MANUEL VALDIVIA UREÑA

Catedrático de Análisis Matemático

EN TORNO A LAS MATEMÁTICAS

DISCURSO LEÍDO EN LA SOLEMNE APERTURA DEL CURSO 1986 - 1987

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
SERVICIO DE PUBLICACIONES

DEPÓSITO LEGAL: V - 1918 - 1986
SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Excmo. y Mgco. Sr. Rector;
Excmos. e Ilmos. Señores;
Señores Claustrales;
Señoras y Señores:

La cortesía del matemático es la claridad, la comunicación diáfana. No obstante, cuando un científico tiene que hacer una exposición relacionada con la materia a la cual se dedica, y en el público al que se dirige hay personas cuyos campos de interés son muy diversos, el ser cortés, es decir, el ser claro, puede encontrar enormes dificultades. Yo, como matemático, tengo la obligación de hablar de matemáticas, pero, dada la naturaleza del acto que celebramos, voy a evitar en lo posible los tecnicismos. Por otra parte, he seleccionado para esta ocasión aspectos que, a mi juicio, tienen un interés que trasciende los límites de la ciencia a la que me dedico. Sirva de ejemplo la teoría de conjuntos que ha motivado que la lógica, estancada durante siglos, haya tenido un desarrollo espectacular en lo que va del siglo XX.

Debo decir que la matemática es, además de una ciencia, un arte, y encierra un tipo de belleza de la que participa también la poesía. El poeta alemán Novalis afirmaba: «el álgebra es poesía». Las siguientes palabras son del filósofo y matemático inglés Bertrand Russell: «el verdadero espíritu de alegría, de exaltación, el sentimiento de ser más que un hombre, que forman la piedra de toque de la excelencia más elevada, se hallan tanto en la matemática como en la poesía». Hay una carta, fechada el 29 de febrero de 1932, del gran poeta francés Paul Valery, dirigida a un joven que le pide consejos para iniciarse en el estudio de las matemáticas, de la cual entresaco algunos párrafos que me parecen significativos: «Si le atrae el aspecto matemático del pensamiento, o más bien el aspecto filosófico de las matemáticas, lea las obras de Bertrand Russell, que son muy notables, y combine su lectura con la de los estudios críticos de H. Poincaré... Pero, de manera más general, si usted no pretende hacer de las matemáticas su principal objeto de estudio y si no busca en ellas más que el fruto típico que pueden ofrecer al espíritu la atención y el análisis de conceptos arbitrariamente definidos, me permito darle el consejo de que retome los comienzos de esta ciencia y considere por usted mismo los problemas más elementales (en apariencia). Estas premisas, además, son una fuente perpetua de reflexiones y descubrimientos para los maestros. Sólo en la numeración hallará usted materia para reflexionar durante largo tiempo. Piense que Leibniz no desdeñó ocuparse de ella. No menos interesante para la meditación es la notación algebraica; toda la parte formal que se ha derivado de ella poco a poco y ha adquirido un desarrollo inmenso, es algo del mayor interés. Lo mismo las definiciones y los postulados de la geometría, cuyo análisis infinitamente sutil realizado en los tiempos modernos ha permitido concebir la Física como una Geometría Generalizada». «He aquí algunas sugerencias. No sé si responden a sus deseos, pero yo no soy en absoluto un especialista, sino a lo sumo un admirador y un amante desdichado de la más bella de las ciencias».

Hace mucho tiempo que percibí relaciones entre las matemáticas y la poesía. Fue en mis años mozos transcurridos en un pueblo andaluz, en mi pueblo. Tuve la percepción más clara cuando intentaba comprender a fondo la solución al famoso problema de la cuadratura del círculo. Antes de seguir adelante, y en la creencia de que dicho problema puede resultar intelectualmente atractivo para muchas personas que están aquí, voy a empezar exponiendo brevemente en qué consiste. Imaginemos que tenemos dibujado un círculo en una cuartilla; entonces se trata de dibujar un cuadrado, apoyándonos en el círculo y utilizando la regla y el compás como únicos instrumentos de dibujo, de manera que el área de este cuadrado sea igual al área del círculo dado. Por supuesto que, para el matemático, no es necesario conseguir realmente el cuadrado: basta con explicar lo que habría que hacer con una regla y un compás, ideales para llegar a la solución del problema; lo que importa es el razonamiento, no la realización. Ya el famoso matemático francés Poincaré decía, con cierto sentido del humor, que la matemática es el arte de razonar bien con figuras mal hechas.

Los primeros intentos para conseguir la cuadratura del círculo se localizan, según Plutarco, en Grecia, en el siglo V antes de Cristo. A partir de entonces y durante más de dos mil años se ha empleado, por numerosos matemáticos, un inmenso caudal de energía para tratar de obtener una respuesta satisfactoria. En el siglo de Pericles algunas personas tuvieron verdadera obsesión por el problema; esto motivó que Aristófanes, el célebre comediógrafo griego, que tan dado era a la burla, hablara de la necesidad de hacer la cuadratura del mundo.

