MATEMÁTICAS
Y
DESARROLLO CIENTÍFICO

Fernando Bombal

Presentación.

Magnífico y Excmo. Sr. Rector

Dignísimas Autoridades. Señores Claustrales.

Distinguidos Profesores. Estimados Alumnos.

Señoras y Señores.

El azar ha querido que en este año 2.000, declarado *Año Internacional de las Matemáticas* por la Unión Matemática Internacional, con el apoyo y patrocinio de la UNESCO, haya recaído precisamente en la Facultad de Matemáticas la tarea de designar entre sus miembros al encargado de pronunciar esta lección inaugural. Y mis queridos compañeros me han honrado con su confianza al proponerme para tan alto cometido. Como ya manifesté en la Junta de Facultad, la responsabilidad de representar dignamente a mi Centro ante tan distinguida audiencia me intimida sobremanera. Pero, con el mismo espíritu de participación con el que en 1974, a poco de obtener mi plaza como Profesor Agregado, acepté mi primer puesto institucional como Secretario de la recién creada Facultad de Matemáticas, he aceptado ahora este encargo. Entonces las razones de edad fueron determinantes (al ser el Numerario más reciente, me "tocaba" el cargo, sin apenas posibilidad de discusión). Sin embargo ahora, aún formando parte de los miembros más veteranos del Profesorado de mi Facultad, creía que a lo largo de este tiempo había, cuanto menos, amortizado mi "cuota" de participación en actividades institucionales. No han debido pensar lo mismo mis compañeros de Facultad, cuya propuesta no he sabido rechazar. Haré cuanto esté en mi mano para no defraudar su confianza.

El tema que he elegido para esta Lección es la relación entre las Matemáticas y el desarrollo científico. En la declaración del Año Mundial de las Matemáticas, se afirma que con ello se pretende

> "...promocionar el conocimiento y el uso de las Matemáticas en todo el mundo, habida cuenta de que constituyen un pilar fundamental de la cultura, no sólo por ser el lenguaje de la Ciencia, sino por lo que suponen como bagaje necesario para entender el mundo en que vivimos."

En mi intervención trataré de fundamentar, a través de un breve recorrido histórico, parte de las afirmaciones anteriores.

1.- Introducción.

Probablemente desde la aparición misma de la autoconciencia, el Hombre ha sentido la necesidad de comprender y explicar la realidad en que se haya inmerso para, posteriormente, modificarla si es preciso a su conveniencia. De manera absolutamente simplista, esta podría ser la descripción del objetivo de la Ciencia en general. Pero, ¿cómo se consigue este objetivo?. Para intentar responder a esta pregunta, podemos comenzar analizando cómo el ser humano o, en general, los seres sentientes, procesan la información que reciben, a través de los sentidos, del mundo exterior.

Según nos enseña la biología, el sistema nervioso de los animales tiene la propiedad esencial de ser un instrumento para la *simulación* del mundo exterior. De este modo, por ejemplo, en caso de peligro puede evaluar las distintas alternativas y elegir las respuestas necesarias para escapar al mismo. Naturalmente, para ello es preciso haber percibido previamente diferentes formas y situaciones, y tener la capacidad de discernir y recordar las que pueden representar un peligro. Por tanto, el sistema de simulación al que hemos hecho referencia, se completa con un sistema de *análisis y percepción* y un sistema de *memorización.* En el caso del Hombre, este mecanismo automático se enriquece con la aparición de la inteligencia, la capacidad de abstracción y la autoconciencia, de modo que la capacidad de simulación y creación de modelos para describir la realidad circundante, se extiende más allá de las meras necesidades de supervivencia. Y cuando se socializa, esta actividad toma cuerpo y se manifiesta a través del *lenguaje*, que sirve para transmitir e intercambiar información dentro del grupo. Para algunos autores (*cfr.*, p. e. [Br]), "*la ritualización socio-individual de este mecanismo... , ha conducido lentamente a dar una base social a esta actividad del hombre llamada* **investigación...**".

