EN TODOS LOS NIVELES: ¡GEOMETRIA!

Hans FREUDENTHAL

La reforma de los programas de matemáticas de los años sesenta y setenta dio, en muchos países, la oportunidad para deshacerse de esa geometría tradicional pseudoaxiomática, pretenciosamente deductiva, que partiendo de definiciones engañosas llega, a través de demostraciones poco convincentes, a teoremas triviales o mal formulados; geometría detestada o temida tan fuertemente por los alumnos que tenían que aprenderla, como por muchos profesores que estaban obligados a enseñarla. Ha sido eliminada en tanto que materia de enseñanza y si de algún modo se ha conservado, en ella se ha matado el espíritu geométrico.

El título de mi conferencia dice no sólo que se debe enseñar la geometría en todos los niveles escolares, sino más bien que en cada nivel del desarrollo cognoscitivo —escolar o no—, hay una geometría que se aprende por sí misma, siempre que se le dé la oportunidad de desplegarse, y que es una componente esencial de este desarrollo.

Esta tesis implica que yo comience mi exposición en la edad preescolar, en la que he tenido la suerte de hacer observaciones de lo que me atrevo a llamar el nacimiento de la geometría. De ellas escojo el tema que me parece el más decisivo y el más refinado: la comprensión geométrica de las razones, de la proporción y de la escala —comprensión que tiene lugar a una edad muy temprana—. En efecto, el niño adquiere muy pronto la capacidad para identificar objetos de la misma forma, que no se distinguen más que por sus dimensiones, de identificar el mismo objeto a diferentes distancias, un objeto con su imagen a cualquier escala, o dos imágenes del mismo objeto en diferentes esca-

* Esta conferencia fue pronunciada en francés. Ha sido traducida por F. Villarroya.

las. A muy temprana edad el niño es capaz de decidir qué imágenes —por ejemplo, la imagen de un hombre y la de un coche— pertenecen, en cuanto a la escala, al mismo mundo o a dos mundos diferentes. Para ilustrar lo que he observado, os muestro dos ejemplos: En la figura 1 le preguntamos al niño «¿cuál será tu estatura en esta foto?» (a la izquierda en la figura 1) y después le enseñamos la foto entera (a la derecha en la figura 1). O (figura 2) «¿qué personas son las dueñas de estos vestidos?».

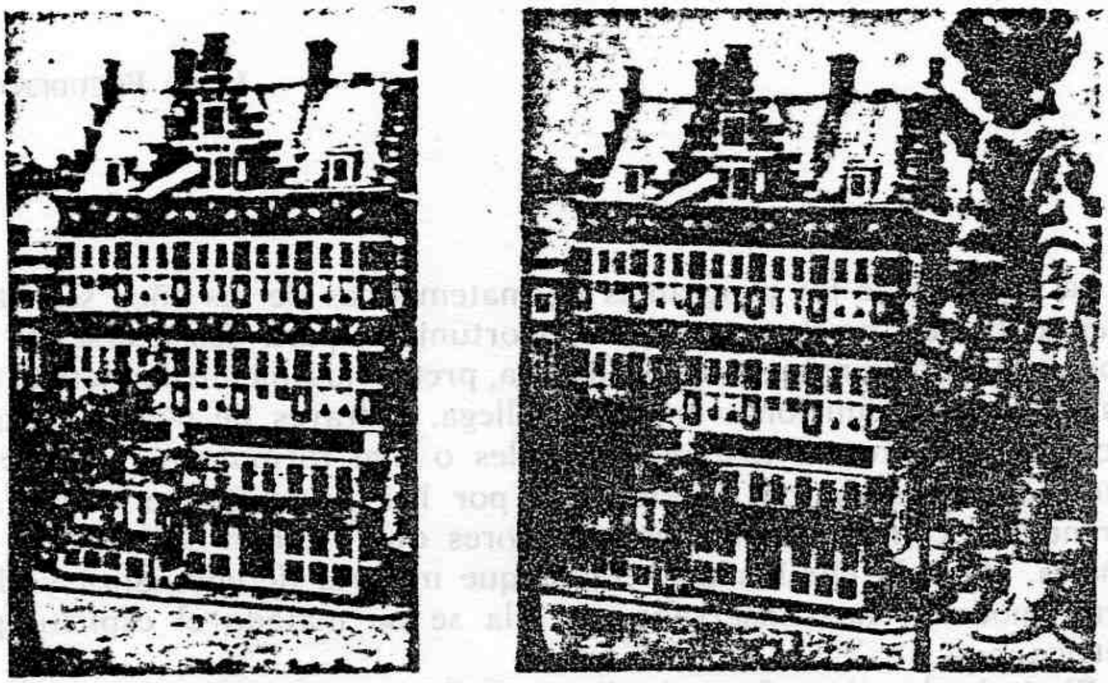


Figura 1

Por supuesto que estas ideas de proporcionalidad son intuitivas, inconscientes. ¿A qué edad franquean estas ideas el umbral de la consciencia? Puedo citar la experiencia realizada con un niño de cinco años. Sucedió en el mes de mayo, después de bastantes días seguidos con sol. Durante nuestro paseo observó algunas nubes en el cielo y dijo: va a llover. Le expliqué que las nubes cargadas de lluvia son bajas y oscuras, mientras que ésas estaban altas. El preguntó: «¿Y a qué altura están las nubes de lluvia?» Yo: «A 1.000 metros». Luego continuó: «Así que si estamos aquí (señalando el suelo) y las nubes de lluvia a esta altura (señalando unos 30 cm. por encima del suelo), entonces esas nubes están a esta altura (señalando un metro por encima del asfalto)».

Otro paseo con el mismo niño cuando tenía siete años y medio. Al llegar a una iglesia quiere saber su altura, es decir, la de su torre. Le pido que diga a ojo lo que mide. Dice: «100 metros». Le contesto: «No, si la de la catedral apenas rebasa esa altura». Le pido que com-

