PRINCIPIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

NOTA DEL SR. G. PEANO

profesor de la Universidad de Turín

Ya Leibnitz (1) enunció algunas analogías entre las operaciones del álgebra y las de la lógica. Pero sólo en este siglo, por las investigaciones de Boole, Schröder y otros varios (2), se estudiaron estas relaciones, por las que la lógica deductiva ha llegado á ser, como el álgebra ordinaria, la teoría de los cuaternios (3), etc., una parte del cálculo de las operaciones.

Uno de los resultados más notables que se han obtenido es que con un número limitadísimo de signos, se pueden expresar todas las relaciones lógicas imaginables; de este modo, sirviéndose de los signos para representar las entidades del álgebra ó de la geometría, se pueden expresar todas las proposiciones de estas ciencias (4).

---

(1) Leibnitz se ocupó varias veces de esta cuestión. He aquí algunas frases de la *Dissertatio de Arte combinatoria*, Lipsiae, 1666, N. 90: «Verum constituitis tabulis vel prædicamentis, artis nostræ complicatoriæ majora emergunt. Nam termini primi, ex quorum complexu omnes alii constituuntur signentur notis, hæ notæ erunt quasi alphabetum..... Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura hæc universalis aeque erit facilis quam communis, et quæ possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio.»

(2) La obra principal de Boole tiene por título: *An investigatiou of the laws of thought*. London, 1854 p. 424. Este libro, raro en Italia, se encuentra en la biblioteca V. E. de Roma.

El último trabajo de Schröder es *El Algebra de la lógica*, Leipzig 1890, del que se ha publicado el primer tomo de 720 páginas. Me refiero á esta obra para las numerosas citas, limitándome, para los lectores italianos, á citar mi *Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva*, Torino 1888, y la notable memoria: NAGY, *Fondamenti del Calcolo Logico* Giorn. di Matemat., t. XXVIII.

(3) La analogía entre el cálculo de la lógica y el de los cuaternios está en que los símbolos de ambas ciencias satisfacen á leyes especiales análogas, si bien no idénticas, á las del álgebra ordinaria.

Creo oportuno transcribir las palabras de Tait (*Quaternions*, I, traduit par Plarr, Paris 1882, página 81).

«Las propiedades de los símbolos que se refieren á los cuaternios nos recuerdan los símbolos selectivos de la lógica, tales como se ofrecen en el admirable tratado de Boole: *Oh the laws of thought*. La semejanza marcada de los dos sistemas de símbolos, tipos de procedimientos que son en el fondo los mismos, nos sugiere la observación de que, después de todo, no hay más que una sola ciencia en el Análisis matemático que tiene diversas ramas, pero que emplea en todas los mismos procedimientos. Por la una de sus ramas, esta ciencia nos despliega los misterios de la geometría de posición, fuera del alcance del razonamiento geométrico ordinario, por la otra, permite al lógico llegar á verdades de deducción á las que no había podido llegar jamás sin el recurso del empleo de las fórmulas.

(4) Llegué á este resultado en mi opúsculo:

Aritmetices principia, nova methodo exposita, Torino 1889.

Continué las aplicaciones de estos métodos en las Notas:

I principii di Geometria, logicamente esposti, Torino, 1889.—*Les propositions du cinquième*

En la presente Nota expongo sumariamente tales teorías, con el propósito de iniciar al lector en este género de estudios interesantes y de prepararme un instrumento casi indispensable en las investigaciones sucesivas.

§ 1. *Deducción y conjunción.*

En este § las letras a, b,.... indican proposiciones cualesquiera.

La expresión $a \supset b$ significa «de la a se deduce la b» y se puede leer: «si es cierta la a, es cierta la b» ó bien «si a entonces b» y también bajo otra forma (1).

La expresión $a=b$ significa que las proposiciones a y b son equivalentes, ó sea que de la primera se deduce la segunda y viceversa.

La afirmación simultánea de varias proposiciones a, b, c,..... se indicará escribiéndolas unas después de otras abc... Esta afirmación simultánea llámase *conjunción* ó *multiplicación lógica*. Se tiene:

1. $ab=ba$. 2. $(ab)\,c=a\,(bc)=abc$.

Estas identidades expresan las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación lógica, análogas á las de la multiplicación algébrica.

3. $aa=a$.

Esta propiedad no tiene su análoga en álgebra (2).

