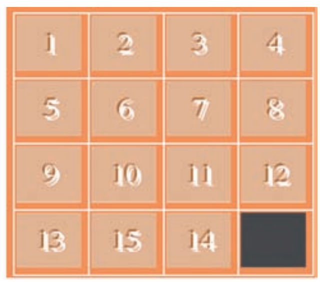


DESCRIPCIÓN. Se trata del juego de deslizamiento de piezas más popular. Consiste en un cuadrado de tamaño 4 x 4 con los quince primeros números naturales (se elimina el número 16).

Cada cuadrado numerado representa un bloque deslizante que sólo puede moverse al cuadrado en blanco. Cada movimiento consiste en deslizar un cuadrado numerado sobre el cuadro en blanco. El objetivo del juego es lograr que las piezas queden colocadas en algún orden predeterminado. La ordenación más común es colocar las piezas de menor a mayor, empezando desde arriba y de izquierda a derecha.

Debemos observar que no toda posición inicial tiene solución. Por ejemplo, las posiciones de las figuras siguientes no pueden alcanzarse desde una hasta la otra.





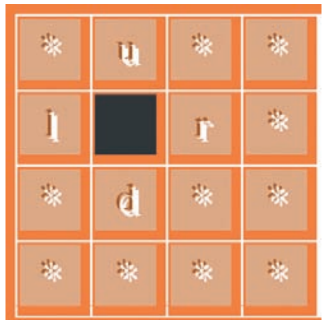
HISTORIA. El inventor del puzzle fue Noyes Chapman (aunque durante mucho tiempo se ha atribuido la invención a Sam Loyd, un conocido autor de numerosos problemas de ingenio y multitud de puzzles).

A finales de la década de 1870, el puzzle hizo furor en los Estados Unidos y la fiebre se extendió rápidamente, como una plaga. También en Europa hubo muchos aficionados a este juego, y en cualquier lugar se veía a gente completamente absorta en el juego. Rápidamente se organizaron concursos y desafíos en relación a este puzzle. La explicación a esto es que Loyd construyó su modelo con las quince piezas en orden salvo las dos últimas, la 14 y la 15, que las colocó intercambiadas. El problema que planteaba era conseguir que todas las piezas estuvieran en orden, sólo deslizando las piezas en el cuadro.

Los 1000 dólares ofrecidos a quien primero diera la solución no se entregaron nunca; sin embargo, el interés de la gente dio pie a numerosas anécdotas al respecto.

En 1880 la fiebre alcanzó su punto culminante, pero pronto se enfrió al entrar en escena las armas de la Matemática. La teoría matemática que subyace en el puzzle probó que sólo la mitad de los problemas que podían plantearse tenía solución, independientemente de la estrategia utilizada. Se vio claro entonces por qué los organizadores de los concursos ofrecían esas enormes recompensas a quienes resolvieran ciertos problemas.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. Veamos cuáles son los posibles movimientos en este puzzle. En figura suponemos que u, d, l, r, representan los números de arriba, abajo, izquierda y derecha del cuadrado libre (el cual supondremos que corresponde al número 16), respectivamente, y * representa cualquier otro número.



Hay cuatro movimientos básicos:

- U = colocar la pieza u en el lugar de 16.
- D = colocar la pieza d en el lugar de 16.
- L = colocar la pieza l en el lugar de 16.
- R = colocar la pieza r en el lugar de 16.

Una estrategia para resolver el puzzle consiste en seguir los pasos siguientes:

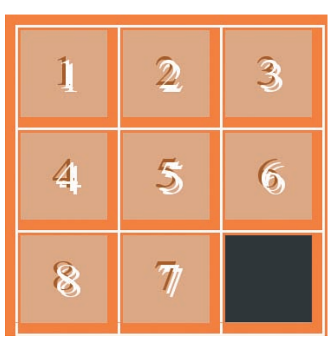
1. Primera fila: colocar las piezas 1 y 2 en su lugar, a continuación la pieza 4 en el lugar del 3 y la pieza 3 debajo de la 4. Basta dejar el hueco en el lugar 4 para desplazar las piezas 4 y 3 a su lugar.
2. Segunda fila: igual que la primera.
3. Tercera y cuarta filas: colocar la pieza 13 en el lugar 9 y la pieza 9 a su derecha (en el lugar 10). Al dejar el hueco debajo del 13 se pueden colocar ambas piezas en su lugar, completando la columna de la izquierda. De la misma forma se hace con las piezas 10 y 14. Los números restantes se colocan en su posición con un movimiento circular de las piezas.

También puede ayudar ordenar primero la fila superior y la columna izquierda de modo que las piezas restantes forman un cuadrado de tamaño 3x3.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Actividad 1 (para mayores de 8 años). Una primera actividad consiste en construir el puzzle: con 15 cartulinas cuadradas y una base que las contenga es posible empezar a experimentar el juego.

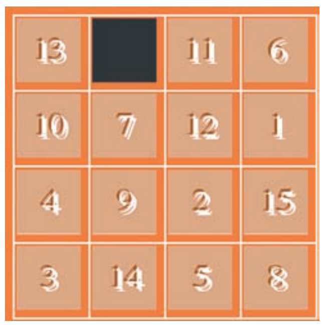
En una primera etapa puede utilizarse simplemente un cuadrado 3 x 3 con los números del 1 al 8. Para que el juego tenga siempre solución, se permite no sólo deslizar una pieza al cuadro vacío sino también saltar una pieza sobre otra (en horizontal o vertical) para caer en el cuadro vacío. En la figura siguiente se propone un ejemplo sencillo: partiendo de la posición dada, colocar las piezas en su orden natural siguiendo las reglas recién explicadas.



Actividad 2 (para mayores de 8 años). Otra opción consiste en recortar una imagen cuadrada en 16 piezas, las cuales pueden pegarse en una cartulina. Eliminando una de ellas y desordenando convenientemente el resto de las piezas, el juego consiste en volver a recomponer el dibujo original siguiendo las reglas ya explicadas. En este caso, también puede empezarse recortando una imagen en 9 piezas cuadradas.

Actividad 3 (para mayores de 10 años). Una variante sencilla consiste en el juego del ocho: dejando fijas en su posición las piezas de la última fila y última columna, nos queda un cuadrado 3 x 3 con los números 1 a 8 en orden creciente. Se trata de invertir el orden de dichos números, para que queden en orden decreciente. Una vez comprendida la estrategia de resolución, es interesante resolver el puzzle en el menor número de movimientos. Por ello, se recomienda llevar la cuenta del número de pasos realizados y tratar de averiguar si el recorrido es óptimo.

Actividad 4 (para mayores de 12 años). Otra variante interesante consiste en conseguir realizar un cuadrado mágico: colocar las piezas de modo que la suma de las filas, columnas y diagonales, sea siempre 30 (el hueco cuenta como cero). Un modelo válido es el de la figura siguiente.



Actividad 5 (para mayores de 12 años). Se puede plantear también el problema de averiguar "a priori" si se puede resolver el puzzle partiendo de una configuración determinada. Como se explica a continuación, la respuesta consiste en contar el número de inversiones entre las piezas.

Como todos los movimientos son reversibles y cualquier sucesión de ellos puede dar como resultado la posición I (todas las piezas en orden creciente) o la posición II (todas las piezas en orden salvo la 14 y la 15 que están intercambiadas), toda la variedad de distribuciones de los números se puede dividir solamente en dos clases disjuntas.