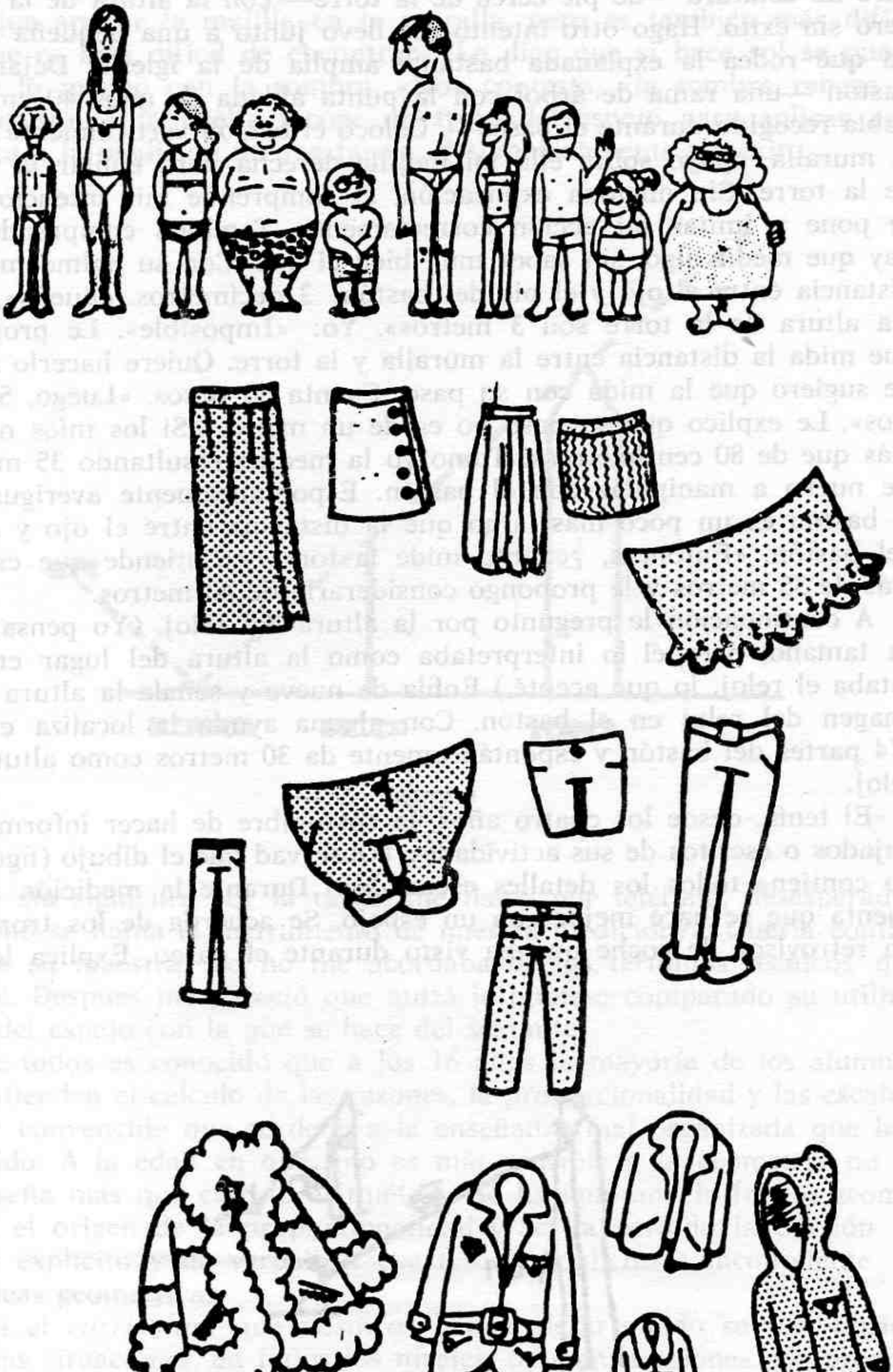


Figura 2

pare mi estatura —de pie cerca de la torre— con la altura de la torre, pero sin éxito. Hago otro intento. Le llevo junto a una pequeña muralla que rodea la explanada bastante amplia de la iglesia. Déjame tu bastón —una rama de árbol con la punta afilada de unos 40 cm. que había recogido durante el paseo—. Coloco el bastón verticalmente sobre la muralla, apoyo sobre ella mi mejilla derecha para enfilar la punta de la torre. Sin ninguna explicación, él comprende mis intenciones y se pone a imitar mi acción correctamente. También comprende que hay que medir algo, sin saber muy bien el qué. Con su palmo mide la distancia entre el ojo y el pie del bastón: 3 decímetros. «Luego», dice, «la altura de la torre son 3 metros». Yo: «Imposible». Le propongo que mida la distancia entre la muralla y la torre. Quiere hacerlo a ojo. Le sugiero que la mida con su paso. Cuenta 50 pasos. «Luego, 50 metros». Le explico que su paso no es de un metro. «Si los míos no son más que de 80 centímetros». Tomo yo la medida resultando 35 metros. De nuevo a manipular con el bastón. Espontáneamente averigua que el bastón es un poco más largo que la distancia entre el ojo y el pie del bastón. «Entonces, ¿cuánto mide la torre?» Entiende que es algo más de 35 metros y le propongo considerarla de 40 metros.

A continuación le pregunto por la altura del reloj. (Yo pensaba en su tamaño, pero él lo interpretaba como la altura del lugar en que estaba el reloj, lo que acepté.) Enfila de nuevo y señala la altura de la imagen del reloj en el bastón. Con alguna ayuda la localiza en las 3/4 partes del bastón y espontáneamente da 30 metros como altura del reloj.

El tenía, desde los cuatro años, la costumbre de hacer informes dibujados o escritos de sus actividades. (Observad que el dibujo (figura 3) no contiene todos los detalles esenciales.) Durante la medición se da cuenta que se hace mejor con un espejo. Se acuerda de los trozos de un retrovisor de coche que ha visto durante el paseo. Explica lo que

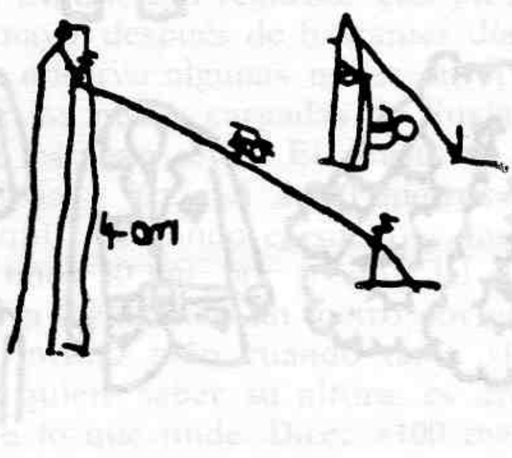


Figura 3

ha previsto —mirad la figura 4—. Añade: «Así es más fácil porque no hay que apoyar la mejilla en la muralla, pero es también más difícil porque es más difícil de encontrar». Le digo que si hace sol se puede hacer lo mismo con la sombra. «No» contesta, «la sombra rebasa la explanada». A la vuelta recoge un trozo del espejo para aplicar esta técnica a la medición de una farola, desgraciadamente sin éxito.

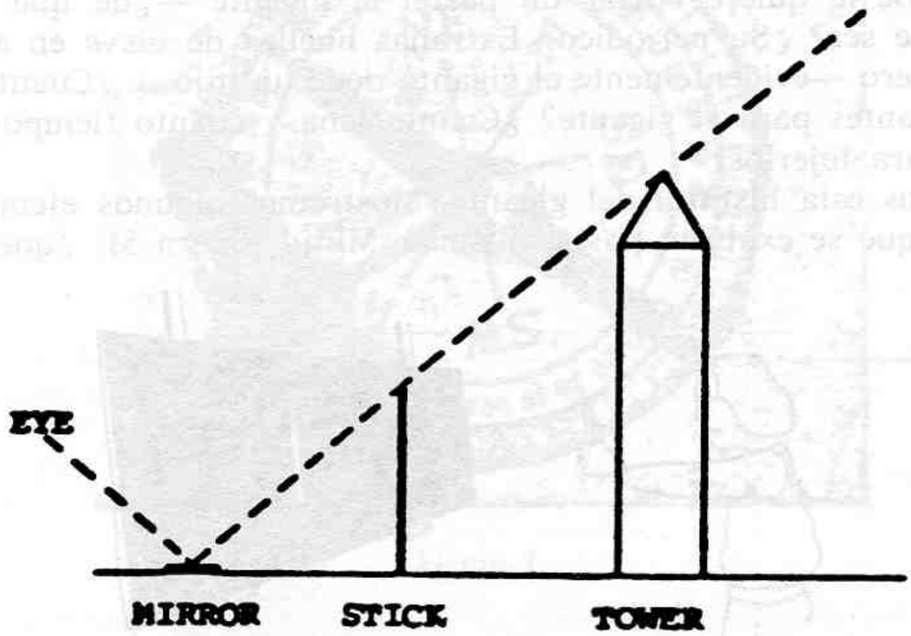


Figura 4

Al día siguiente por la tarde, me llama por teléfono, desesperado: «¿Cómo se llama el instrumento de nuestra medición?». Quería contárselo a su maestra. Yo no me acordaba de los términos técnicos que utilicé. Después me pareció que quizá le hubiese comparado su utilización del espejo con la que se hace del sextante.