Volvamos al contenido matemático de dicho problema. Todos sabemos que si se mide la longitud de una circunferencia y el resultado se divide por la longitud de su diámetro, se obtiene un número que no depende del tamaño de la circunferencia; éste es el número $\pi = 3'1415...$ Por otra parte, sabemos que el área del círculo es el producto de π por su radio al cuadrado. Por tanto, si tomamos como unidad de longitud el radio del círculo que tenemos dibujado en la cuartilla, el

área de este círculo será igual a π y el cuadrado que tratamos de construir con la regla y el compás debe tener también como área π y, en consecuencia, el lado de dicho cuadrado tendrá como longitud la raíz cuadrada de π. Se deduce de lo anterior que el problema de la cuadratura del círculo consiste en, dado un segmento unidad (el radio del círculo), construir, con regla y compás, un segmento (el lado del cuadrado) cuya longitud sea igual a la raíz cuadrada del número π. Para darles una idea de cómo se pudo lograr a finales del siglo XIX una respuesta satisfactoria, negativa, por cierto, al problema de la cuadratura del círculo, diré que esto se logró gracias a la geometría analítica, que permitió plantear dicho problema en términos algebraicos. Si se toman en la cuartilla unos ejes rectangulares OX y OY que pasen por el centro O del círculo, y como unidad de longitud el radio, el problema que nos ocupa quedará reducido a determinar un punto en el eje OX cuya abscisa sea igual a la raíz cuadrada de π. Si tenemos en cuenta el hecho de que con la regla se trazan rectas, que vienen representadas por ecuaciones de primer grado en las variables x e y, y con el compás se dibujan circunferencias, que tienen como expresiones analíticas ecuaciones de segundo grado en dichas variables, si la cuadratura del círculo fuera posible, se podría llegar, después de trazar un número finito de rectas y circunferencias, a obtener el punto del eje OX de abscisa igual a la raíz cuadrada de π como intersección de dicho eje con una cierta recta o circunferencia, lo que se traduce analíticamente en que π es raíz de una cierta ecuación algebraica. Se demuestra que el trazado de rectas y circunferencias puede realizarse de tal modo que π sea raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. A partir de aquí se obtiene el siguiente resultado: si la cuadratura del círculo, con regla y compás, es posible, entonces el número π es raíz de una ecuación $P(x) = 0$, en donde $P(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros. De esta forma, un problema de geometría se traslada a un problema de álgebra.

En el año 1873, un matemático francés, C. Hermite, publicó un famoso artículo sobre la función exponencial en el cual demuestra que el número e, base de los logaritmos neperianos, es un número trascendente, es decir, que el número e no es raíz de ninguna ecuación de la forma $P(x) = 0$, en donde $P(x)$ es un polinomio no nulo de coeficientes enteros. Estudié este artículo en mi pueblo hace muchos años, cuando yo era un muchacho más interesado por la literatura, la filosofía y, en especial, por la poesía que por las matemáticas. Leía entonces a Antonio Machado, Miguel de Unamuno, Juan Ramón Jiménez y a los poetas de la generación del 27, como a Federico García Lorca, Luis Cernuda, Manuel Altolaguirre, Emilio Prados, Pedro Salinas, Jorge Guillén, Gerardo Diego, etc. En el tiempo en que estudiaba el trabajo de Hermite leía también un libro extraordinario de poesía, *Sombra del Paraíso*, de Vicente Aleixandre. Recuerdo que después de leer el poema Luna del Paraíso, quizá la oda más bella que se ha escrito en lengua castellana, pensé que si tuviera que elegir entre esta oda y el trabajo de Hermite no sabría qué hacer. Decidí entonces que la poesía y las matemáticas me acompañarían durante toda mi vida.

El matemático Painlevé se refiere a Hermite con estas palabras: «Los que han tenido la dicha de ser alumnos del gran geómetra no pueden olvidar el tinte casi religioso de sus enseñanzas, el estremecimiento de belleza o de misterio que hacía correr a través de su auditorio ante algún admirable descubrimiento a ante lo desconocido».

Hermite sentía que el método que había utilizado para demostrar la trascendencia del número e no era lo suficientemente potente para intentar lo mismo con el número π. Sin embargo no fue así, pues en el año 1882, Lindemann logró probar, con las mismas técnicas que Hermite, que el número π es trascendente, es decir, que no es raíz de una ecuación de la forma $P(x) = 0$, en donde $P(x)$ es un polinomio no nulo con coeficientes enteros. Con esto el problema de la cuadratura del círculo quedaba definitivamente cerrado: la cuadratura del círculo, con regla y compás, es imposible.

Quisiera añadir ahora que el trabajo en matemáticas exige a veces un esfuerzo considerable. Incluso hay que adquirir previamente hábitos mentales específicos. El mismo sentido del rigor parece que no es una cosa natural al hombre. Decía Poincaré que el rigor en matemáticas necesita aprendizaje. Uno puede plantearse la cuestión de si el esfuerzo para adquirir ciertos conocimientos o conseguir determinados resultados puede ser desproporcionado. Bertrand Russell, en su autobiografía, llama al período en el que se dedicó más activamente a la lógica matemática su luna de miel intelectual; pero, en contrapartida, manifiesta que abandonó las matemáticas porque no se sentía con ánimos para realizar un trabajo tan duro. De todas formas, mi experiencia personal me dice que si se tiene sensibilidad suficiente para percibir la belleza en matemáticas, el esfuerzo, en la mayoría de los casos, puede ser algo secundario.