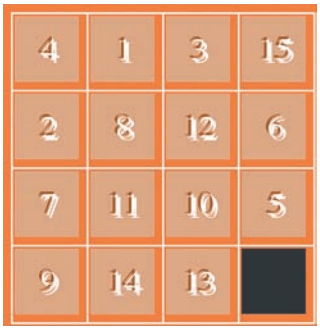
Ahora bien, para saber si una posición inicial pertenece a una clase o a la otra, basta contar el número de inversiones entre las piezas (alteraciones en su orden natural, sumando el número de la fila del cuadro vacío). Si dicho número es par, pertenece al modelo resoluble I, y si es impar, al irresoluble II.

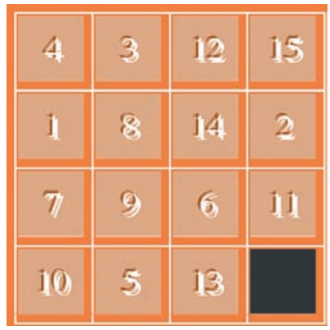
Veamos cómo contar el número de inversiones en la figura del principio:

El 15 posee catorce inversiones, pues está colocado delante de los catorce números menores que él; el 3 posee dos inversiones, el 1 y el 2; el 2 tiene una inversión (el 1); el 4 tiene una inversión (el 1); el 5 tiene una inversión; el 10 tiene cuatro inversiones (los números 9, 7, 8 y 6); el 14 tiene 7 inversiones (todos los números posteriores a él); el 9 tiene dos inversiones (7 y 6); el 11 tiene tres inversiones (7, 8 y 6); el 7 tiene una inversión; el 13 tiene 3 inversiones; el 8 tiene una inversión; y el 12 tiene una inversión.

En total son 14+2+1+1+1+4+7+2+3+1+3+1+1= 43 inversiones. Como el cuadro en blanco está en la tercera fila, 43+3=46. Al ser un número par, el puzzle puede resolverse.

Como ejemplo, mostramos dos figuras cuya paridad es diferente. Se trata de averiguar cuál de ellas es par y cuál es impar.





MÁS INFORMACIÓN

- Multitud de variantes del juego, todos con el nombre genérico de rompecabezas de piezas deslizantes, pueden encontrarse en distintos formatos. Un programa de ordenador que puede descargarse gratuitamente en la página de Rodolfo Valeiras es el Deslizzzp:

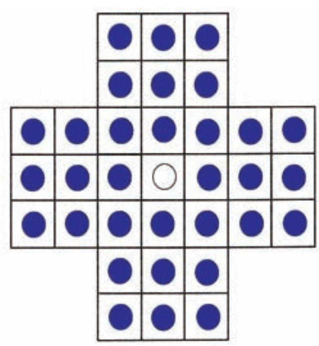
www.rodoval.com/Deslizzzp/Deslizzzp.html

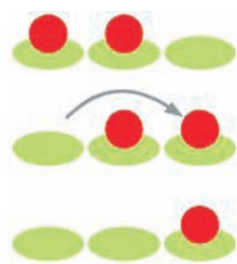
El Solitario en Cruz


Dame de Qualité Jouant au Solitaire.

DESCRIPCIÓN. Es un pasatiempo, que como su propio nombre indica, está pensado para jugar una sola persona. En muchos países, y principalmente en Sudamérica, también se le conoce con el nombre de Senku. Consiste básicamente en ir comiendo, mediante saltos, fichas de un tablero, hasta dejar una sola en un lugar determinado. El principal objetivo de este juego es la búsqueda de estrategias. Aunque existen versiones sobre tableros de diferentes configuraciones, se puede jugar fácilmente sobre un tablero de ajedrez con fichas colocadas sobre los escaques.

Para jugar al "Solitario en cruz", en la versión clásica de 33 casillas (véase la imagen), se colocan 32 fichas dejando libre la casilla central del tablero. Cada jugada consiste en saltar sobre una ficha cualquiera situada en una de las cuatro casillas adyacentes, para caer en una casilla vacía, que debe encontrarse a continuación. La ficha saltada se quita del tablero. Aunque antes de enfrentarse al tablero en cruz de 33 casillas es mejor hacerlo primero con disposiciones más sencillas, de menos fichas, para intentar encontrar estrategias que nos sirvan en los retos posteriores.

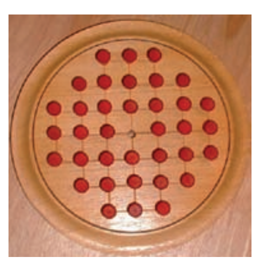




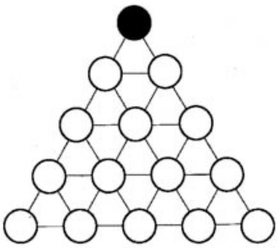
HISTORIA. El solitario es un juego del que se cuenta que fue inventado en el siglo XVII, mientras estaba preso en La Bastilla, por un aristócrata francés, dicen que para hacer más soportable la dureza de su reclusión. El juego hizo furor más tarde en la Inglaterra de la reina Victoria y hoy en día goza de bastante arraigo. Cabe destacar que existen básicamente dos versiones del solitario en cruz, la versión inglesa, que es la más difundida en la actualidad, y la versión francesa original de 37 casillas.

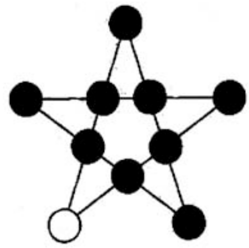
VARIANTES.

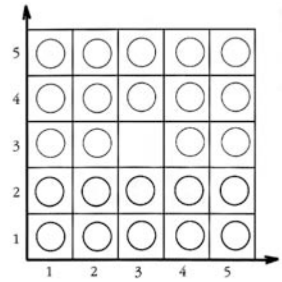
a) *El Solitario de la Bastilla*. La única diferencia con el solitario en cruz, o solitario inglés, es el tablero. El solitario de la Bastilla consta de 37 casillas, sin más que añadir cuatro casillas en los vértices internos del solitario en cruz, formándose así la clásica forma octogonal del juego original francés.



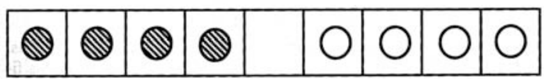
b) *Los tableros del solitario*. Existen versiones de este juego en las que el tablero tiene diferentes formas (triangulares, cuadrados, hexagonales, estrellados,…).



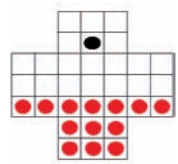




c) *El salto de la rana*. Se parte de un tablero lineal de nueve casillas como el que aparece en la imagen (el número de casillas también podrían ser tres, cinco, siete,…), con cuatro fichas negras en las casillas de un lado, luego una casilla vacía y cuatro fichas blancas en las casillas del otro lado. Este juego de estrategia consiste en intercambiar el sitio de las fichas blancas y negras siguiendo las siguientes reglas: a) por turnos se irá moviendo una ficha negra y luego una blanca; b) las fichas podrán desplazarse hacia la casilla que está inmediatamente delante si está libre o saltar hacia delante sobre una ficha si la siguiente casilla está vacía; c) no puede saltarse más que una ficha a la vez; d) las fichas nunca pueden retroceder.