De todos es conocido que a los 16 años la mayoría de los alumnos no entienden el cálculo de las razones, la proporcionalidad y las escalas. Estoy convencido que se debe a la enseñanza mal organizada que han recibido. A la edad en que uno es más sensible a la geometría no se le enseña más que cálculo aritmético. Se ha ignorado la fuente geométrica, el origen de la proporcionalidad y se ha perdido la ocasión de hacer explícito y de verbalizar ese tesoro implícito e inconsciente de las ideas geométricas.

En el *curriculum* que nosotros hemos desarrollado se han creado muchas situaciones, en todos los niveles, de comparaciones por proporcionalidad. A título de ejemplo, cito una historieta, material para el tercer curso escolar, «Los saludos del gigante». Su contenido está bien reflejado en las imágenes que voy a describir.

Una ventana de la clase estuvo abierta durante la noche. En la pizarra se encontraba el dibujo de una gran mano. Evidentemente había entrado un gigante. La maestra relata la historia del gigante. Se plantean preguntas. ¿Cuál es su tamaño? Se compara la mano con la de la maestra —es cuatro veces mayor— y se mide a la maestra con una cuerda. Se la cuadriplica y se le escribe al gigante: «Es tu estatura». ¿Qué número de zapato calza? Se compara con los zapatos de la maestra. Se le quiere enviar un pastel al gigante —¿de qué tamaño tendrá que ser? ¿Su periódico? Extrañas huellas de nieve en el jardín del panadero —evidentemente el gigante tiene un hijo—. ¿Cuánto mide? ¿Unos guantes para el gigante? ¿Cuánta lana y cuánto tiempo son necesario para tejerlos?

Dejemos esta historia del gigante. Mostremos algunos ejemplos del 7.º curso que se explican por sí mismos. Mirad (figura 5): ¿qué pasa si

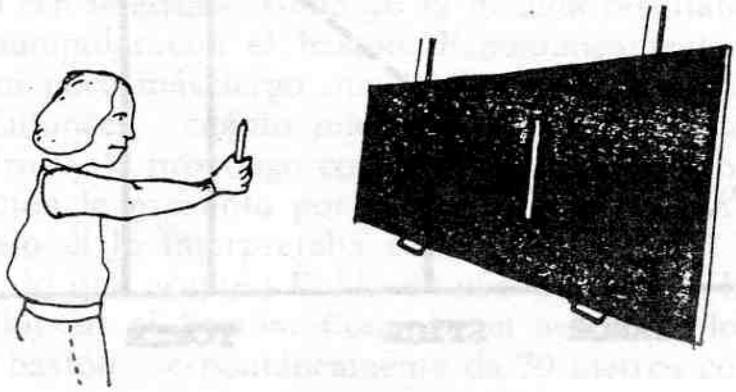


Figura 5

se cierra un ojo o el otro? Luz y sombra: ¿Cómo se explica la foto de la figura 6? ¿es correcta?

Figura 6

La luz sobre esta brújula (figura 7) ¿qué nos indica? ¿es por la mañana o por la tarde? ¿Dónde está la lámpara (en la figura 8)?, las

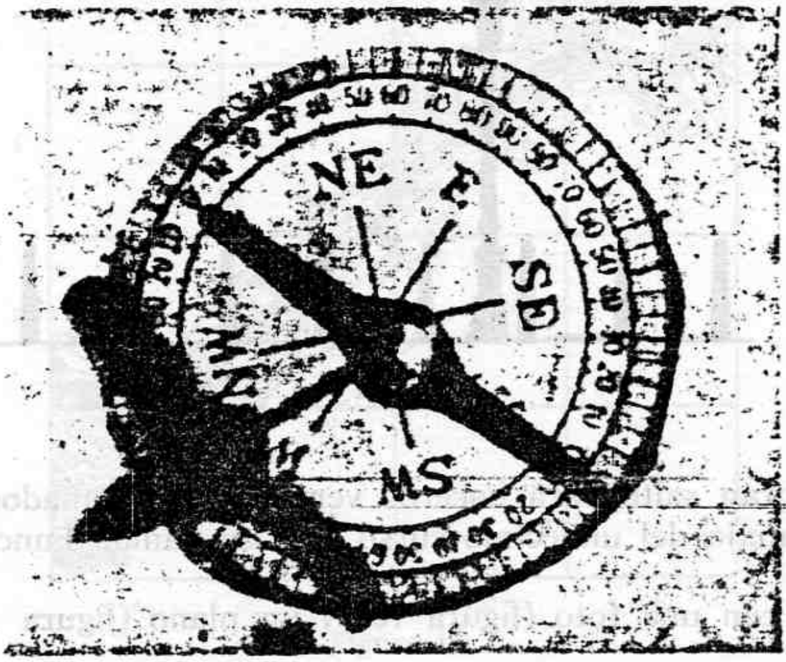


Figura 7

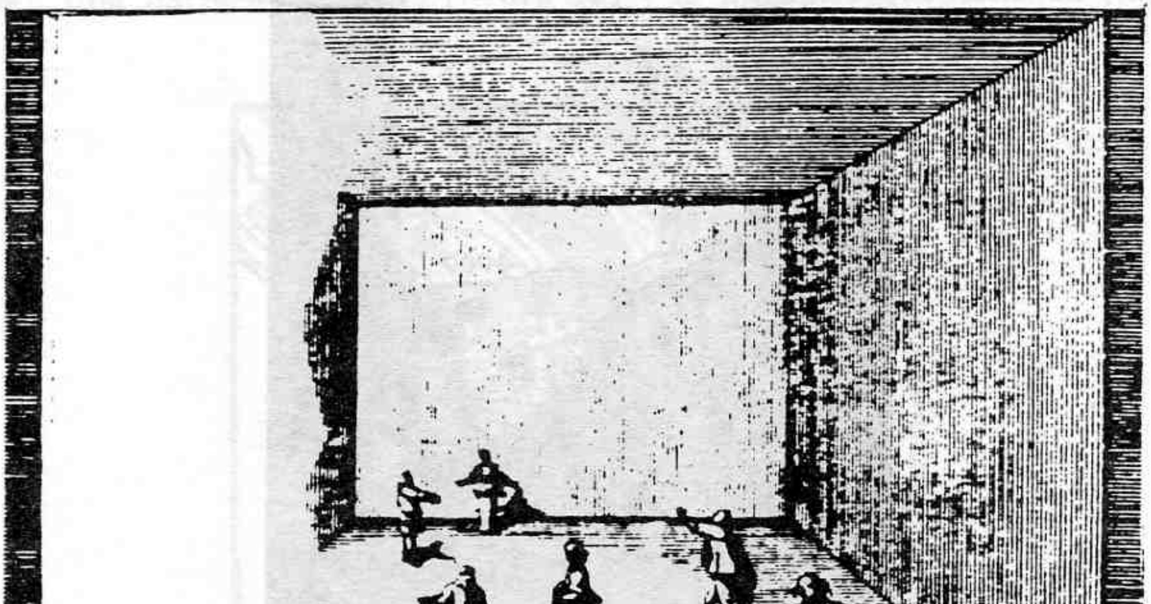


Figura 8

sombras de los postes (figura 9) y estas cuestiones de luz y sombra se repiten en diferentes perspectivas.