Todo lenguaje, producto del pensamiento, supone ya un nuevo proceso de abstracción y modelización del entorno, y contiene términos aritméticos (los padres deben poder reconocer y evaluar el número de sus hijos; los cazadores deben poder informar del número y posición de las presas, etc.) En fin,

> "*...este lenguaje natural es una herramienta extremadamente flexible para comunicar los factores necesarios para la supervivencia, para expresar las propias emociones e imponer nuestra voluntad, para la seducción y la convicción y capaz de crear los ricos mundos virtuales de la poesía y la religión. Pero el lenguaje natural no es el más adecuado para adquirir, organizar y con-*

tinuar nuestra creciente comprensión de la naturaleza... A partir de Galileo, Kepler y Newton, el lenguaje natural en las ciencias quedó relegado al papel de un intermediario de alto nivel entre el conocimiento científico (codificado en tablas astronómicas, fórmulas químicas, ecuaciones de la teoría cuántica de campos o bases de datos del genoma humano), y nuestro cerebro... Todo lo que es esencial [para el discurso científico] *se transmite... a través de las matemáticas. Y las matemáticas, que inicialmente se utilizaron para describir mejor la estructura de los datos, gradualmente llegan a sistematizarlos de tal forma que empezamos a hablar de las "leyes de la Naturaleza" que generan y explican la infinita variedad de fenómenos. Además, en el proceso de su desarrollo interno... las matemáticas crean, también, mundos virtuales de gran complejidad y belleza interna que desafían cualquier intento de ser descritos en lenguaje natural...*

Esta larga cita del famoso físico-matemático **Yu. I. Manin** ([Ma, pág. 155]) resume muy acertadamente el papel de las matemáticas como lenguaje científico. Pero también apunta a que las matemáticas son algo más que un mero lenguaje: tiene objetivos propios, independientes de su papel como auxiliar de las demás Ciencias.

Como señala el mismo autor más adelante, las matemáticas como lenguaje tienen una propiedad peculiar: a partir de un texto matemático inicial y a través de un juego "formal" con las leyes propias de esta ciencia, se obtiene como "output" un texto matemático que contiene nuevos conocimientos. Podría decirse que el texto inicial contiene un conocimiento implícito que el proceso hace explícito.

Por otro lado, la interpretación de una construcción matemática en el mundo físico puede ser muy variada: la misma ecuación de ondas describe el movimiento de las olas en el mar, la propagación del sonido o la luz, o las *ondas de probabilidad* en la mecánica cuántica.

En los párrafos anteriores, hemos puesto de manifiesto algunos aspectos del papel de las matemáticas como lenguaje científico. En cualquier caso, parece claro que el objetivo básico de la Ciencia es la *modelización* de los distintos aspectos de la realidad (tanto el mundo físico como el universo interior de la mente humana), en términos comprensibles, de modo que se puedan utilizar estos modelos para *predecir* hechos aún desconocidos y, eventualmente, *descubrir* mecanismos que permitan modificar el entorno . En las páginas que siguen, a través del análisis de una serie de momentos históricos, trataremos de mostrar el decisivo papel de las Matemáticas en la consecución de estos objetivos.

2. La aparición de la Ciencia.

Aunque las antiguas civilizaciones Babilónica y Egipcia lograron apreciables éxitos en algunas áreas de conocimiento (Astronomía, Medicina, etc.; sobre todo en aspectos utilitarios o religiosos, y obtenidos a través de procesos esencialmente empíricos), sus matemáticas, desde el punto de vista actual, son insignificantes. La idea de *demostración* no aparece jamás. Salvo algunas hábiles manipulaciones para el cálculo y la aritmética, apenas contienen algo más que una colección de recetas para la resolución de los problemas más usuales de la vida cotidiana, junto con algunas fórmulas geométricas empíricas .

Es en Grecia donde se produce el cambio cualitativo que conduce a la creación del método científico en sentido moderno. Entre los siglos IX y VII antes de Cristo las más importantes *polis* continentales organizaron una serie de grandes migraciones, que dieron lugar a la colonización griega de las costas del Mediterráneo y del Mar Negro. Muchas de estas colonias desarrollaron un importante comercio entre la Grecia continental y las grandes civilizaciones del medio Oriente, anquilosadas y cerradas en sí mismas tras más de 1.500 años de historia. Los viajeros y comerciantes griegos tuvieron así oportunidad de conocer y contrastar distintas explicaciones sobre el origen del mundo y su evolución que, sorprendentemente eran contradictorias entre sí y con las propias creencias de los griegos. Probablemente, la primera reacción de estos viajeros sería pensar que estas contradicciones eran naturales, pues todos esos mitos egipcios, babilonios o hebreos, eran falsos, ya que contradecían las creencias griegas, que debían ser las únicas verdaderas. Pero, probablemente a mediados del siglo VI a.C., tiene lugar una tremenda *crisis de fe* o pérdida de creencias en la civilización griega. Puestos a cuestionar los mitos ajenos, ¡no hay ninguna razón objetiva para concluir que los mitos griegos son los verdaderos, mientras que los demás son todos falsos!.