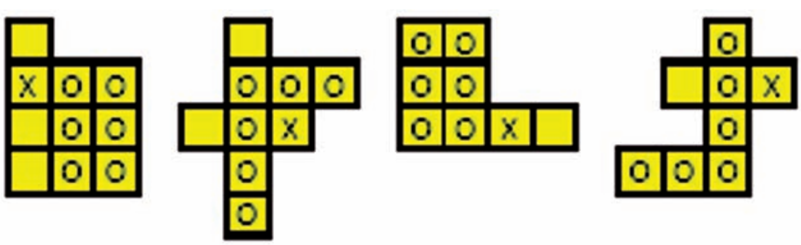


d) *La zorra y las gallinas*. Se puede utilizar el mismo tablero del solitario en cruz para jugar a este juego de dos jugadores. Hay trece fichas de un color (en la imagen rojas) que representan a los gansos y una ficha (negra) que representa a la zorra, colocadas como muestra la imagen. El objetivo del juego es para la zorra comerse a las gallinas y para las gallinas acorralar a la zorra. Los jugadores moverán las fichas de forma alternativa. La zorra puede moverse una casilla en cualquier dirección (horizontal, vertical o diagonal), se come a las gallinas saltando sobre ellas si la casilla siguiente está vacía (se elimina la ficha sobre la que se salta) y se puede efectuar "comidas" encadenadas como en las damas. La zorra gana si se come diez gallinas. Las gallinas solo pueden moverse una casilla en vertical o en horizontal y para acorralar a la zorra deben de inmovilizarla de forma que no pueda efectuar ningún movimiento, en cuyo caso ganan.

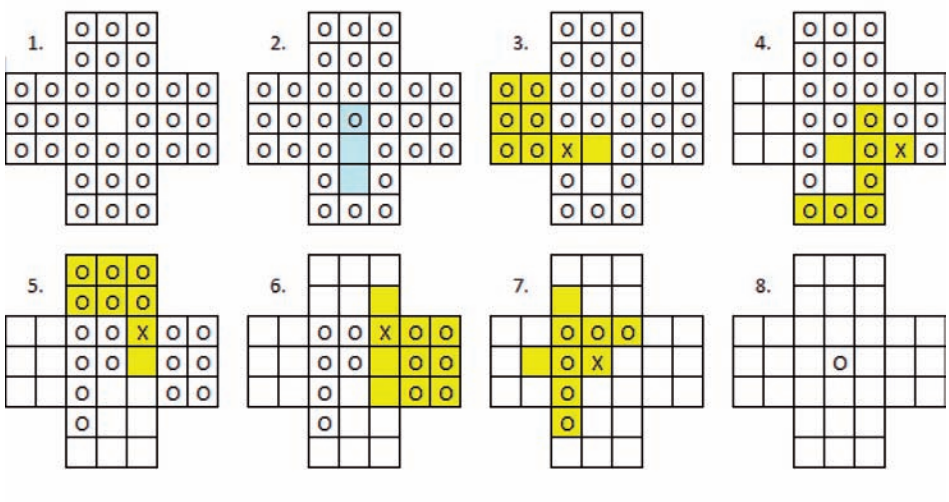


RESOLUCIÓN DEL JUEGO. Para resolver este juego lo ideal es empezar con diseños intermedios con menos fichas (como los que aparecen en la actividad 3) hasta que el jugador es capaz de afrontar la resolución del juego completo. Aquí mostramos una posible resolución del solitario.

Empezaremos por unos ejemplos en los que se parte de una posición inicial compuesta de fichas, huecos y una ficha que llamaremos "clave" en la que al final debe quedar una ficha en dicha posición y hacer desaparecer el resto de fichas. La posición de la ficha "clave" la denotaremos con X.



Utilizando esas cuatro jugadas como base, se puede resolver el solitario con las siguientes tableros como referencia a seguir.



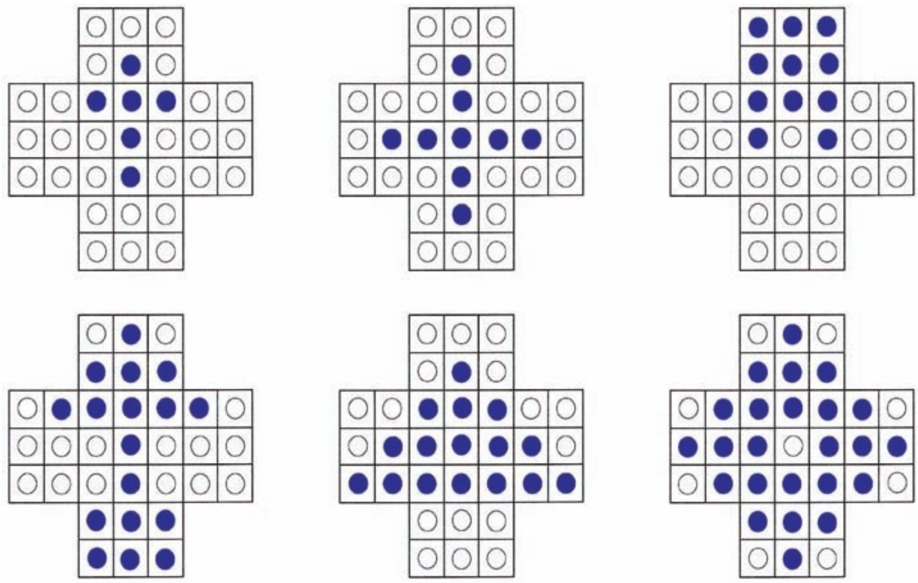
ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. Una actividad general para todas las edades puede ser la elaboración de un tablero y fichas para jugar al solitario en cruz, y también a los otros juegos que se comentan aquí. El profesorado y/o el personal de la biblioteca elegirá los materiales adaptados a las edades de los estudiantes (cartulinas,…).

Actividad 1 (a partir de 6 años). El juego del salto de la rana es un sencillo juego de estrategia, ideal para jugar con los estudiantes desde los primeros años de primaria.

Se les plantea inicialmente el juego para que intenten resolverlo por su cuenta (con los muy jóvenes quizás será mejor jugar al juego de siete casillas). Si lo resuelven por sí solos perfecto. En caso contrario se les ayuda diciéndoles que simplifiquen el problema, que primero jueguen a versiones más sencillas del juego para ir complicándolo. Primero con tres casillas, una ficha negra y una blanca. Después al juego de cinco casillas con dos fichas negras y dos blancas, así hasta que se den cuenta de la resolución general del juego.

Actividad 2 (a partir de 10 años). El juego de *La zorra y las gallinas* es un juego muy interesante para plantear a los estudiantes, siempre con esa doble finalidad de que sea un juego que les entretenga y a la vez que les plantee el reto de buscar estrategias ganadoras para ganar a su adversario.

Actividad 3 (a partir de 12 años). La siguiente actividad sería plantearles a los estudiantes la resolución del solitario en cruz. Para poder afrontar la resolución del solitario en cruz completo primero hay que enfrentarse a diseños más sencillos de fichas (esa es la solución que se aporta en el apartado de resolución del problema), por este motivo se les plantea a los estudiantes que resuelvan primero algunos diseños como los que se muestran a continuación.



Aquí se plantea resolver el problema mediante el método de simplificar el problema, el juego, y resolver primero lo más fácil para ir enfrentándose poco a poco a lo más difícil, que es el juego completo. Otra posibilidad para resolver el problema podría ser empezar por el final, es decir, suponer que el problema está resuelto e ir añadiendo las fichas que supuestamente nos habríamos comido.

MÁS INFORMACIÓN.