Paso a exponer a continuación algunas ideas sobre la teoría de conjuntos. Puede decirse que la primera base sobre la que descansa el edificio matemático es la lógica, más arriba está la teoría de conjuntos y a partir de aquí nacen las diversas ramas de las matemáticas.

La teoría de los conjuntos infinitos fue creada por el matemático alemán G. Cantor que entre los años 1874 a 1897 publicó sus resultados más importantes sobre los números cardinales y los números ordinales transfinitos. Cantor llegó a su teoría mientras trabajaba en las series trigonométricas, tema muy estudiado en el siglo XIX por sus aplicaciones a los problemas de física. Al investigar en dichas series se vio obligado a analizar conjuntos muy generales de números reales, encontrando propiedades topológicas de ellos (por eso a Cantor se le considera también como uno de los fundadores de la topología conjuntista), teniendo que realizar a veces una infinidad de iteraciones para construir nuevos conjuntos, continuando iterando incluso después de esta infinidad de operaciones.

Empezaré con ejemplos sencillos de números cardinales. Consideremos el conjunto de las provincias de la comunidad catalana y el conjunto de las provincias de la comunidad gallega. Establezcamos una relación entre los elementos de ambos conjuntos de la siguiente forma: a Barcelona le hacemos corresponder La Coruña, a Tarragona, Lugo; a Gerona, Orense y a Lérida, Pontevedra. De esta manera, hemos construido una correspondencia biunívoca, es decir, a cada provincia catalana se le asigna una provincia gallega y una sola, de tal modo que a provincias catalanas distintas les corresponden provincias gallegas distintas y cada provincia gallega es el elemento correspondiente de alguna provincia catalana. El hecho de que se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos considerados nos dice que ambos conjuntos tienen en común algo de naturaleza matemática que, hablando intuitivamente, le podemos llamar el número cuatro. De esta forma, al conjunto de las provincias catalanas, e igual al conjunto de las provincias gallegas, se le adscribe un número cardinal: el cuatro. En general, a cada conjunto finito se le adscribe un número cardinal de manera que a dos conjuntos que se puedan poner en correspondencia biunívoca se les asigna el mismo número. Utilizando ahora uniones de conjuntos, productos cartesianos, etc., se pueden definir operaciones con los números cardinales y desarrollar a partir de aquí toda la aritmética.

Cantor introduce su teoría de números cardinales transfinitos de una forma análoga, pero utilizando conjuntos infinitos. Tomemos, por ejemplo, el conjunto de los enteros positivos 1,2,3,... y el conjunto de los enteros negativos -1,-2,-3,... Establezcamos una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos de la siguiente forma: al 1 le hacemos corresponder el -1, al 2, el -2, al 3, el -3, al 4, el -4, y así sucesivamente. Puesto que estos dos conjuntos se pueden poner en correspondencia biunívoca se dice que tienen el mismo número cardinal. A este cardinal se le representa con la letra hebrea alef seguida del subíndice cero ($\aleph_0$). Es decir, que el conjunto formado por todos los enteros positivos tiene como número cardinal el alef subcero. Cualquier conjunto que se pueda poner en correspondencia biunívoca con éste se dice que es infinito numerable y tiene también como número cardinal el alef subcero. En 1874, Cantor publica un artículo en donde prueba que el conjunto de los números reales no se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los enteros positivos. Consecuentemente, el número cardinal del conjunto de los números reales, al cual se le llama el continuo, es diferente del alef subcero. El método introducido por Cantor para obtener dicha prueba se ha hecho famoso y es conocido como «el proceso diagonal de Cantor».

Una diferencia que se observa entre los conjuntos finitos y los infinitos es la siguiente: consideremos de nuevo el conjunto formado por las provincias catalanas. Un subconjunto de éste es el formado por Barcelona y Tarragona, al cual le corresponde como número cardinal el dos; pues bien, es imposible establecer una correspondencia biunívoca entre este subconjunto y el conjunto de todas las provincias catalanas. En general, no se puede construir una correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto finito y los elementos de un subconjunto propio de él. La situación para conjuntos infinitos es muy diferente; así, por ejemplo, el conjunto de los números positivos pares 2,4,6,... es un subconjunto propio de los enteros positivos 1,2,3,..., y, sin embargo, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos: al 2 se le hace corresponder el 1, al 4, el 2, al 6, el 3, al 8, el 4,..., etc., es decir, a cada número entero positivo par le asignamos este mismo número dividido por 2. Consecuentemente, el conjunto de los números enteros positivos pares tiene como número cardinal el alef subcero.