Para separar las varias proposiciones entre sí, podremos servirnos de los paréntesis, como en álgebra. Se llega al mismo resultado con más sencillez, y sin producir equívoco, con los paréntesis en las fórmulas algébricas, con una notación conveniente. Los signos de la notación son . : .·. :: .·.·. etc. Para leer una fórmula dividida con puntos, primero se unirán todos los signos no separados por puntos, después

---

livre d'Euclide, reduites en formules (Mathesis, t. X).—*Demostration de l'integrabtlité des ecuations diferentielles ordinaires* (Mathem Annalen. t. XXXVII. Resulta así que la cuestión propuesta por Leibnitz se halla completa, si bien todavía no perfectamente resuelta.

(1) Para indicar que la proposición b es consecuencia de la a, se podrá escribir «b C a» donde el signo C es la inicial de la palabra *consecuencia*. Y se puede además convenir en indicar la misma relación cambiando los dos miembros, é invirtiendo el signo C, análogamente ó como se hace con los signo $>$ y $<$; de modo que la misma proposición se podrá escribir «$a \supset b$», que significa siempre «b es consecuencia de a» ó sea «a tiene por consecuencia b» ó bien «de a se deduce b».

Al signo de deducción se han dado formas muy diversas.

Muchos autores ingleses escriben .·.

C. S. PEIRCE (*On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics, III, p. 15) escribe $-\!\!<$.

SCHRÖDER (Op. cit.) adopta un signo derivado de los dos $=$ y $<$.

M. C. Coll *The Calculus of Equivalent Statements*, Proceedings of the London mathem. Society, vol. X, p. 16) escribe $a : b$. *en*.

(2) La ley representada por esta fórmula fué llamada por Jevons *The law of simp principles of science*, London 1883).

los separados por 1, después los separados por 2, y así sucesivamente [1].

Se tiene

4. $a = b . = . b = a.$

«La proposición $a = b$ equivale á la $b = a$.»

5. $a = b . = : a \supset b . b \supset a.$

«Dos proposiciones a y b son equivalentes, cuando de la primera se deduce la segunda y viceversa.»

Las fórmulas siguientes representan varias especies de *silogismos:*

6. $a \supset b . b \supset c : \supset a \supset c.$ 7. $a = b . b \supset c : \supset . a \supset c$

8. $a \supset b . b = c : \supset . a \supset c.$ 9. $a = b . b = c : \supset . a = c.$

El *sorites* tiene la forma

10. $a \supset b . b \supset c . c \supset d : \supset . a \supset d.$

Se tiene

11. $a \supset b . \supset ac \supset bc.$ 12. $a = b . \supset . ac = bc.$

13. $a \supset b . c \supset d : \supset . ac \supset bd.$ 14. $a = b . c = d : \supset ac = bd.$

Estas fórmulas indican que á los dos miembros de una deducción ó de una igualdad lógica se puede unir una misma proposición; y que dos deducciones ó dos igualdades, pueden unirse entre sí miembro á miembro.

§ 2. — *Proposiciones singulares; Clases.*

Los nombres que adoptaremos representan, ya individuos (nombres propios), como 1, 2, $\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$, ...; ya clases (nombres comunes ó adjetivos), como *número, polígono, equilátero*, etc.

La escritura $a = b$ donde a y b son individuos, indica su identidad, ó bien que a y b son dos nombres dados á un mismo individuo. Si a y b son clases, aquella escritura indica que las dos clases coinciden, ó sea, que todo a es b, y viceversa. Ya se ha explicado el significado de aquella escritura, si a y b son proposiciones.

Para indicar la proposición singular «x es un individuo de la clase s», escribiremos [2]

$$x \varepsilon s,$$

y el signo ε se podrá leer *es*, ó *es un*, ó *fué*, ó *será* conforme con las reglas gramaticales; sin embargo, su significado es siempre el explicado.

(1) Así se escribe $d. uv$ y $du. v$ en lugar de $d\,(uv)$ y $(du)v$. Esta notación ofrece alguna analogía con las notaciones propuestas por Leibnitz (*Math. Schriften*, III, p. 286, y VII, p. 55).