- www.sinewton.org/numeros/numeros/static/almacen_05.php
- El juego y la matemática, Luis Ferrero, La Muralla, 1991.
- Para jugar on line: www.mendoza.edu.ar/aninio/juegos/juego/solitario.htm
- Para descargarlo al ordenador: es.geocities.com/davidalonsogarcia/solitario.zip

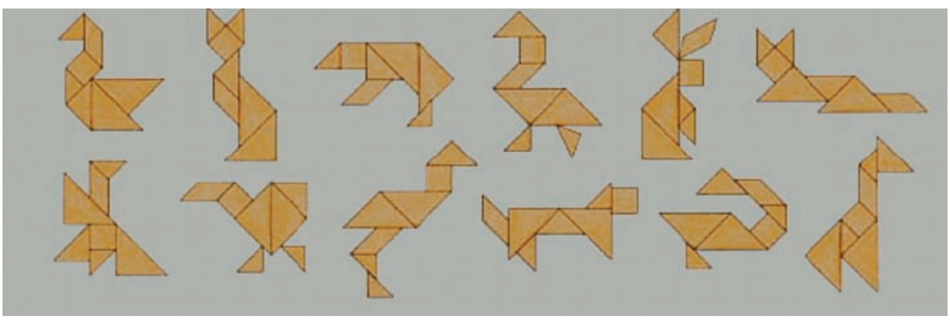
El Tangram

DESCRIPCIÓN. Es un juego de origen chino muy antiguo, consistente en formar siluetas de figuras con la totalidad de una serie de piezas dadas. Con las 7 piezas llamadas Tans, podemos formar un cuadrado, que suele ser la configuración inicial. Las piezas son:

- 5 triángulos de diferentes tamaños .
- 1 cuadrado.
- 1 paralelogramo romboide.

El Tangram es uno de esos puzzles maravillosos capaces de cautivar a la gente más diversa.

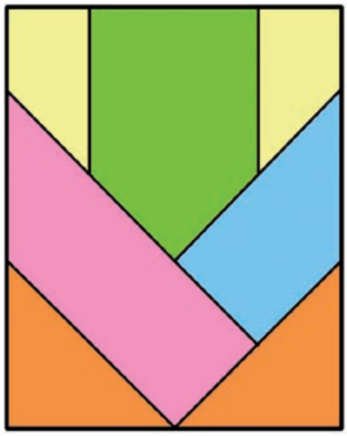
Las reglas clásicas del Tangram son muy sencillas: se trata de colocar las piezas del juego para obtener distintas configuraciones geométricas, letras, siluetas de animales, plantas, personas,… En principio en cada figura se han de utilizar las siete piezas, todas ellas han de descansar sobre un mismo plano y no se pueden superponer, además se tienen que tocar entre sí. Con estas reglas tan sencillas se pueden construir tantas figuras como nuestra imaginación nos permita. Aquí mostramos algunas de ellas.



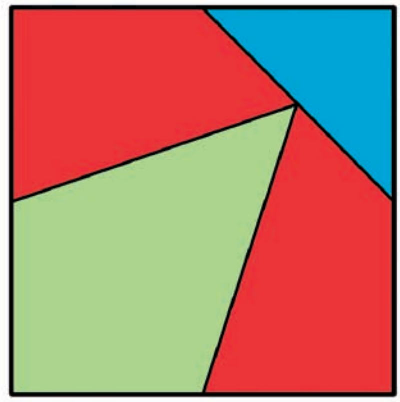
HISTORIA. Existen varias versiones sobre el origen de la palabra Tangram, una de las más aceptadas cuenta que la palabra la inventó un inglés uniendo el vocablo cantonés "tang" que significa chino con el vocablo latino "gram" que significa escrito o gráfico.

Cuenta la leyenda que un emperador chino mandó hacer una hoja de vidrio cuadrada, de grandes dimensiones. Durante el transporte, se cayó y se rompió en siete pedazos, al intentar reconstruir la pieza, los sirvientes comprobaron que se podían unir de muchas maneras, además de componer gran cantidad de figuras geométricas. Siguieron su camino hasta palacio y presentaron al emperador la hoja de vidrio hecha pedazos, mostrándole algunas de las configuraciones que se podían crear. Al emperador le entusiasmó el regalo. El puzzle se extendió por Europa y América principios del siglo XIX, fruto de las relaciones comerciales con China, y fue conocido como el rompecabezas chino.

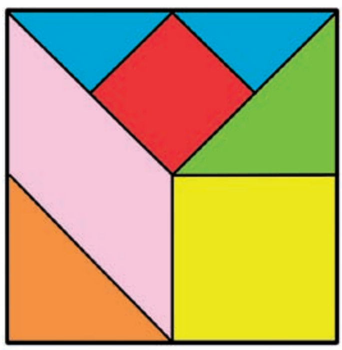
VARIANTES. Se conocen otros tipos de Tangrams, también muy interesantes, los más representativos son los siguientes:



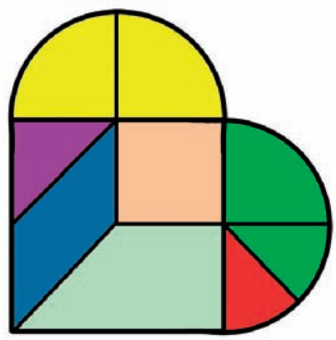
TANGRAM PITAGÓRICO



TANGRAM DE 4-PIEZAS



TANGRAM DE FLETCHER



TANGRAM CARDIODE

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. Hoy en día el Tangram no se usa sólo como un entretenimiento, se utiliza también en psicología, en educación física, en diseño, etc. En el área de enseñanza de las matemáticas el Tangram se utiliza para introducir conceptos de geometría y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de las personas, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación y consolidación de ideas abstractas.

Entre las muchas actividades que podemos realizar con el Tangram aquí se proponen, de manera general algunas de ellas: 1) Reconocer las distintas figuras que lo componen; 2) Reconocimiento de otras formas geométricas; 3) Reconocimiento de figuras simples en una figura más compleja; 4) Copiar contornos de figuras y rellenarlas con las figuras del Tangram; 5) Composición y descomposición de figuras geométricas; 6) Estudio de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad; 7) Clasificación de polígonos; 8) Construcción de polígonos convexos y cóncavos; 9) Desarrollar la noción de área; 10) Estudio de polígonos con áreas iguales o perímetros iguales; 11) Medir áreas, tomando como unidad el triángulo pequeño; 12) Ordenar las piezas por áreas; 13) Estudio de figuras con áreas equivalentes; 14) Estudio de fracciones; 15) Desarrollar la creatividad de cada alumno con la composición de figuras libres; 16) Comprobar el Teorema de Pitágoras; 17) Estudio de triángulos semejantes; 18) Introducción de 2.

Actividad 1. Tomando dos piezas cualesquiera del Tangram formar distintas figuras geométricas y clasificarlas. Realizar la misma actividad con tres piezas.

El objetivo de estas dos actividades es claro: jugar un poco con las piezas y reconocer las distintas configuraciones que vamos obteniendo. Esta actividad se puede realizar desde infantil hasta los primeros cursos de secundaria, el nivel de profundidad en cada caso será distinto. Evidentemente, la configuración de figuras a partir de tres piezas es más difícil y requiere de una reflexión y conocimientos más profundos.

Actividad 2. Con las siete piezas del Tangram construye un triángulo rectángulo.

Es una actividad interesante ya que a partir de ella se puede trabajar la noción de equivalencia, relacionándola con la actividad más clásica de construir un cuadrado con las siete piezas. Esta actividad se puede trabajar a partir del segundo ciclo de primaria.