Cantor demuestra que si se tiene un plano y une recta en él, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los puntos del plano. Luego podemos afirmar, a pesar de que la recta es un subconjunto propio del plano, que el número de puntos de la recta es el mismo que el número de puntos del plano.

Cantor demuestra además que existe una infinidad de números cardinales transfinitos y construye una bella aritmética para estos números. Dentro de la teoría de conjuntos Cantor define también el concepto de número ordinal transfinito y descubre numerosas propiedades relacionadas con él.

Las investigaciones de Cantor fueron bien recibidas por numerosos matemáticos, aunque no por todos, como, por ejemplo, por el famoso matemático alemán Kronecker. La objeción fundamental descansaba en la reserva que se tenía a la aceptación del infinito actual. Cuando se dice que el conjunto de los números enteros positivos es infinito, esto se puede entender de dos formas: como una capacidad para obtener números tan grandes como queramos; así, si tomamos el número un millón, podemos afirmar que existe un número más grande que él, por ejemplo, dos millones. Al infinito concebido de esta manera se le llama el infinito potencial. La segunda forma es la utilizada por Cantor: los números enteros positivos, por ejemplo, se consideran formando un conjunto con una existencia real y objetiva, como algo que está ahí. Al infinito entendido de esta otra manera se le llama el infinito actual, y ha sido fuente de numerosas discusiones.

Un brillante matemático y filósofo alemán, G. Frege, publicó un trabajo en

dos volúmenes (el primero apareció en 1893 y el segundo en 1903) en el que se explica cómo se pueden construir las matemáticas a partir de ciertos principios de lógica. Poco después de publicarse el segundo volumen, Bertrand Russell comunicó a Frege una contradicción que se deducía de los principios lógicos utilizados por éste. Dicha contradicción es la famosa paradoja de Russell.

Antes que Russell, habían detectado paradojas en la teoría de conjuntos Cantor y Burali-Forti, pero la paradoja de Russell, que, por otra parte, la había encontrado también independientemente el matemático alemán Zermelo, es tan directa y clara que no es extraño que causara en aquel tiempo una gran conmoción en la Matemática. Parecía que el edificio construido por Cantor se tambaleaba. Para un matemático, el vivir en una teoría en donde existen contradicciones es, por lo menos, muy incómodo. Cuenta Fraenckel que alguien comunicó al gran David Hilbert su preocupación por la existencia de las paradojas; la contestación de Hilbert fue aproximadamente la siguiente: «Cantor construyó con su teoría de conjuntos un paraíso para los matemáticos, y no habrá nadie capaz de expulsarnos de él».

Antes de explicar la paradoja de Russell quisiera hacer una observación. Anteriormente, he puesto como ejemplo de conjuntos las provincias que forman la comunidad gallega; pero he de añadir ahora que la comunidad gallega es, además de un conjunto de provincias, un elemento de otro conjunto: el formado por todas las comunidades de España. Vemos, pues, que a un conjunto se le puede considerar a veces como un elemento de otro conjunto. Russell procede de la siguiente forma: representemos por B el conjunto formado por aquellos conjuntos X tales que X, considerado como elemento, no pertenece al conjunto X. Pueden suceder dos casos: que el conjunto B, considerado como elemento pertenezca a B; entonces B será alguno de los X citados antes y, por tanto, B no pertenece a B, lo cual es una contradicción. En el segundo caso, partimos de que B, considerado como un elemento, no pertenezca al conjunto B, y obtenemos entonces que B es alguno de los X anteriores y, en consecuencia, B pertenece al conjunto B, lo cual es una contradicción.

Ante el naufragio obvio producido en los fundamentos de las matemáticas por la aparición de las paradojas, surgieron en un principio dos equipos de salvamento. Por un lado, Zermelo, creando en 1908 su célebre axiomática de la teoría de conjuntos, y, por otro lado, aproximadamente por el mismo tiempo, Russell y Whitehead que en el famoso libro *Principia Mathematica* incluyen también otra axiomática. Ambos trabajos pusieron limitaciones al concepto de conjunto y eliminaron las paradojas conocidas.

La axiomática de Zermelo se completa con el axioma de elección, el cual ha sido fuente de numerosas discusiones y controversias, y con el axioma de reemplazamiento obtenido por Fraenckel y otros. Cuando después cite sin más la axiomática de la teoría de conjuntos me estaré refiriendo a este sistema de Zermelo-Fraenckel. Quisiera añadir que para trabajar en matemáticas el sistema de Zermelo es extraordinariamente mejor que el de *Principia Mathematica.*