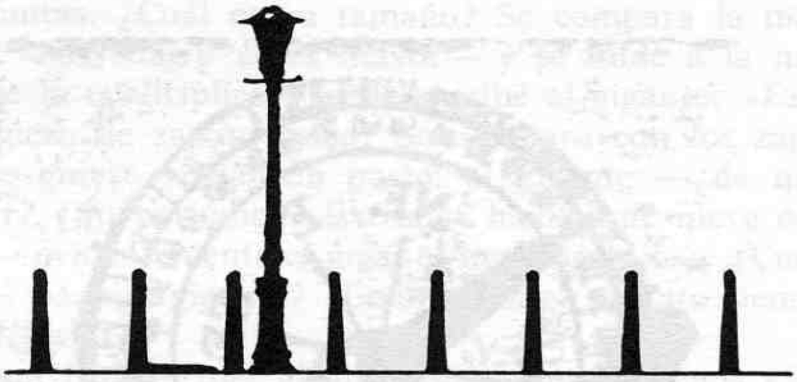


Figura 9

Doy un gran salto para haceros ver ejemplos tomados de un cuaderno de trabajo del undécimo curso, que se llama: Funciones de dos variables.

Empieza con una foto (figura 10) y un plano (figura 11) del Gran

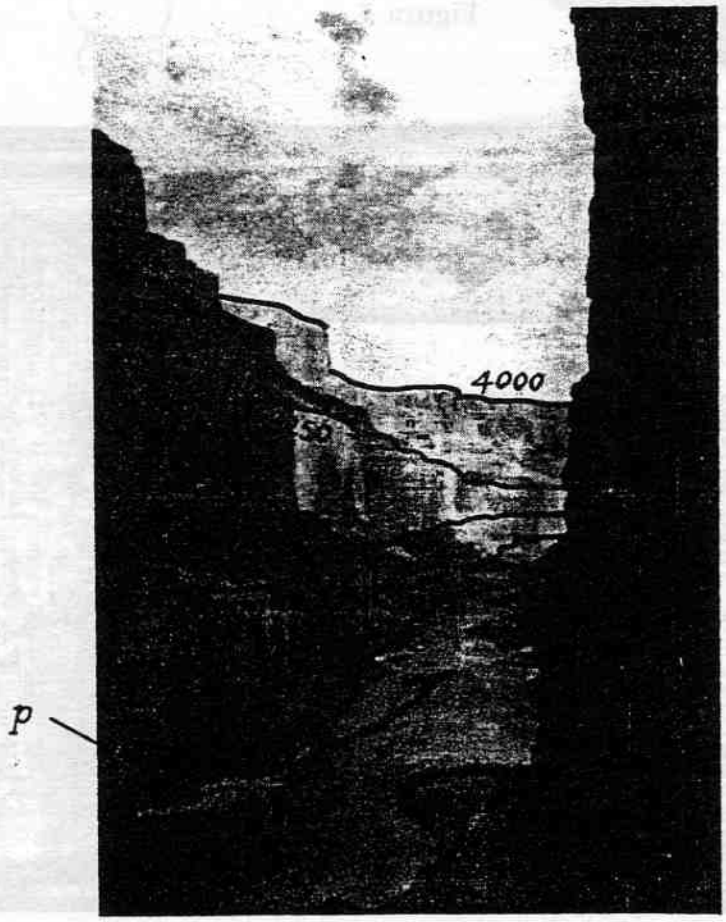


Figura 10

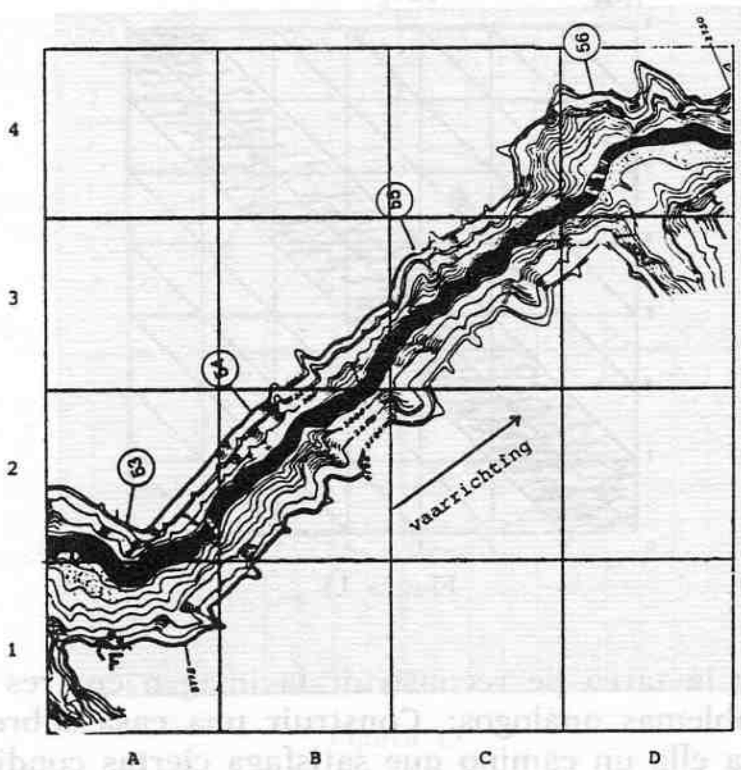


Figura 11

Cañón en el que se han añadido las isohipsas (medidas en pies ingleses). Una parte aumentada (figura 12) y la misma esquematizada (figu-

Figura 12

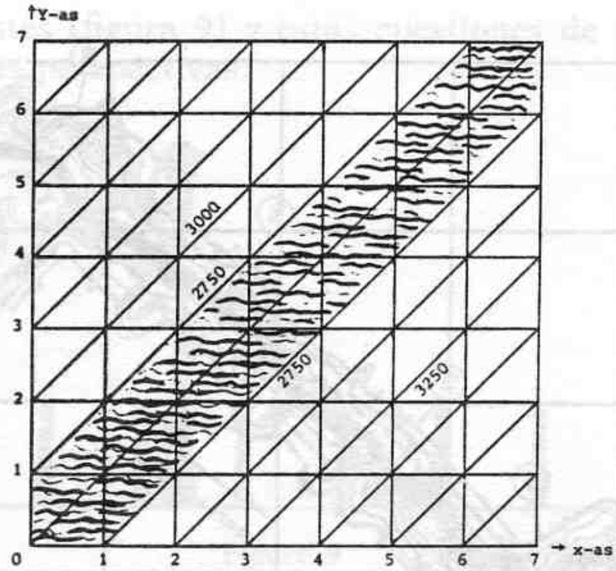


Figura 13

ra 13). Después la tarea de reconstruir la imagen en tres dimensiones (figura 14). Problemas análogos: Construir una casa sobre una colina, y construir para ella un camino que satisfaga ciertas condiciones. ¿Qué