Como un primer acercamiento a la actividad se pueden proponer otras más básicas, como las siguientes:

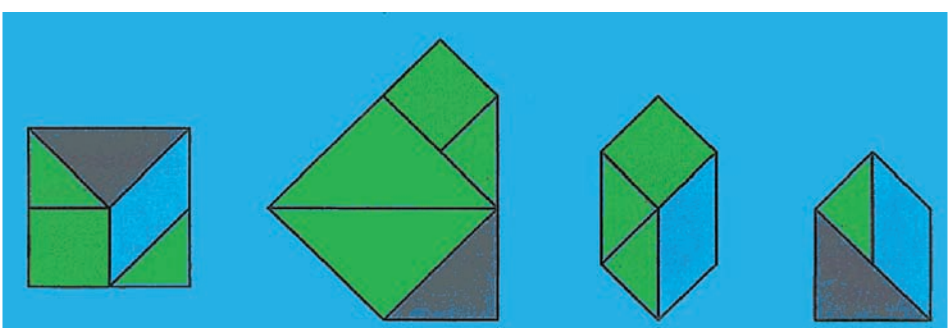
- Construir un cuadrado con dos piezas.
- Construir un triángulo rectángulo con dos piezas.
- Construir un paralelogramo con dos piezas.
- Construir un triángulo rectángulo con tres piezas.

Actividad 3. Con las siete piezas del Tangram construye todos los cuadriláteros posibles.

Al igual que la actividad anterior se trata de jugar con las siete figuras, en este caso para encontrar cuadriláteros diversos. Es conveniente realizar esta actividad a partir del segundo ciclo de primaria. Es una actividad de investigación.

Actividad 4. a) Si el cuadrado grande es la unidad de área, ¿qué fracción del cuadrado representa cada una de las siete piezas del Tangram?

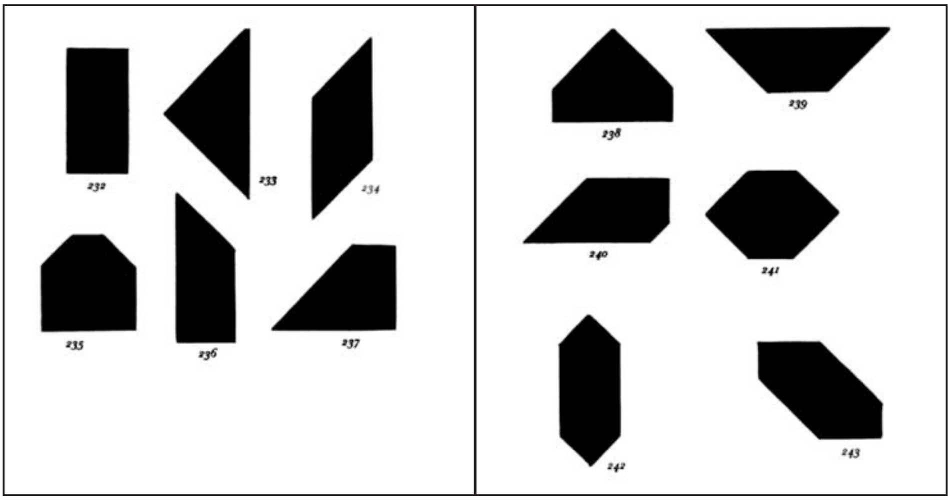
b) ¿Qué fracción del cuadrado es cada una de las siguientes figuras?



Esta actividad está pensada para los últimos años de primaria o los primeros de secundaria obligatoria, el objetivo de la misma es incidir en el concepto de fracción y trabajarlo en contextos geométricos.

Actividad 5. Con las siete piezas del Tangram construye todas las figuras convexas posibles.

Es una actividad muy interesante, que nos va a permitir distinguir una figura cóncava de una convexa. Como curiosidad, se sabe que el número máximo de figuras convexas que se pueden construir son 13, resultado que demostraron dos matemáticos chinos: Fu Tsiang Wang y Chuan-Chih Hsiung en 1942. En el siguiente dibujo se muestran doce de los polígonos convexos ya que el 13º es el cuadrado original.



Otras actividades. Otras actividades de investigación, como la anterior:

• Construir todos los rectángulos posibles utilizando solamente tres piezas del tangram.

• ¿Se puede hacer un rectángulo utilizando únicamente dos piezas del Tangram?

• ¿Es posible hacer un triángulo utilizando seis piezas del Tangram?

• Construir cuadriláteros utilizando cuatro piezas del Tangram.

• Utilizando todas las piezas del Tangram, intenta construir todos los pentágonos que puedas. ¿Cuántas soluciones hay?

MÁS INFORMACIÓN

- Jugar on line: www.redestudiantilpr.net/tangram1.htm

www.grandesjuegos.com/juego_swf.php?idjuego=381

- Para conseguir el tangram y variantes: www.uco.es/~ma1fegan/recursos-matematicos/Tangram/Tangram.pdf

- Actividades:

www.educarm.es/templates/portal/images/ficheros/etapasEducativas/secundaria/3/secciones/129/contenidos/4434/esomate10.pdf/

platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0607/3_eso/tangram/tangram.htm

Tantrix Discovery

DESCRIPCIÓN. El Tantrix Discovery está formado por 10 fichas hexagonales de color negro, numeradas del 1 al 10 en la cara inferior. En la cara superior de cada ficha hay tres líneas, cada una de un color distinto –amarillo, azul y rojo– y con tres posibles formas, rectas, curvas abiertas y curvas cerradas.

El objetivo del Tantrix Discovery es la construcción de circuitos cerrados. Se inicia el juego con las fichas 1, 2 y 3, y se construye un circuito de color amarillo (círculo). Se separan las fichas, se añade la ficha 4 y se realiza un circuito rojo con las cuatro fichas. El color del número de cada nueva ficha añadida, te indica el color del circuito a realizar. Hay que tener en cuenta que el circuito debe ser cerrado y que las conexiones del resto de colores también deben coincidir. A continuación se le añade la ficha 5 (roja) y así se sigue hasta la ficha 10. Con menos de 10 fichas solamente se pueden construir circuitos del color indicado (que pueden ser más de uno, por ejemplo, con ocho piezas hay 4 posibles diseños), pero con las 10 fichas se pueden construir circuitos de los tres colores. En el Tantrix se prefieren soluciones que no dejen huecos.

HISTORIA. Tantrix fue inventado por Mike McManaway, antiguo campeón de Backgammon de Nueva Zelanda, en 1991 y desde entonces se ha convertido en un juego muy popular y premiado alrededor del mundo.

VARIANTES.

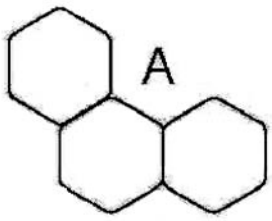
a) *Tantrix Game Pack*. El juego completo del Tantrix consta de 56 fichas, en las cuales se ha añadido también al diseño de caminos el color verde. Este juego permite una gran cantidad de solitarios con diferentes niveles de dificultad. Además el Juego Tantrix es un juego de estrategia para jugar entre 2 y 4 jugadores, en el que se va realizando un mosaico con las piezas hexagonales según ciertas reglas y tiene un sistema de puntuaciones.

b) *Trax*. Este es un juego de estrategia anterior al Tantrix, creado por el neozelandés David Smith en 1980, con fichas cuadradas y caminos de color blanco y rojo. Solo hay un diseño de fichas, con caminos rectos en cruz en un lado y caminos curvos que no se cruzan en el otro.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. El Tantrix es un juego divertido, útil, versátil y una excelente herramienta didáctica que permite trabajar aspectos como la lógica, el razonamiento, la geometría plana, la resolución de problemas, la imaginación,…

Actividad 1 (a partir de 5 años). Clasificación. a) Encuentra los cuatro tipos de fichas distintos que hay teniendo en cuenta la forma de sus líneas; b) ¿Cuántas fichas hay de cada tipo?; c) El número total de posibles fichas, si combinamos los colores, es 14. Encontrar y pintar sobre un papel los diseños de las fichas que faltan.