Los métodos axiomáticos se han usado en matemáticas en diversas situaciones, incluso a veces se ha dicho que los axiomas, también llamados postulados, eran verdades matemáticas evidentes, cosa que ahora nos parece de una gran ingenuidad. Si nos fijamos, por ejemplo, en la geometría euclídea, observamos que se parte de ciertos elementos primitivos que se admiten sin definiciones: son los puntos, las rectas y los planos. Después se enuncian los postulados o axiomas, que relacionan los elementos primitivos y que vienen a ser, de alguna manera, definiciones indirectas de éstos. A partir de aquí, y como consecuencias lógicas, se demuestran propiedad de los elementos primitivos o bien de otros entes geométricos introducidos a lo largo del desarrollo de la geometría y cuyas construcciones se apoyan en los resultados obtenidos. Uno de los axiomas de la geometría de Euclides es el famoso postulado de las paralelas que dice lo siguiente: «si en un plano se da una recta y un punto exterior a ella, por este punto se puede trazar una recta, y solamente una, paralela a la recta dada». Si no se admite el anterior axioma pueden obtenerse geometrías muy diferentes. Así, por ejemplo, en la geometría de Riemann se utiliza este otro postulado: «si en un plano se dan una recta y un punto exterior a ella, por este punto no se puede trazar una recta paralela a la recta dada». Consecuencia de esto es que en la geometría de Riemann se obtienen muchos resultados que contradicen propiedades matemáticas contenidas en la geometría de Euclides. Por otra parte, las geometrías se aplican al mundo, pero las propiedades espaciales del mundo no son exactamente las estudiadas por el hombre en sus geometrías, y así resulta que la geometría de Euclides se aproxima localmente al espacio ordinario y puede aplicarse, por ejemplo, en la construcción de un edificio, pero cuando se trata de aplicarla al universo, las cosas no son tan claras, y se ha comprobado que, en este caso, la geometría de Riemann es mucho más adecuada. Esto explica el éxito de dicha geometría en la teoría de la relatividad de Einstein.

En la teoría de conjuntos los elementos primitivos son los conjuntos y los elementos de los conjuntos. Respecto a los axiomas, sólo diré aquí que el problema de la consistencia de ellos, es decir, de que no conducirán a una contradicción, es una cuestión abierta.

Durante mucho tiempo, algunos matemáticos han creído que, en la teoría de conjuntos, para cualquier enunciado que fuera significativo, se podría llegar a demostrar su verdad o falsedad mediante un proceso finito. En 1931 Kurt Gödel puso de manifiesto que esta creencia no estaba fundamentada probando que en

toda teoría axiomática consistente, que contenga la aritmética elemental, siempre hay enunciados significativos de los que no se puede afirmar si son verdaderos o falsos, es decir, no es posible «decidir» a partir de los axiomas la verdad o falsedad de dichos enunciados; por esto se les da el calificativo de indecidibles. Este magnífico resultado de Gödel sobre la incompletitud de dichas teorías axiomáticas no sólo es importante desde un punto de vista matemático sino también desde una perspectiva filosófica.

Los resultados indecidibles construidos por Gödel, aunque son significativos desde un punto de vista formal riguroso, no parecen tener una interpretación matemática, lo que ha motivado que ciertos matemáticos los vean como poco naturales. Sin embargo, posteriormente, se ha visto que existen enunciados, como la famosa hipótesis del continuo de la que me ocuparé después, que son indecidibles y tienen además una clara significación matemática.

Antes de seguir adelante voy a decir unas palabras sobre Gödel: es el lógico más importante de este siglo. Nació en Brünn (Moravia) en 1906. Estudió matemáticas en la Universidad de Viena. En su conocida *Tesis doctoral* demuestra la suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden. Probablemente es la tesis más breve que se ha escrito nunca: sólo tiene once páginas. Gödel participó en las actividades del famoso Círculo de Viena. En 1939, huyendo de los nazis, marchó a los Estados Unidos en donde permaneció hasta su muerte, acaecida en 1978. Fue miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton desde 1940. No sólo investigó en lógica y en filosofía de la matemática sino también en teoría general de la relatividad, influenciado por su compañero Einstein, que también era miembro del Instituto. Sus trabajos son extraordinariamente densos y profundos.

Prosiguiendo con la teoría de conjuntos dedicaré unas palabras a la hipótesis del continuo. Dicha hipótesis tiene el siguiente enunciado: «cada subconjunto infinito de números reales que no se pueda poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números enteros positivos, se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los números reales». Otra forma de expresar la anterior propiedad consiste en la afirmación de que no existe ningún número cardinal estrictamente comprendido entre el alef subcero y el continuo.

Durante más de medio siglo muchos matemáticos abrigaron la creencia de que la hipótesis del continuo era cierta y dedicaron ingentes esfuerzos para intentar conseguir una prueba. El mismo Cantor trabajó intensamente en ello. David Hilbert publicó un articulo en donde probaba que la hipótesis del continuo era verdad; pero unos meses más tarde se encontró que habia un error en la demostración. El matemático ruso N. Lusin, que formaba parte del grupo de topólogos que se formó en Moscú alrededor de la figura de Alexandroff, afirmaba que la hipótesis del continuo no se resolvería nunca. El matemático polaco Sierpinski, al cual dedicaré ahora unas palabras, escribió una bella monografía sobre la hipótesis del continuo en donde da numerosas equivalencias. Sierpinski no sólo escribió bellísimos artículos sobre la hipótesis del continuo sino también sobre muy diversos temas dentro de la teoría de conjuntos infinitos a la que dedicó más de cuarenta años de su vida. Fundó, junto con los también matemáticos polacos Janiszewski y Mazurkiewicz, la revista *Fundamenta Mathematicae*, famosa en el mundo en teoría de conjuntos, topología y fundamentos de la matemática. Sierpinski era un entusiasta investigador en conjuntos infinitos y poseía un ingenio extraordinario para la resolución de problemas. Su tumba, conforme a su deseo expresado muchos años antes de su muerte, tiene la siguiente inscripción: Waclaw Sierpinski, 1882-1969, explorador del infinito.