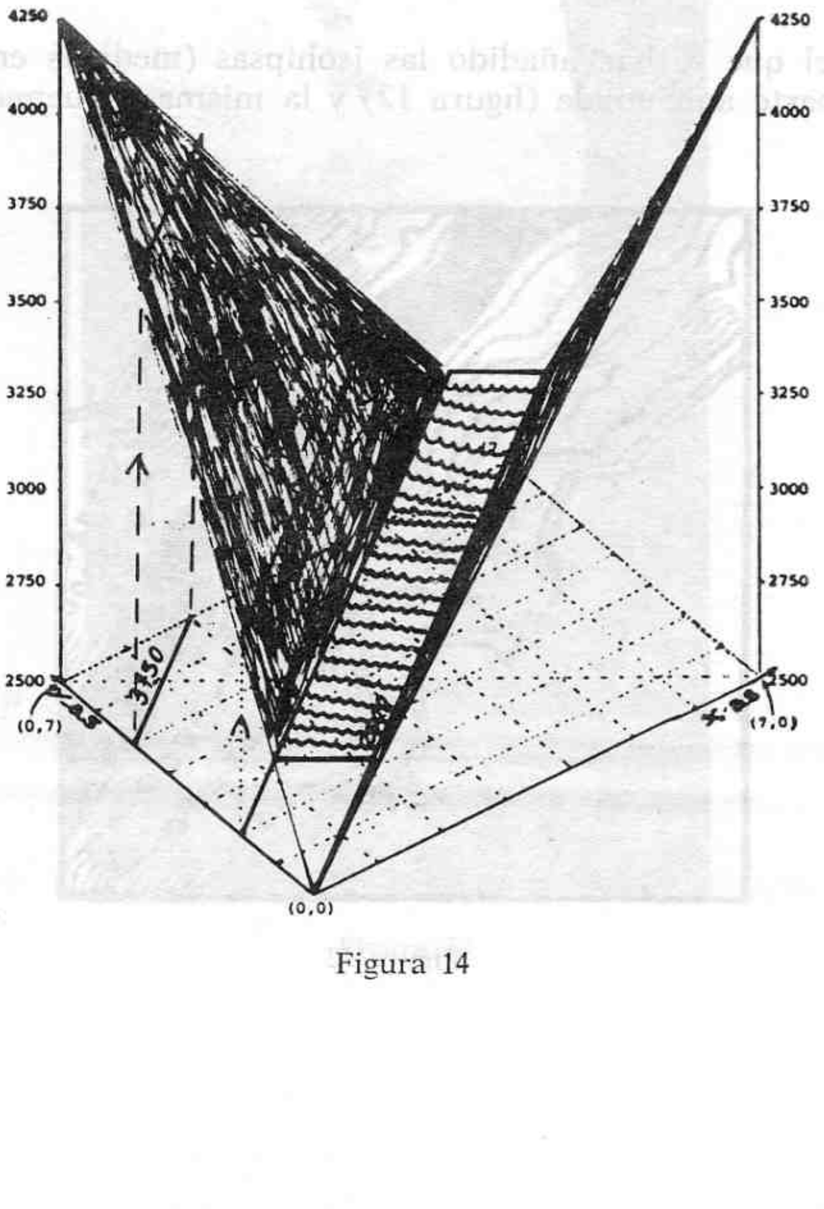


Figura 14

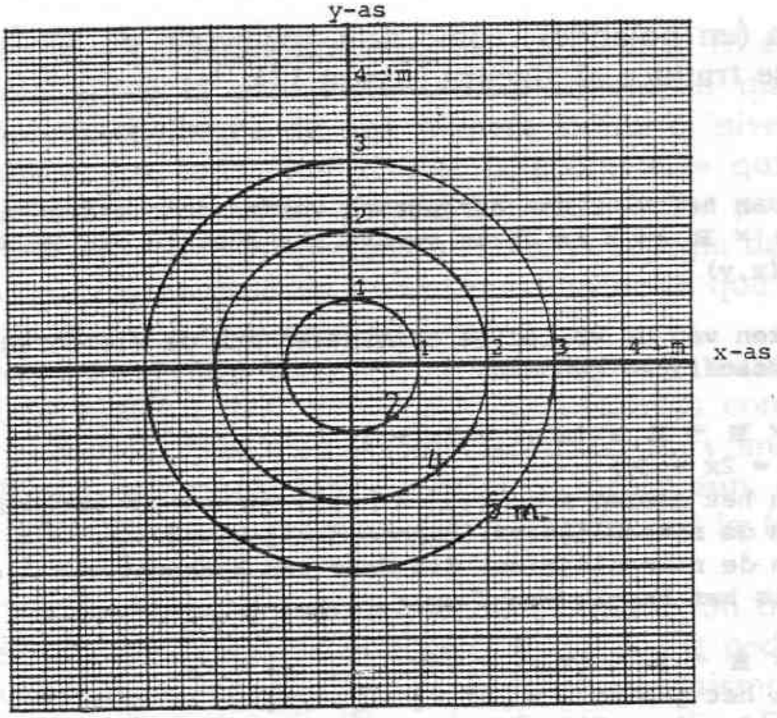


Figura 15

superficie está representada por los datos de la figura 15? Y lo mismo para una pirámide, puertos de montaña (figura 16) y luego, para convenceros de que esto son verdaderamente matemáticas, una página que

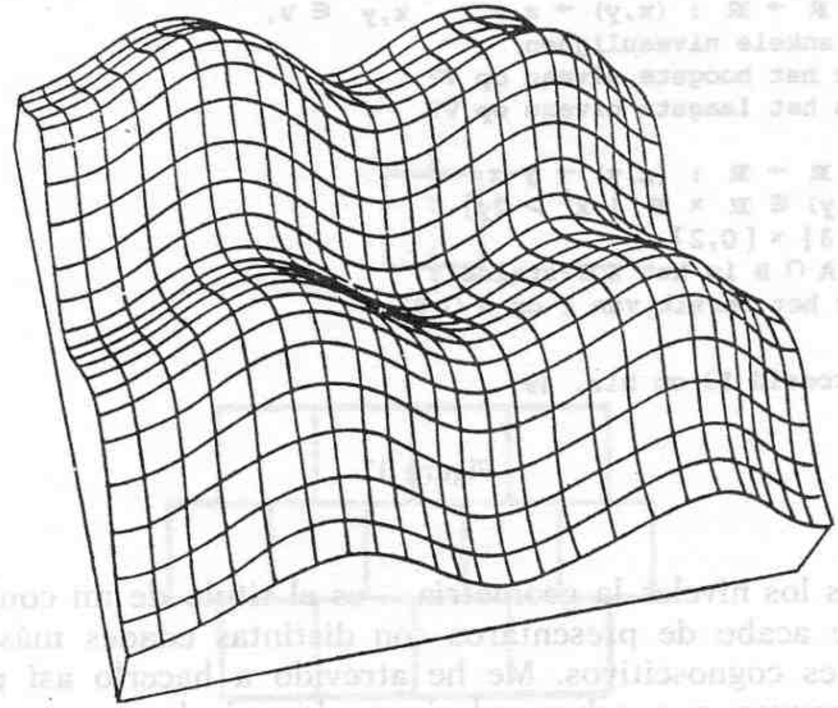


Figura 16

os muestra (en holandés) cómo esta geometría de las funciones de dos variables se traduce al álgebra (figura 17).