Actividad 2 (a partir de 5 años). Jugar. a) Los niños y niñas construirán de forma libre las formas o modelos que ellos quieran (caminos abiertos, circuitos cerrados, un corazón, "espaguetis" de caminos,…); b) Se les pone una posición inicial simple, por ejemplo un circuito cerrado monocolor de tres fichas (círculo) o de cuatro fichas (óvalo), y se les pide que lo continúen con todas las fichas; c) Se colocan tres fichas como aparece en el dibujo y se les pide que busquen una ficha que encaje en el espacio entre las tres (A), después de varios juegos se les pide que busquen una posición de tres fichas en las que sea imposible encajar la cuarta entre ellas.



Actividad 3 (a partir de 8 años). Construcción del juego. Materiales: cartulina, regla, compás, lápiz, cartón, tijeras, pinturas.

Primer paso, crear una plantilla hexagonal: trazamos sobre la cartulina una circunferencia de 5 cm de radio con el compás; marcamos un punto sobre la circunferencia en el que colocamos el compás manteniendo la medida anterior y marcamos dos puntos nuevos sobre la circunferencia, sobre los que hacemos lo mismo, consiguiendo así seis puntos, que unidos con el lápiz y la regla, nos darán el hexágono.

Segundo paso, construir las fichas: con nuestro modelo hexagonal vamos marcando hexágonos en el cartón y recortándolos.

Tercer paso, pintar las fichas: con las pinturas de color amarillo, rojo y azul pintar las fichas, arriba los caminos y abajo los números (podríamos aprovechar y hacer las 14 fichas del Tantrix mencionadas en la actividad 1).

Para niños y niñas pequeños (5 años) se les puede pasar directamente una cartulina con las formas hexagonales para que las corten ellos y luego las pinten.


1 (amarillo)


2 (amarillo)


3 (amarillo)


4 (rojo)


5 (rojo)


6 (azul)


7 (azul)


8 (azul)


9 (amarillo)


10 (rojo)


11 (rojo)


12 (amarillo)

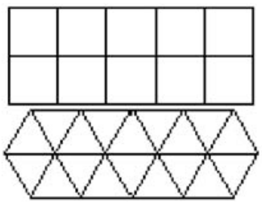

13 (azul)

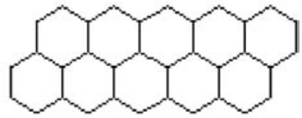

14 (azul)

[En la versión Discovery de 10 piezas la pieza 7 es roja y la 10 azul]

Actividad 4 (a partir de 8 años). **Simetrías**. Sería interesante que se les hablase a los alumnos y alumnas de las simetrías (traslación, rotación y reflexión). Con el juego, se les pide a los estudiantes que consideren los caminos abiertos o circuitos cerrados que hayan realizado, o que realicen nuevos diseños, y que digan cuáles de ellos son simétricos, y en tales casos si la simetría es una rotación (¿de qué ángulo?) o una reflexión (¿cuáles son los ejes de la simetría?).

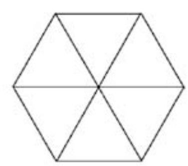
Actividad 5 (a partir de 10 años). **Embaldosados**. Hablar a los niños y niñas de los polígonos regulares. Además sería interesante mostrarles cómo forman parte de nuestra vida cotidiana.





A continuación, preguntar a los alumnos que digan posibles formas para las losetas (con forma de polígono regular y todas ellas de igual tamaño) para embaldosar un suelo (se supone que es muy grande para no tener problema con las paredes, o como dicen los matemáticos que se extiende hasta el infinito), de forma que las losetas se pegan lado con lado. Seguramente mencionarán los triángulos y los cuadrados, ya que forman parte de nuestra vida cotidiana y quizás algunos mencionen los hexágonos, aunque si no es así se les dará como pista los panales de las abejas. Se puede jugar con los estudiantes a que busquen estos embaldosados en su entorno.

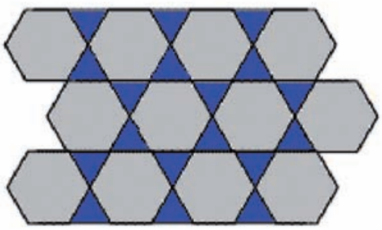
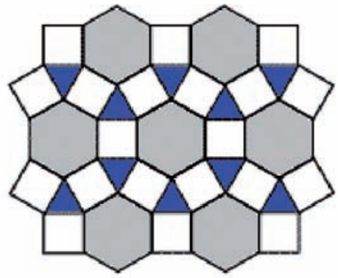
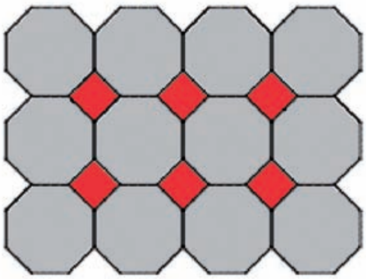
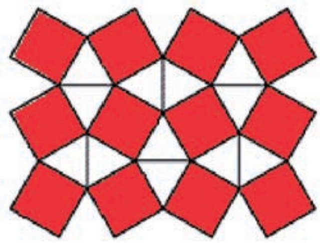
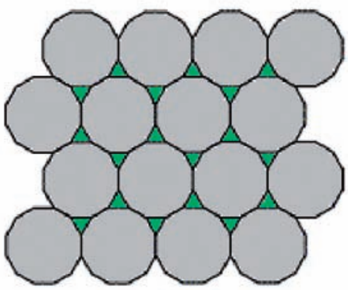
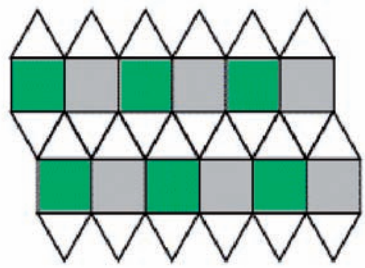
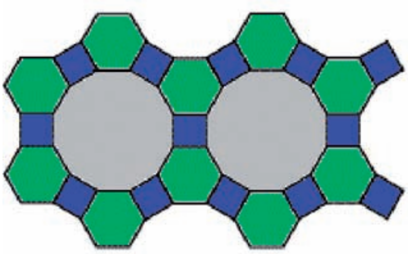
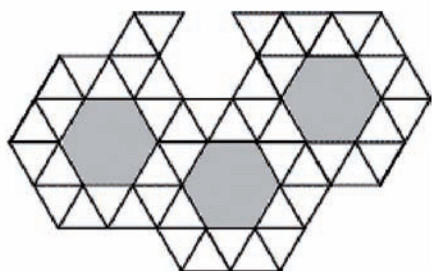
Pero ¿hay más formas posibles para las losetas? Las matemáticas pueden demostrar que no es así:



a) los ángulos interiores de un polígono regular miden (n-2)x180°/n grados (esto se puede explicar a los estudiantes utilizando simplemente que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° y que un polígono regular de n lados se puede dividir en n triángulos), luego los ángulos del triángulo equilátero miden 60°, del cuadrado 90°, del pentágono 108°, del hexágono 120°,…;

b) en cada vértice del mosaico confluyen el mismo número de polígonos regulares, pero además la suma de los ángulos que confluyen a ese vértice es 360°, en consecuencia dividiendo 360° por el número de polígonos regulares que confluyen al vértice podemos obtener cuánto miden los ángulos del polígono regular, así… 360°/2=180° (que no nos da ningún polígono), 360°/3=120° (hexágono; efectivamente podemos ver en la imagen del mosaico hexagonal que alrededor de cada vértice hay tres hexágonos), 360°/4=90° (cuadrado; hay cuatro cuadrados alrededor de cada vértice), 360°/5=72° (no hay polígono), 360°/6=60° (triángulo; hay seis triángulos alrededor de cada vértice), y no hay más posibilidades, ya que no hay polígonos con menos de 60°.