En 1939, Gödel descubre el siguiente resultado, que es importante y sorprendente: «si la axiomática de la teoría de conjuntos es consistente y se le añade, como axioma, la hipótesis del continuo, el nuevo sistema axiomático es consistente». Esto no prueba que la hipótesis del continuo es cierta, pero sí prueba que es imposible demostrar que la hipótesis del continuo es falsa.

Antes de que Gödel publicara el anterior resultado, se había utilizado la hipótesis del continuo por numerosos matemáticos para dar ejemplos y contraejemplos en topología conjuntista. Todas estas construcciones estaban en el aire amenazadas por la posibilidad de que algún día se probara que la hipótesis del continuo fuera falsa. Gödel vino a dar luz verde en esta dirección y desde entonces la hipótesis del continuo se utiliza en topología conjuntista con toda tranquilidad.

En 1963, un matemático americano, Paul Cohen, utilizando en parte las ideas de Gödel, obtuvo un éxito extraordinario al probar lo siguiente: «si la axiomática de la teoría de conjuntos es consistente y se le añade, como axioma, la negación de la hipótesis del continuo, el nuevo sistema axiomático también es consistente».

Se deduce de los resultados de Gödel y Cohen que la hipótesis del continuo, la cual tiene, obviamente, un significado matemático muy claro, pertenece a los enunciados indecidibles, es decir, que a partir de la axiomática de la teoría de conjuntos no se puede demostrar su verdad ni tampoco su falsedad.

Voy a continuar con esta excursión sobre los conjuntos refiriéndome al axioma de libre elección de Zermelo, que ha sido fuente de controversias apasionadas. Empiezo con un ejemplo. Los profesores de nuestra Facultad de Matemáticas forman un conjunto, los de la Facultad de Medicina forman otro conjunto y, en general, los profesores de cada Facultad de nuestra Universidad constituyen un conjunto. De esta manera se tiene una colección de conjuntos. Imaginemos que se quiere nombrar una comisión de profesores de manera que todas las Facultades tengan representación en ella. Entonces podemos «elegir», y pongo entre comillas elegir, un profesor de la Facultad de Medicina, otro de la Facultad de Farmacia y, en general, un profesor de cada Facultad. De esta manera se construye un nuevo conjunto: la comisión. Pues bien, de este ejemplo voy a pasar a una abstracción y a formular un axioma, en este caso el axioma de elección, que dice lo siguiente: «dada una colección de conjuntos no vacíos, existe un conjunto que tiene precisamente un elemento de cada conjunto de la colección».

El enunciado anterior parece muy natural, pero si lo observamos con más atención aparece una dificultad: la colección de conjuntos puede ser finita, como en el ejemplo que he puesto antes, pero también puede ser infinita y, entonces, los ejemplos del mundo ordinario no nos sirven, pues aun suponiendo que se dispongan de colecciones infinitas, si «realmente» hemos de elegir un elemento de cada conjunto de la colección, si el infinito no es numerable, forzosamente se necesitaría un tiempo infinito, y el hombre es finito, el hombre está sometido a la muerte. A veces, cuando veo ciudades antiguas y observo inscripciones en las piedras que hablan de hombres que vivieron hace muchos años, me acuerdo de un poema de Federico García Lorca, *Llanto por Ignacio Sánchez Mejías,* en donde se dice que las piedras son espaldas para llevar al tiempo. Es una bella metáfora, y pienso ahora que la matemática también es una espalda para llevar al tiempo, y esto sucede, sencillamente, porque los conceptos matemáticos, aunque se apliquen a fenómenos temporales, son ajenos al tiempo, y así, en el axioma que estamos considerando, no se dice que haya realmente que elegir los elementos, se afirma simplemente que «existe» un conjunto que tiene precisamente un elemento de cada conjunto de la colección. A la vista de todo esto, parece natural que el axioma de elección de Zermelo haya despertado controversias. Incluso adoptando una postura platónica en el sentido de que uno tenga la creencia de que las matemáticas existen en un mundo eterno, independiente del hombre, y que la labor del matemático consista en descubrir las verdades de esta ciencia, incluso en este caso, uno puede tener reservas respecto al axioma de elección. Y no digamos si la posición del matemático es menos idealista, como en el caso de Kronecker cuando decía refiriéndose a las matemáticas: «Dios creó los números naturales, lo demás lo ha hecho el hombre».

Respecto al axioma de elección en relación con el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos hay resultados de Gödel y Cohen análogos a los comentados para la hipótesis del continuo, por lo que no voy a insistir en esa dirección.