Elk punt van het vlak kan aangegeven worden door een getallenpaar $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en h is op te vatten als funktie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $(x,y) \to h(x,y)$

De grafieken van de volledige originelen van de elementen uit het bereik, worden niveaulijnen genoemd.

a. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \to 2x + 3y$
   (of: $z = 2x + 3y$)
   - Teken het gebied $A = [1,3] \times [2,5]$ in een XY-stelsel.
   - Teken de niveaulijn(en) behorend bij niveau 3.
   - Teken de niveaulijn(en) die door een hoekpunt van A gaan.
   - Wat is het bereik van f op A.

b. $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \to y-x$
   - Teken het gebied $B = [-2,2] \times [-1,3]$
   - Teken de niveaulijnen behorend bij de niveaus 0, 1, 2 en 3.
   - Wat is het maximum van g op B.

c. $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \to x + 2y$
   - Teken de niveaulijn behorend bij niveau 0.
   - Kleur het halfvlak waarvoor geldt: $x + 2y < 0$.
   Hoe weet je, dat je het goede halfvlak hebt?
   - Teken de niveaulijn behorend bij niveau 4.
   - Kleur het gebied: $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < x + 2y < 4\}$.

d. $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + 2y \leq 8\}$
   $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \to x.y \quad x,y \in V.$
   - Teken enkele niveaulijnen
   - Wat is het hoogste niveau op V?
   - Wat is het laagste niveau op V?

e. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \to y-x$
   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 > 2y\}$
   $B = [-2,3] \times [0,2]$
   - Teken $A \cap B$ in het XOY-stelsel.
   - Wat is het bereik van f op $A \cap B$?

f. Zie voorbeeld 13 op blz. 49.

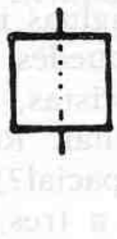
Figura 17

En todos los niveles la geometría —es el título de mi conferencia—. Pero lo que acabo de presentaros son distintas edades más que diferentes niveles cognoscitivos. Me he atrevido a hacerlo así porque me dirijo a personas que saben relacionar los niveles cognoscitivos con las imágenes vistas.

Pese a todo, lo uno no define unívocamente a lo otro. El error de la enseñanza tradicional de la geometría estaba en que la materia que había que enseñar determinaba de una manera rígida el nivel de enseñanza. Al contrario, «En todos los niveles la geometría» quiere decir, además, que muchos de los temas pueden ser entendidos por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes. Toda pedagogía de las matemáticas que aspire a lograr de cada uno el máximo de lo que sea capaz, debe respetar este hecho y utilizarlo.

Pero para reconocer estos niveles no debemos contentarnos sólo con la observación y el análisis de situaciones estáticas como las del laboratorio del psicólogo. Más bien, es preciso observar y analizar procesos de aprendizaje, en la enseñanza formal o, mejor aún, en la actividad libre del niño. De todas formas, ésta fue para mí la fuente más fecunda.

Volvamos a los ejemplos del principio, la comparación de las alturas de las nubes y la medición de la torre. Yo no le he pedido a este muchacho ninguna explicación —todo se explicaba por sí mismo—. Podría multiplicar esos ejemplos. Otro, a los seis años y medio. Después de que él me ha preguntado cuál es el centro de los Países Bajos, le pregunto yo que dónde está el centro de una baldosa en el pavimento. Primero niega su existencia, después señala algún punto aceptable. Le pido que lo haga con más precisión. Señala la línea que está punteada en la figura 18 y calcula su punto medio. Le digo que se hace mejor con líneas oblicuas e inmediatamente traza las diagonales, para determinar su intersección. Todo se explica por sí mismo.



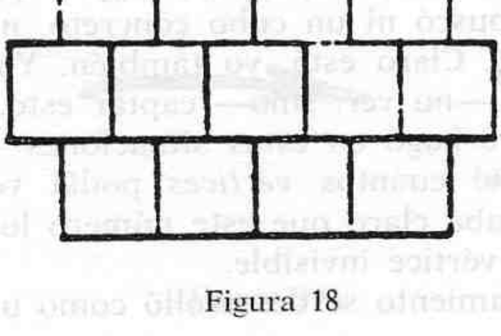


Figura 18

Otro relato de cuando tenía 9 1/2 años. Después de un paseo llegamos a un enorme arenal para los niños, rodeado de una empalizada circular formada por troncos de árbol cortos, pero densos. Pregunté a los chicos que me acompañaban cuántos troncos había. El muchacho tomó una decisión firme. Se puso a caminar a lo largo de la empalizada dando pasos que él suponía que era cada uno de siete troncos. Cuando terminó dijo $38 \times 7 = 266$.

Hm, diréis, ¿es esto geometría? No cabe duda —contesto—. Para *contar* los troncos, ha *medido* la periferia del círculo con una unidad de siete troncos y el resultado fue de 38 unidades. Medir inteligentemente, es lo que hace. Es una pena que no le hubiese preguntado: «¿Hay exactamente 266 troncos?». Probablemente habría contestado más o menos: «¿Por qué hay que saberlo exactamente?» He dicho más o menos, pues el hecho mismo de que haya procedido por medición traiciona la comprensión de la insignificancia del número exacto.

Esperando, su hermana, dos años menor que él, había resuelto el problema a simple vista y sin ningún esfuerzo. Ella dijo: «60» y cuando le pregunté «¿por qué?», contestó: «Se parece a la esfera de un reloj y, como ésta tiene 60 minutos».

A riesgo de ser tomado por loco, debo confesar que considero su respuesta, por equivocada que esté, mucho mejor y más impregnada de geometría que la de su hermano. Ella hacía, en su mundo de cuentos de hadas, con sus ojos radiantes, lo que él hacía, en su mundo de realista, con sus pies. Estoy seguro que, en la misma situación, dos años después, ella habría fijado su mirada sobre un arco correspondiente a cinco minutos, habría contado los troncos de ese arco con sus ojos y multiplicado por doce dicho número.

El muchacho, ahora de 12 1/2 años acaba de conseguir su primer libro de matemáticas (secundaria). Me lo enseñó, y el dibujo de un cubo en una de las primeras páginas me inspiró la siguiente pregunta: «¿Cuántas caras de un cubo puedes ver simultáneamente?» El cubo con el número de sus caras, aristas, vértices y diagonales le es muy familiar, quizá demasiado familiar. Respondió «cinco» (¿consecuencia de una excesiva imaginación espacial?). Cuando le dije «no», redujo el número a cuatro y, finalmente, a tres, lo que constituía su última palabra.

Pero en absoluto la mía. Le pregunté «¿por qué?» y me sorprendí por su reacción. No buscó ni un cubo concreto, ni papel y lápiz, sino que se puso a pensar. Claro está, yo también. Yo me preguntaba de qué manera se puede —no ver, sino— captar esto. Y cuando lo logré, le hice lo que siempre hago en estas situaciones —mal pedagogo que soy yo—. Le pregunté cuántos *vértices* podía ver simultáneamente. Contestó «siete» y estaba claro que este número lo había obtenido restando $8 - 1$: sólo un vértice invisible.

Entonces, el razonamiento se desarrolló como una película: *Un* vértice invisible; cuando no se ve un vértice, tampoco se ven las caras que parten de dicho vértice; un vértice está situado en tres caras; estas tres caras son invisibles. (Se me reprochó que con dos ojos se podían ver más. Sí, cuando se está borracho.)