Para los estudiantes más interesados se les puede plantear la siguiente cuestión: ¿qué combinaciones de polígonos regulares de diferente número de lados pueden recubrir el plano (manteniendo la condición de que alrededor de cada vértice del embaldosado la figura del vértice es la misma)? Puede incluso demostrarse, con el mismo argumento de la suma de los ángulos alrededor de un vértice, que hay solamente ocho posibles, y además se pueden calcular fácilmente.

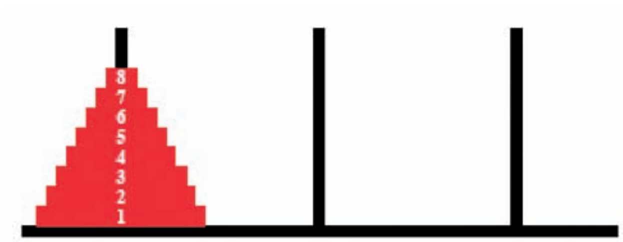
MÁS INFORMACIÓN

www.tantrix.com.es

Las Torres de Hanoi

DESCRIPCIÓN. El juego consiste en una torre formada por un conjunto de discos -lo más común es que sean ocho- insertados en una varilla y colocados en forma de pirámide (cada disco es de mayor tamaño que su inmediato superior). El objetivo es transferir la torre completa a otra varilla, utilizando una tercera varilla auxiliar, moviendo sólo un disco cada vez y nunca colocando uno más grande sobre otro más pequeño.

HISTORIA. El puzzle llamado la torre de Hanoi fue inventado por el matemático francés Édouard Lucas en 1883, quien, a efectos publicitarios, inventó la siguiente leyenda:



La torre de Brahma en el gran templo de Benarés tiene un poste en el que Dios ensartó, el día de la creación, 64 discos dorados colocados en orden decreciente de tamaño. Estos discos deben moverse, uno por uno, por los monjes del templo a otro poste, con la ayuda de un tercer poste, de modo que nunca un disco de mayor tamaño esté colocado sobre otro de menor tamaño. Se decía que en el momento en que se lograra la trasposición, el templo se derrumbaría y la tierra desaparecería.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. El juego ilustra muy bien el método iterativo de resolución. Se observará que el método de solución no depende del número de discos pero aumenta exponencialmente el número de pasos necesarios.

Solución recursiva. Indicaremos las tres varillas con los símbolos F (fuente), A (auxiliar) y D (destino). Para entender y apreciar mejor la siguiente solución debes tratar de resolver el puzzle para un pequeño número de discos, digamos 2, 3 y quizá 4. Al resolver el problema, antes o después el disco inferior tendrá que moverse de F a D. En este momento, el resto de los discos están apilados en orden descendente de tamaños en A. En este momento, el problema se repite con un disco menos, pasando F a ser la varilla auxiliar y A la varilla fuente. De este modo, dado un número N de discos, el problema estará resuelto si sabemos cómo realizar las siguientes tareas:

1. Mover los N-1 discos superiores de F a A (usando D como varilla auxiliar).
2. Mover los discos inferiores de F a D.
3. Mover N-1 discos de A a D (usando F como varilla auxiliar).

Con esta idea en mente, todos los movimientos son prácticamente obligados. Veamos cuáles son en los dos únicos casos posibles:

Si el número de discos es impar, el primer movimiento es colocar el disco más pequeño en la varilla de destino, el segundo en la varilla auxiliar, el pequeño sobre el segundo, el tercero sobre la de destino, el pequeño sobre el origen, el segundo sobre el tercero, el pequeño sobre el segundo, y así sucesivamente (observar que la secuencia anterior resuelve el problema con tres discos).

Si el número de discos es par, lo único que cambia es que el disco pequeño empieza colocándose en la varilla auxiliar. El resto de movimientos es similar al caso anterior.

Una versión simplificada del juego consiste en no determinar explícitamente la varilla de destino. Basta pasar los discos de una varilla a otra cualquiera, utilizando la tercera como auxiliar. En este caso, no hay que distinguir si el número de discos es par o impar.

VARIANTES.

a) Una variante del juego consiste en la llamada *Torre de Siva-Vishnú*. Se numeran las piezas de mayor a menor y se colocan las impares en una varilla y las pares en otra. Se trata de intercambiar las piezas de lugar, conservando las mismas reglas del juego original.

Se puede empezar el juego utilizando sólo cuatro piezas, como en la figura:

b) Otra variante es la *Torre de la Sagrada Trinidad*, con 9 discos. En una varilla se colocan los discos 1-4-7, en otra varilla los discos 2-5-8 y en la tercera los discos 3-6-9. Al final, los discos de la izquierda deben quedar en el centro, los del centro a la derecha y los de la derecha a la izquierda.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. Al conocerse el método de resolución del juego, se observa que la dificultad no aumenta al añadir más discos. Proponemos las siguientes actividades para que los alumnos puedan conocer algunas características de este puzzle.

Actividad 1 (para mayores de 8 años). Construir el puzzle. Puede hacerse de varias maneras, apilando un conjunto de monedas de distintos tamaños y, sin necesidad de varillas, ir trasladándolas desde una posición hasta otra. O bien, con cartulina o cartón, recortando círculos de distintos diámetros.

Actividad 2 (para mayores de 10 años). Resolver el puzzle utilizando dos piezas y contar el número de pasos necesarios. Después resolverlo añadiendo sucesivamente una pieza más anotando también el número de pasos que se necesitan en cada caso. ¿Se puede observar alguna relación entre dichos valores?

La respuesta es la siguiente: si llamamos T_N al número de movimientos necesarios para resolver el puzzle con N discos, es fácil comprobar que

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 7 \text{ y } T4 = 15.$$

$$\text{En general, } T_N = 2^{N-1}, \text{ para } N > 1.$$

Actividad 3 (para mayores de 12 años). Una vez obtenida la fórmula anterior, se puede plantear la siguiente cuestión: si se mueve un disco por segundo, ¿cuánto tiempo se necesitaría para resolver el puzzle?

La respuesta, que puede resultar sorprendente, es que, con 8 discos, se necesitan algo más de 4 minutos pero con 64 discos se necesitan 585 billones de años. Esto explica la leyenda inicial sobre el tiempo necesario para completar el desafío de la torre de Brahma.

Actividad 4 (para mayores de 12 años). ¿En qué momento se mueve por primera vez (y veces sucesivas) cada una de las piezas?

La respuesta es que la pieza menor se moverá en todos los movimientos impares, la segunda pieza más pequeña se moverá en los pasos 4, 12, 20, 28, ... En general, la pieza n-ésima (donde 1 es la menor) se mueve por primera vez en el paso 2^{n-1} y luego cada 2^n movimientos.

Actividad 5 (para mayores de 12 años). ¿Cuál es la secuencia individual de movimientos de cada disco?

En este caso, se puede observar que cada pieza sigue un patrón circular, recorre las tres varillas en un orden determinado y luego vuelve a repetir el mismo proceso.

Actividad 6 (para mayores de 12 años). Jugar a las variantes descritas anteriormente, la torre de Siva-Vishnú y la torre de la Sagrada Trinidad.