En el año 1923 se publica un famoso artículo en la revista *Fundamenta*

Mathematicae del cual son autores dos matemáticos polacos: Stefan Banach y Alfred Tarski. El teorema principal de este artículo es un resultado extraño si se considera la matemática en relación con el mundo físico. A dicho resultado se le conoce como la paradoja de Banach-Tarski y tiene un precedente teórico en una descomposición singular de la superficie esférica realizada por F. Hausdorff y publicada en su conocido libro *Grundzüge der Mengenlehre*, aparecido en Leipzig en el año 1914.

La paradoja de Banach-Tarski consiste en lo siguiente: se toma una esfera de radio igual a una unidad de longitud dada. Entonces se puede dividir la esfera en un número finito de partes de manera que, desplazando algunas de estas partes, se construye una esfera de radio unidad, y con el resto de las partes, sometiéndolas también a movimientos, se puede formar otra esfera de radio uno. Es decir, que a partir de una esfera de radio uno se obtiene, por este mecanismo, dos esferas cada una de las cuales tiene radio uno. Esto, realmente, es sorprendente. En el año 1945, Sierpinski, en un artículo publicado tambien en *Fundamenta Mathematicae,* descompone la esfera unidad en nueve partes. Somete a movimiento cinco de ellas y compone una esfera de radio uno; con las otras cuatro partes, moviéndolas adecuadamente, obtiene otra esfera de radio uno. R.N. Robinson, en 1947, baja el número de partes de nueve a cinco y demuestra además que con menos de cinco partes no es posible hacer la duplicación de la esfera unidad.

Ante un resultado de esta naturaleza uno se queda perplejo. En el mundo real no ocurren estas cosas. Es verdad que existe un precedente histórico: cuando Jesús multiplicó los panes y los peces; pero este hecho tiene carácter milagroso y, por tanto, no es significativo para la ciencia.

Los razonamientos de Banach-Tarski, Sierpinski y Robinson son perfectos, correctísimos. Entonces, ¿qué ha sucedido aquí? Si analizamos detenidamente las demostraciones y tratamos de buscar un responsable, llegamos a la siguiente conclusión: el responsable es el axioma de elección de Zermelo. Voy a justificar rápidamente esta afirmación. En la geometría elemental sabemos cómo se determinan los volúmenes de ciertas figuras, como, por ejemplo, el cubo, la esfera, el ortoedro, las distintas pirámides, etc. Los matemáticos han tratado de determinar a lo largo de la historia, no sólo por necesidades teóricas sino también prácticas, volúmenes de figuras cada vez más complicadas. Esto dio lugar a la ampliación del concepto de volumen: primero con el concepto de contenido, y segundo con la idea de medida. El matemático francés Lebesgue hizo una extraordinaria teoría de la medida y de la integración en espacios euclídeos de cualquier número de dimensiones. La medida de Lebesgue asigna, en el espacio, a cada conjunto de una cierta clase, los llamados conjuntos medibles Lebesgue, un número o bien más infinito ($+\infty$), su medida, de manera que las figuras elementales forman conjuntos de puntos medibles Lebesgue y sus medidas coinciden con sus volúmenes. Por tanto, la medida de Lebesgue generaliza en el espacio el concepto de volumen.

Si se toma una esfera y se la somete a un desplazamiento, el volumen de la esfera es el mismo en las distintas posiciones. Esta propiedad la tienen también los conjuntos medibles Lebesgue, es decir, que si con un conjunto cualquiera de éstos se realiza un movimiento, su medida no cambia. Los matemáticos suelen expresar esta propiedad diciendo que la medida de Lebesgue es invariante para los movimientos.

Lebesgue introdujo su medida a principio de siglo, y, a continuación, algunos matemáticos se hicieron la siguiente pregunta: ¿habrá algún conjunto en el espacio que no sea medible Lebesgue? El primero que obtuvo una respuesta a este problema fue Hausdorff que demostró la existencia de un conjunto que no admite medida de Lebesgue; la singularidad de la prueba está en que Hausdorff utiliza el axioma de elección de Zermelo. A partir de aquí se han hecho grandes esfuerzos para conseguir la construcción, sin utilizar el axioma de elección, de un conjunto que no fuera medible Lebesgue. Todo fue inútil. En el año 1971, un lógico y matemático ruso, Solovay, logró probar que si en la axiomática de la teoría de conjuntos se suprime el axioma de elección y, en su lugar se pone como axioma que cada conjunto del espacio es medible Lebesgue, el nuevo sistema axiomático es consistente si el primero lo es. Una consecuencia de esto es que es imposible obtener en el espacio, sin utilizar el axioma de elección, un conjunto que no sea medible Lebesgue.