(2) El signo ε es inicial de ἐστί

Por brevedad escribiremos $x, y, z \varepsilon s$ para indicar que x, y, z son de las s, ó sea

$$x, y, z \varepsilon s = : x \varepsilon s . y \varepsilon s . z \varepsilon s.$$

Para indicar la proposición universal «todo a es b», ó sea «la clase a está contenida en la b», escribiremos $a \supset b$. De aquí el signo $\supset$ se leerá diversamente *(se deduce* ó *está contenido)*, según que esté entre las dos proposiciones ó entre las dos clases; sin embargo, sus propiedades son las mismas en ambos casos.

Siendo a y b dos clases, con ab indicaremos el conjunto de las entidades que son al mismo tiempo a y b, esto es, la máxima clase contenida en a y en b. Análogamente por abc, etc. Sin embargo, si se corre riesgo de equívoco, se escribirá $a \frown b$ y $a \frown b \frown c$ en lugar de ab y de abc.

Subsisten todas las fórmulas del § precedente cuando $a, b, \ldots$ representan clases.

Como ejercicio pueden reducirse al lenguaje ordinario las proposiciones:

$5 = 2 + 3$; 5ε (número primo); $4 =$ (máximo común divisor de 8 y 12); 4ε (divisor de 12); (triángulo) $\supset$ (polígono); (triángulo equiángulo) $=$ (triángulo equilátero); (múltiplo de 6) $=$ (múltiplo de 2) $\frown$ (múltiplo de 3);

y á símbolos las proposiciones:

Los múltiplos de 6 *son* números pares; el cubo de 2 *es* 8; los números pares *son* los múltiplos de 2; entre los números cúbicos *está contenido* el 27.

§ 3. — *Aplicaciones.*

Los signos introducidos $\varepsilon, =, \supset$ permiten ya expresar un gran número de relaciones lógicas. Así, introducidos los símbolos para indicar los individuos, las clases las operaciones y las relaciones de una ciencia, estamos en disposición de enunciar completamente las proposiciones. Tomaremos, por ejemplo, el álgebra donde ya existen los símbolos 1, 2, ... para representar los individuos, $+, -, \times$, etc. para las operaciones, $>, <, =, \ldots$ para las relaciones, é introduciremos signos para representar las clases que más frecuentemente se presentan. Escribiremos:

N en vez de número entero positivo,

R » » racional positivo,

Q » » real positivo ó cantidad positiva,

n en vez de número entero,
r » » racional,
q » » ó cantidad real, que diremos *número*.

La ventaja de estos símbolos no estriba sólo en la brevedad, sino además en su significación exacta, y en poder introducirlos en las fórmulas. Se tiene:

$$1. \; a, b \,\varepsilon\, q . \supset . a+b \,\varepsilon\, q.$$

«Si a y b son dos cantidades, también $a+b$ es una cantidad determinada».

2. $$a, b \,\varepsilon\, q . b \gtrless 0 : \supset . \frac{a}{b} \,\varepsilon\, q$$

«Siendo a y b dos cantidades, de las que la segunda no es cero, $\frac{a}{b}$ representa una cantidad determinada y finita».

3. $$a, b \,\varepsilon\, q . \supset . a \times b = b \times a$$

«Indicando con a y b dos números, se tiene etc.»

4. $$m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . a \,\varepsilon\, q : \supset . a^{m+n} = a^m a^n$$

«Representando m y n dos números enteros y positivos, y a un número real, se tiene etc.»

5. $$m, n \,\varepsilon\, q . a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset . a^{m+n} = a^m a^n$$

«Siendo m y n dos números reales, y a un número positivo, se tiene etc.»

De un modo análogo se enuncian todas las entidades del Algebra.

6. $$x, b, c \,\varepsilon\, q . a > b : \supset . a+c < b+c.$$

7. $$m . n \;\; \mathrm{Q} . m > \varepsilon n : \supset . \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Análogamente se enuncian las deducciones de una relación de otra.

8. $$a, b, x, y \,\varepsilon\, q . \supset .\therefore x+y=a . x-y=b : = : 2x=a+b . 2y=a+b$$

«Siendo a b, x y, números, el sistema de ecuaciones

$$x+y=a \text{ y } x-y=b.$$

es equivalente al sistema

$$2x=a+b, \; 2y=a-b.»$$

9. $$x, y \,\varepsilon\, q . \supset .\therefore x^2+y^2 = o, = x = o . y = o$$

«Siendo x, y números (reales), x^2+y^2 es nulo, cuando, y solo cuando se anulan al mismo tiempo x ó y».

De un modo análogo se expresarán las relaciones entre ecuaciones y propciciones.

(Se concluirá.)