Esta crisis intelectual, provocada por una pérdida de creencias tan sistemática, constituye el punto de partida de la filosofía griega. Surge así la idea de la necesidad de *demostrar* la veracidad de una determinada explicación acerca del mundo. La posibilidad de encontrar estas *verdades necesarias* se basa en una importante hipótesis de partida: la de que *el mundo real está controlado por leyes inteligibles a la mente humana.*

Esta idea, asumida tácitamente por los escépticos pensadores griegos de alrededor del siglo VI a. de C., es la causante de la gran revolución ideológica que condujo al nacimiento de la Filosofía y las Matemáticas primero, y a la Ciencia en el sentido anteriormente descrito después.

El término griego *mathema* significa "conocimiento adquirido" o "conocimiento que se puede aprender", y originariamente era utilizado por los griegos para designar el estudio del conocimiento en general. La contracción al significado que ahora tiene se produjo lentamente. Al parecer, el cambio ya es completo en **Aristóteles** (384-322 a. de C.), pero aún no en **Platón** (427-348 a. de C.). En todo caso su etimología sugiere claramente que el estudio de las matemáticas partió de la formulación de preguntas relativas al mundo y el deseo de buscar respuestas *verdaderas* a esas preguntas. Pero, si bien la realidad se nos manifiesta en constante cambio, la *verdad sin condiciones* no puede residir en lo que cambia, sino en algo inmutable que nos oculta la realidad aparente y que el filósofo debe descubrir. Ahora bien, ¿donde encontrar objetos inmutables que pudieran servir como modelos para desarrollar métodos para el conocimiento de esa verdad esencial? Los filósofos griegos descubrieron que los objetos matemáticos, números y figuras, que usaban los egipcios y babilonios desde tiempo inmemorial, tenían sorprendentemente esta propiedad de inmutabilidad, por lo que resultaban ser unos objetos singulares y excepcionalmente interesantes. El estudio de las propiedades necesariamente verdaderas de los objetos matemáticos, resultaba mucho más sencillo que las del mundo real y podrían servir como *modelo* para aprender métodos que permitieran abordar el problema verdaderamente importante. Esta es probablemente la razón de la aproximación a las matemáticas de hombres como **Tales** o **Pitágoras**. Los enunciados de los teoremas geométricos de Tales seguramente harían sonreir a los "matemáticos" egipcios y babilonios por su simplicidad y falta de utilidad, pero tienen el carácter de *verdades absolutas*, están *demostrados*, y siguen siendo ciertos ahora, después de más de 2.000 años.

Las primeros métodos de demostración de los griegos estaban basados en razonamientos visuales, especialmente adaptados a los primeros estudios sobre Geometría, la ciencia de *lo que se ve*, y a la aritmética pitagórica, esencialmente discreta. No se trataba de un método especial para tratar los objetos matemáticos, sino del mismo método empírico utilizado para analizar la realidad física, pero que al aplicarlos sobre los objetos tan ontológicamente simples como los matemáticos, se obtenían resultados con un grado de certeza irrefutable.

Sin embargo, el descubrimiento a mediados del siglo V de la existencia de segmentos inconmensurables (es decir, sin unidad de medida común), puso en cuestión la teoría atómica pitagórica, según la cual todo objeto estaba formado por una colección de unidades o *átomos* individuales e indivisibles (recuérdese la afirmación de que *todo es número*). Esta teoría permitía visualizar fácilmente los razonamientos geométricos, convirtiéndolos en muchos casos en problemas aritméticos. El descubrimiento de los inconmensurables puso fin a esta situación: la geometría *no* es aritmética y los objetos matemáticos, no eran tan simples como se pensaba. De hecho, alguna propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas. Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos.

Y ciertamente, en algún momento de la segunda mitad del siglo V a. C, un grupo de matemáticos griegos establecieron un nuevo método para el descubrimiento de la verdad: el **método axiomático-deductivo**, que es esencialmente el mismo que usamos hoy. Se trata de, partiendo de unas pocas verdades *evidentes* (o *axiomas*), y a través de una serie de etapas sucesivas muy simples, obtener una cadena de afirmaciones, con la propiedad de que una cualquiera de ellas es verdadera con toda seguridad (en el dominio de objetos que estamos estudiando) siempre que lo sean todas las anteriores. A las leyes que rigen las formas correctas de pasar de una afirmación a otra de la cadena, se les llamó más tarde *leyes lógicas* o *deductivas*, y tienen un carácter formal, independiente del carácter de verdadero o falso de la afirmación a la que se aplica. A estas cadenas de afirmaciones lógicamente correctas, los griegos las llamaron **demostraciones**.