MÁS INFORMACIÓN. Este puzzle es bien conocido entre los estudiantes de computación porque aparece en prácticamente todo texto introductorio sobre estructuras de datos o algoritmos. Su solución involucra dos importantes tópicos, como son "funciones recursivas y apilamientos" y "relaciones de recurrencia".

- Para jugar on-line a las Torres de Hanoi:

members.shaw.ca/orionx/th/Hanoi.html?English

Tres en Raya

DESCRIPCIÓN. Se trata de un juego donde intervienen dos jugadores y el tablero consiste simplemente en un cuadrado de tamaño 3 x 3, que se puede dibujar en una hoja de papel. Cada jugador dispone de un conjunto de fichas del mismo color, por ejemplo blancas para el primer jugador y negras para el segundo (en un papel, cada jugador utilizará un símbolo distinto, como cruces y círculos). Las reglas básicas son las siguientes:

1. Las jugadas son alternas, efectuándose por sorteo para empezar.
2. El jugador que inicia la partida coloca su primera ficha en cualquier lugar del tablero. A continuación el segundo jugador coloca una de sus fichas en cualquier cuadro libre.
3. El juego continúa de la misma forma, colocando cada jugador una ficha en un cuadro vacío, hasta que uno de ellos consiga que tres de sus fichas estén en la misma línea, ya sea fila, columna o diagonal.

Evidentemente, la estrategia ganadora consiste en lograr colocar las fichas en línea a la vez que impedir que lo haga el contrario.

HISTORIA. Se cree que el juego se originó en China, y es una variante sencilla del Go, el juego de estrategia considerado más antiguo del mundo, pero conocido en Europa sólo a principios del siglo pasado.

En los países de habla inglesa recibe el nombre de Tic-tac-toe. La popularidad de este juego se basa en la simplicidad de sus reglas y el hecho de poder jugarse en cualquier circunstancia.

RESOLUCIÓN DEL JUEGO. Si ambos jugadores eligen la estrategia correcta, el juego terminará en empate. Por tanto, es fundamental elegir cada vez la jugada correcta y detectar el error del contrario. En vez de una estrategia ganadora, vamos a determinar la forma de no perder la partida.

Veamos los dos casos posibles:

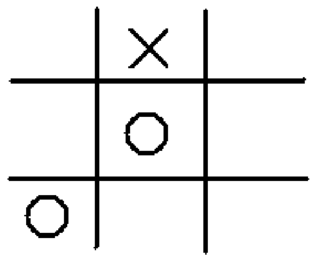
1. El jugador que empieza jugando coloca su ficha en el centro del tablero. El segundo jugador tiene dos opciones:

• Si coloca su primera ficha en una de las esquinas, el primer jugador puede intentar ganar colocando su segunda ficha en el cuadro central de la fila o columna opuesta a la que contiene la última ficha colocada. Tendríamos la situación mostrada en la figura adjunta:

X		
	O	
	O	

El resto de jugadas vienen obligadas para evitar perder la partida. Cualquier error de un jugador puede aprovecharse para ganar.

• Si coloca su primera ficha en el cuadro central de alguna fila o columna, el primer jugador ganará la partida colocando su segunda ficha en el extremo de la fila o columna opuesta a la que contiene la ficha colocada por el segundo jugador. En este momento, la situación es la contenida en la figura adjunta:



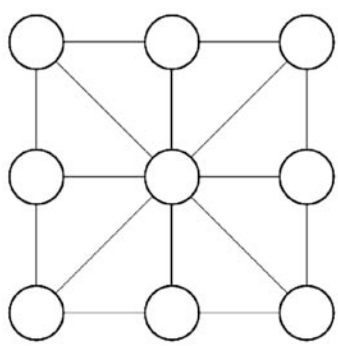
El segundo jugador no podrá evitar perder la partida en una o dos jugadas.

2. El primer jugador coloca su primera ficha fuera del centro del tablero. Entonces no podrá ganar la partida a no ser que el contrario cometa un error. Basta que el segundo jugador coloque su primera ficha en el centro del tablero y tape todas las opciones de tres en raya que se presenten.

En resumen y salvo un despiste de algún jugador, el primer jugador sólo podrá ganar la partida si coloca su primera ficha en el centro; el segundo jugador podrá lograr el empate si coloca su primera ficha en una de las esquinas del tablero.

VARIANTES.

a) *Tres en raya de tres fichas*. El tablero es el mismo, pero cada jugador dispone sólo de tres fichas. Se van colocando por turnos con la idea de conseguir tres en una misma línea.



Tras ello, y esta es la diferencia con la variante clásica, está permitido desplazar cualquier ficha propia a una posición contigua libre, recorriendo cualquiera de las líneas de la figura. Se trata de encontrar una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

b) *Cuatro en raya*. Una versión comercial muy extendida es el juego llamado "ConectaCuatro", donde los jugadores van colocando sus fichas en un tablero vertical. Las fichas se apoyan unas sobre otras de modo que no hay libertad de colocar las fichas en cualquier lugar del tablero. La estrategia ganadora es por ello más difícil de determinar.

c) *Cinco en raya*. En una hoja de papel cuadriculada puede jugarse a las cinco en raya. Con las mismas reglas del juego original pero sin limitaciones sobre el tamaño del tablero, la partida puede prolongarse si los jugadores son suficientemente expertos.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS. Debido a la sencillez de las reglas, es importante no cometer errores durante el juego. En cada situación, debe estudiarse sobre todo el movimiento que evite perder la partida.

Actividad 1 (para mayores de 8 años). Generalmente, el jugador que va primero tiene mayores posibilidades de ganar porque existen nueve casillas. De las mismas, 5 pueden significar ganar (la casilla central y las cuatro esquinas), mientras que el segundo jugador solo tiene 4. Sin embargo, cuando dos expertos juegan este juego, siguiendo las instrucciones mencionadas arriba, ninguno ganará. El juego terminará en un empate.

Se propone que los alumnos jueguen sucesivas veces y analicen cada situación y el resultado final de cada partida. Se pretende que ellos mismos descubran la mejor estrategia, tanto si son los primeros como si son los segundos en realizar su primera jugada.

Un primer detalle que pueden observar desde una edad temprana es la simetría de la figura. Por tanto, muchas posiciones aparentemente distintas son, en realidad, las mismas. Se insistirá en que descubran dichas simetrías.

Actividad 2 (para mayores de 10 años). Después de varias partidas, se puede plantear un análisis completo del juego que determine todas las posibilidades seleccionando las jugadas válidas y las equivocadas.

Actividad 3 (para mayores de 10 años). Estudiar el juego de las tres en raya con tres fichas. Para ello, dibujar en una hoja de papel la figura correspondiente y proporcionar a cada jugador tres fichas iguales. Comprobar si hay alguna estrategia ganadora para alguno de los jugadores. Analizar diferentes posibilidades para el comienzo del juego. Tratar de deducir que una buena estrategia consiste en conseguir el centro del tablero.

Actividad 4 (para mayores de 12 años). Jugar a la variante de las cinco en raya. Para ello, basta una hoja de papel cuadriculada. Cada jugador dibujará un símbolo identificativo en un vértice del cuadriculado. Se observará que este caso no es fácil de analizar. Sin embargo, debido a la gran cantidad de posibilidades, dos jugadores atentos pueden descubrir varias estrategias ganadoras.

MÁS INFORMACIÓN.

- Mucha información sobre el juego puede encontrarse en la página
es.wikipedia.org/wiki/Tres_en_raya.

- Para jugar online al "Conecta4" en
www.aprendejugando.com/juegos/conecta4/index.htm

- Una versión sencilla del "Cinco en raya" se puede jugar en
www.yupis.es/juego-YSyp/

Real Sociedad
Matemática Española