Volvamos ahora al problema que nos ocupa de la duplicación de la esfera unidad y analicemos la partición más simple, la de Robinson. Este matemático divide la esfera en cinco partes. Somete a movimientos tres de ellas y construye una esfera unidad, y con las otras dos partes, moviéndolas adecuadamente, obtiene otra esfera unidad. Lo primero que observamos es que las cinco partes no pueden ser medibles Lebesgue, porque de serlo, al desplazarlas,se seguirían conservando sus medidas y entonces no sería posible hacer ningún tipo de duplicación. Por tanto, debe haber alguna de estas partes que no sea medible Lebesgue y, por el resultado de Solovay, para construirla hemos de utilizar necesariamente el axioma de elección. Consecuentemente, sin el axioma de elección no es posible hacer la multiplicación de las esferas. Se puede intuir ahora que si las partes en que se divide la esfera no tienen medida, al desplazarlas, no hay razón para que no puedan aparecer fenómenos relativos al volumen que choquen con lo que sucede en el mundo real.

Se ha pretendido hacer algo análogo en el plano: se considera un círculo unidad y se trata de descomponerlo en un número finito de partes de manera que moviendo independientemente algunas de ellas se componga un círculo unidad, y moviendo las restantes se obtenga otro círculo unidad. Pero se ha probado que esto no se puede hacer, es decir, que la duplicación del círculo es imposible. En el plano queda abierto el siguiente problema: dado un círculo, se trata de descomponerlo en un número finito de partes de manera que moviéndolas convenientemente se pueda construir un cuadrado que tenga la misma área que la del círculo. Este problema es una especie de cuadratura conjuntista del círculo. Su solución ha tropezado hasta ahora con serias dificultades.

Antes de terminar dedicaré unas palabras a un brillante matemático húngaro, nacionalizado americano. Se trata de John von Neumann, que nació en Budapest en el año 1903. Estudió matemáticas en su ciudad natal, y en el año 1930 marchó a los Estados Unidos. A partir de 1933 fue miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton hasta su muerte, acaecida en 1957. Los trabajos de este matemático son importantes y diversos, y es imposible dar aquí ni siquiera una idea sobre sus investigaciones más relevantes. Entre otras cosas, John von Neumann se ocupó de los fundamentos de la matemática, introduciendo en 1925 una axiomática de la teoría de conjuntos en donde utiliza el concepto primitivo de clase. Durante varios años John von Neumann trabajó en problemas de hidrodinámica, teniendo que manejar ciertas ecuaciones en derivadas parciales no lineales, cuyas soluciones eran difíciles de estudiar. Entonces sintió que habría necesidad de conseguir datos numéricos para estas soluciones, cuya observación iluminara un camino que condujera a la construcción de una nueva teoría. Esto le obligó a examinar el problema del cálculo con máquinas electrónicas. Durante los años 1944 y 1945, von Neumann aportó importantes descubrimientos sobre computación y llegó a formular los métodos fundamentales para trasladar un conjunto de procedimientos matemáticos a un lenguaje de instrucciones para una máquina computadora.

Dice Stanilaw Ulam, matemático de origen polaco y amigo de von Neumann, que muchas de las aportaciones de éste a la teoría de la computación están inspiradas en las investigaciones realizadas por von Neumann sobre los fundamentos de las matemáticas y teoría de conjuntos. Esto pone de manifiesto que, en matemáticas, puede suceder, como en este caso, que incluso la parte más abstracta resulte de utilidad. Por esta razón, cuando alguien dice, usando de un dogmatismo que se apoya frecuentemente en el desconocimiento, que tal o cual rama de la ciencia no se aplica a que no sirve para nada, habría que contestarle con lo que se ha dicho alguna vez, que lo único que no se aplica es lo que no se sabe, y yo añadiría que lo que no sirve para nada es la ignorancia, e, incluso, si la ignorancia es activa puede producir numerosos males. Por mi parte, y como matemático, tengo la experiencia de que existe una correlación positiva entre el nivel de una universidad y su actividad en las ciencias básicas. Una universidad que

descuide la investigación básica tiene que resignarse a tener un nivel de prestigio muy modesto.

Cuentan de un poeta latino, creo que fue Virgilio, que en los últimos años de su vida se puso a estudiar griego; sus amigos trataron de disuadirle argumentando que era muy mayor. La respuesta de Virgilio fue contundente: Hay que trabajar, hay que estudiar como si uno no se fuera a morir nunca. Yo me siento identificado con Virgilio; pero, por otra parte, siempre he pensado en los momentos adversos, o cuando los medios de trabajo que estaban a mi alcance eran exiguos, que no debía permitir que las lamentaciones se opusieran a la utilización de todas mis posibilidades. Entonces recordaba cuando de muchacho leía en mi pueblo al poeta bengalí Rabindranath Tagore, en aquellos libritos que traducía Zenobia Camprubi, la mujer de Juan Ramón Jiménez. Tagore decía: «Si lloráis de noche porque no podéis ver el sol, las lágrimas os impedirán contemplar las estrellas».

Termino pidiéndoles disculpas por si les he cansado con mis palabras; pero es muy difícil para mí escapar de mi condición profesional. Yo no soy más que un profesor que enseña matemáticas, un investigador que hace matemáticas y, en fin, un hombre que se afana realizando un trabajo honesto con el mismo espíritu filosófico que el poeta latino Virgilio.

Muchas gracias por la atención que me han prestado.