Lo que más sorprende es lo que yo llamaría la miniaxiomática de este razonamiento: la utilización económica, incluso parsimoniosa hecha de la intuición geométrica por un lado, y la riqueza de la lógica por el otro. En efecto, ¿qué es lo que se supone?

Que un vértice es invisible —luego que hay poliedros en los que todos los vértices son visibles simultáneamente—.

Que todos los vértices de una cara visible son ellos mismos visibles, o, mejor dicho, el recíproco, que las caras que concurren en un vértice invisible son también invisibles —lo que es cierto para todo poliedro—.

Que cada vértice de un cubo está contenido en tres caras.

Estas suposiciones, por así decir, axiomáticas, están lógicamente encadenadas para demostrar la proposición enunciada.

Hay un largo camino desde la primera historia que os he contado hasta la actual, camino caracterizado por las preguntas «¿por qué»? de las que nos abstenemos, que se le formulan implícita o explícitamente al aprendiz o que él mismo se plantea. Merecería la pena investigar este desarrollo, pero desgraciadamente la investigación en psicología, llamada del desarrollo, todavía no ha abordado este problema. A las preguntas «¿por qué?» mal planteadas desde el punto de vista pedagógico, el niño contesta, y con razón, «por esto». ¿Por qué $3 \times 4 = 4 \times 3$? —nos gustaría obtener una respuesta geométrica (figura 19)—, pero por nuestra culpa esta cuestión está planteada en general, o demasiado pronto, o demasiado tarde. Debemos empezar muy pronto a ver la conmutatividad de la multiplicación en tanto que hecho geométrico y perseverar en ello mucho tiempo, para que una pregunta «¿por qué?» no sea castigada con una respuesta «por esto».

Figura 19

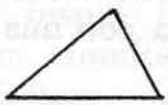
Pese a todo, continuemos nuestra serie de relatos. Al final de un largo y agotador paseo, nos hemos sentado en un vagón de tren, mas la mente del muchacho de 12 años está siempre lo suficientemente despierta como para permitirme matar el rato con un poco de matemáticas.

Dibujo un triángulo y le pregunto cuánto sumarían sus ángulos. Aunque no disponemos de ningún transportador, no parece echarlo en falta. Al momento comprende que para contestar a una pregunta tal en una tal situación, basta con reflexionar. La razón por la que subrayo este hecho es porque es una actitud que bastantes adultos aún no han adquirido después de años de enseñanza matemática: interpretar correctamente una situación —en el caso que nos ocupa, la de estar sentados en un tren, sin transportador y, sin embargo, resolver un problema relativo a los ángulos— situación no puramente matemática, sino también humana.

Quizá mi pregunta era difícil. Quizá hubiera hecho mejor preguntándole: ¿Hay algo que destacar referido a la suma de los ángulos? ¿o habría hecho mejor dibujando algunos triángulos y preguntándole cuál de ellos tendría mayor la suma de los ángulos? ¿o haciéndole comparar la suma de los ángulos de un triángulo y de un cuadrilátero?

En cualquier caso, él no sabía contestar. Le eché una mano. Imagínate que recortamos este triángulo —no teníamos tijeras— y que lo multiplicamos. ¿Podríamos pavimentar el papel con estas copias?

Después de un fracaso inicial, consiguió hacer algo como lo que se ve en la figura 20 —debo confesaros que él había encontrado ya tales modelos—. Todavía le propongo cuestiones sobre las rectas que allí



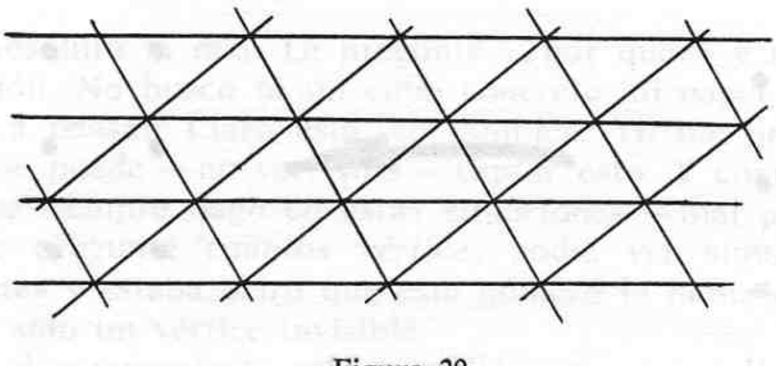


Figura 20

aparecen y sobre el número de tipos de tales rectas— cuestiones que yo habría formulado de otro modo si hubiéramos tenido una regla—. Continué con cuestiones sobre ángulos iguales y podéis imaginaros que comprendió pronto que la suma de los ángulos de un triángulo era de 180°. Claro está que tratamos también del triángulo equilátero y del triángulo rectángulo isósceles.

Luego le tocó el turno al cuadrilátero (convexo), al que él espontáneamente añadía la diagonal necesaria para obtener la suma de 360° de los ángulos. Después de pasar brevemente por el cuadrado y el rectángulo, continuamos con el pentágono. Aquí algo funcionó mal, es decir, no seguía el proceso de aprendizaje que yo había previsto (trazar todas las diagonales que concurren en un vértice). No trazaba más que una diagonal, es decir, que cortaba al pentágono no en tres triángulos, sino en un triángulo y un cuadrilátero, y lo mismo sucedía con el exágono: un triángulo y un pentágono. Esto no me permitía pasar al polígono de mil lados. En lugar de adaptarme a una inducción, debía de imponerle la mía. También le pregunté por el n-gono, aunque yo debía saber que no lo comprendería.

Entonces dibujé un paralelogramo con sus diagonales. «¿Ves cosas que sean iguales?». Primero no veía más que cosas desiguales que, en efecto, atraen más la atención. Con ayuditas le llevé a reconocer que las diagonales del paralelogramo se cortan en su punto medio. Por supuesto que esto se ve de un vistazo. Pero, ¿habéis considerado alguna vez por qué se ve tan fácilmente esto? Ni que decir tiene que sabéis demostrarlo con triángulos congruentes, etc., pero no es esto en lo que yo estoy pensando, porque estoy seguro que esta propiedad del paralelogramo os era conocida bastantes años antes de que tuvieseis ninguna idea de la geometría. Pero, ¿cuál es el origen de este conocimiento? Después de tantos años de instrucción geométrica no podemos recuperar los orígenes. ¿O es posible si no desdeñamos «hacernos como niños»? El niño juega con paralelogramos y otras figuras geométricas para pavimentar el plano con mosaicos y sabe que en un mosaico un paralelogramo encaja de nuevo en su propio agujero, dándole media vuelta. Cuántas veces una figura se adapta a ella misma —en este caso era un problema que el chico ya había encontrado en la enseñanza de la geometría—. En su imaginación invertía el paralelogramo. ¿Qué pasa con las diagonales, y con su intersección? Contestar a esta pregunta es demostrar el enunciado.

Espontáneamente explicaba él, según el mismo principio, por qué los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

En el papel sobre el que hacíamos nuestros dibujos había círculos impresos. El muchacho sabía lo que es un diámetro. Hice un triángulo inscrito sobre un diámetro horizontal, ¿qué piensas de este ángulo de arriba? Es muy natural que lo reconozca como un ángulo recto. ¿Sabes qué es exactamente recto? Me quedé muy sorprendido porque lo explicaba completando el triángulo a un rectángulo inscrito (y además «oblicuo») —notable hecho—. Para pavimentar la vía del razonamiento yo habría podido empezar con un rectángulo inscrito y hacerlo partir por una diagonal para llegar a un triángulo rectángulo inscrito. El camino contrario es más arriesgado, pero a veces tiene ventajas asumir ciertos riesgos.

Me arriesgué incluso más. En uno de los círculos impresos dibujé un cuadrilátero (para más seguridad con el centro M del círculo en el interior del cuadrilátero) y le hice unir M con los cuatro vértices e indicar los pares de ángulos iguales (figura 21). ¿Qué piensas de los ángulos A y C? Inmediatamente se daba cuenta de que juntos eran 180°. ¿Y los ángulos B y D? Lo mismo. Mi siguiente paso era sustituir D por D' en el mismo arco AC. Casi espontáneamente deducía de $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$, y $\sphericalangle B + \sphericalangle D' = 180°$ la conclusión de que los ángulos $\sphericalangle D$ y $\sphericalangle D'$ en el mismo arco eran iguales.

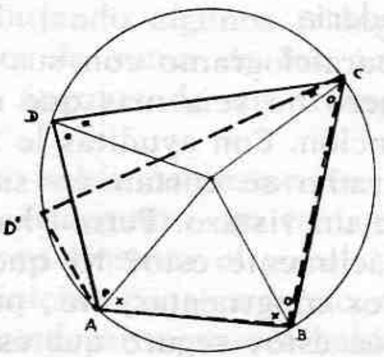


Figura 21

Para terminar esta exposición sobre los niveles de comprensión geométrica, os cuento la última historia.

Conocéis la propiedad de la diagonal espacial AE del cubo de ser perpendicular al plano del triángulo BCD, cuyos vértices B, C y D son los contiguos de A (figura 22). Incluso tal vez hayáis aprendido alguna

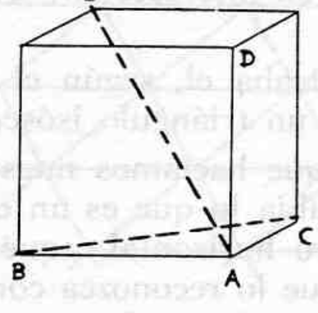


Figura 22

horrible demostración de esta proposición. Si podemos acostumbrarnos a imaginar el cubo de pie sobre un vértice (figura 23), es decir, con su diagonal espacial perpendicular a la mesa, es una proposición banal. En efecto, entonces se ve inmediatamente que el cubo admite una rotación de 120° alrededor de la diagonal espacial que necesariamente cambia los puntos *B*, *C* y *D* entre sí. Una chica de 10 años entendió de este modo esta proposición. A los 17 años lo hacía con el álgebra lineal. En algunos años la escuela ha logrado hacer desaparecer en ella el espíritu de la comprensión geométrica.

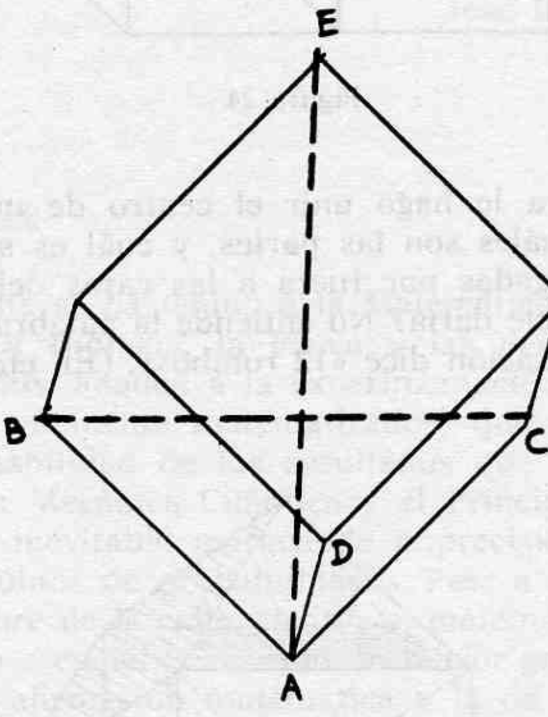


Figura 23

Después de haber escrito estas líneas he tenido una experiencia que que ha sorprendido de tal manera que me siento obligado a añadirla a la última historia. Ha sido de nuevo con el chico del que ya os he hablado.

Imagínate un cubo encima de la mesa. ¿La recta que une este punto (a la izquierda - delante - arriba) con el punto medio de la cara derecha, donde intercepta a la mesa? (figura 23). (Un problema bien conocido —diríamos— con soluciones fastidiosas.)

Primero señalaba algún punto sobre la prolongación de la arista de delante y debajo, luego, él mismo se corregía —«es oblicua»— con un movimiento de «entrar en el espacio», eligiendo entonces un punto «sobre una recta media» de las aristas de delante y detrás, corrigiéndose de nuevo, «aún más oblicua». Y después dijo: «voy a pegar aquí otro cubo igual (figura 24)», e inmediatamente indicó el punto exacto. Por último hace ver cómo una recta variable que pasa por el punto medio de la cara derecha del primer cubo aplica la cara izquierda del primero sobre la cara derecha del segundo.

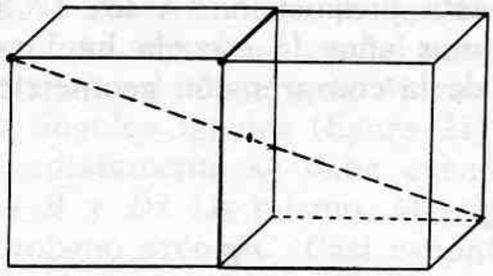


Figura 24

Sin ninguna figura le hago unir el centro de un cubo imaginado con los vértices. ¿Cuáles son las partes, y cuál es su número? Imagínate estas partes pegadas por fuera a las caras del cubo (figura 25), ¿qué clase de superficie daría? No entiende la palabra «superficie», pero después de una explicación dice «12 rombos». (En efecto, es un rombododecaedro.)

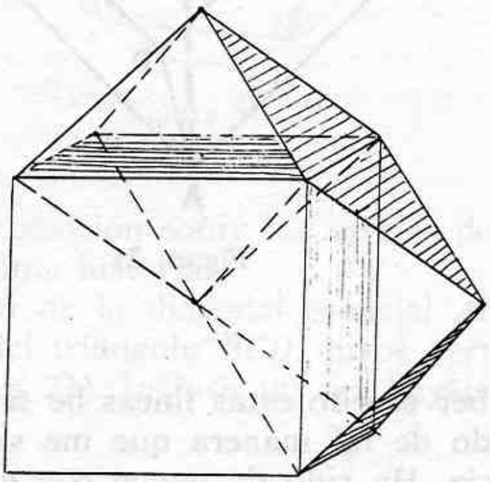


Figura 25

Espero que cuando este muchacho sea hombre, se habrá abolido en la escuela el álgebra lineal.

Estos son los niveles geométricos caracterizados por el empleo de la palabra «¿por qué?»: Nos abstenemos de ella, le preguntamos implícitamente, le preguntamos explícitamente y, finalmente, es el propio aprendiz el que se plantea la cuestión.