A pesar de que el origen de la matemática está precisamente en la necesidad de encontrar métodos fiables para comprender la realidad, los filósofos griegos quedaron fascinados por la potencia y elegancia de la lógica deductiva. Ello repercutió en que pusieran mucho más énfasis en las ciencias *puras* (de las que, por antonomasia, la más pura es la Matemática y, en el caso griego, más concretamente, la Geometría) que en sus aplicaciones. En esta postura tuvo gran influencia la actitud de Platón, que menospreciaba toda actividad orientada a la práctica. Esta puede ser una de las razones de las limitaciones de la contribución de los griegos a la Física teórica, tal como la concebimos hoy en día. La insistencia de Aristóteles en distinguir claramente entre Física y Matemáticas (en sentido amplio, esto es, incluyendo lo que hoy llamaríamos Óptica geométrica y Astronomía) impidió que los griegos (con alguna excepción; véase más adelante) desarrollaran una Física matemática conceptualmente similar a lo que hoy entendemos con tal nombre. La *Physica* de Aristóteles puede considerarse el paradigma de la contribución griega en esta disciplina. Aunque en ella aparecen algunas de las ideas básicas de la mecánica y la dinámica, como las nociones de tiempo, espacio y movimiento, para algunos autores se trataría más bien de un tratado sobre "Principios de Filosofía Natural", lleno de equivocaciones, inconsistencias y contradicciones. A pesar de ello, la concepción del mundo de Aristóteles prevaleció como teoría dominante durante casi 2.000 años.

Como agudamente señala S. Bochner ([Bo; Cap. 6]), probablemente hay una razón más profunda para explicar la inexistencia de una matematización de la Física en la civilización griega. En efecto, ya hemos dicho que la matemática griega es, esencialmente, geométrica. Los griegos desarrollaron una completa *teoría de las proporciones* que les permitía establecer la razón $A_1 : A_2$ entre los valores de una magnitud dada (longitud, área, peso, etc.) y compararla con la razón $B_1 : B_2$ entre los valores de otra magnitud, pero su cálculo de proporciones no permitía formar el producto $A \cdot B$ de dos magnitudes *distintas* en general. El producto de una longitud por un área daba lugar a un volumen, pero era conceptualmente inconcebible considerar el producto de un peso por una longitud, por ejemplo. Como consecuencia, la introducción de una noción de *momento* en mecánica se retrasó más de

2.000 años. Esta dificultad conceptual, junto con la falta de un simbolismo algebraico adecuado, impuso severa restricciones no sólo en la Física griega, sino en muchas áreas de su matemática.

No obstante, algunos matemáticos griegos realizaron importantes contribuciones en varias áreas de la Física y la Astronomía. Entre todos, destaca la figura gigantesca de **Arquímedes** (287-212 a. de C.), uno de los mayores genios que han existido, quien, junto a maravillosos descubrimientos matemáticos, sentó las bases de varias partes de la Física moderna, a pesar de las limitaciones que hemos señalado anteriormente: la Mecánica y la introducción del concepto de *fuerza*, el estudio de la palanca (cuya ley descubrió), la Hidrostática (recordemos el "*principio de Arquímedes*"), etc. Y sus estudios no quedaron en meras descripciones teóricas: el *tornillo de Arquímedes*, un tornillo transportador, muy pronto sirvió para el riego artificial a gran escala. Sus invenciones mecánicas durante el asedio de su ciudad natal, Siracusa, por las tropas romanas en la Segunda Guerra Púnica, sembraron el terror entre los atacantes: Bastaba que hubiera alguna actividad inusual en las murallas para que las tropas romanas huyeran despavoridas, pensando que se les venía encima algún nuevo invento del genial Arquímedes en forma de lluvia de piedras, aceite hirviendo o "fuego griego", el *napalm* de la antigedad. De hecho, después de dos años de asedio, la ciudad sólo pudo ser tomada por la traición de alguno de sus habitantes. Desgraciadamente, y a pesar de las órdenes explícitas de Marcelo, jefe del Ejército romano, durante el saqueo subsiguiente pereció también Arquímedes. Era el año 212 a. de C.

Además de Arquímedes, no debemos olvidar las aportaciones de **Eratóstenes** (276-194 a. de C.) sobre la determinación del radio de la Tierra, o el grandioso trabajo de observación y cálculo astronómico de **Ptolomeo** (hacia 85-165), recogido en una monumental obra de 13 libros denominada por los árabes *Almagesto*, esto es, "el más grande". En el libro I del Almagesto se encuentra una tabla, correcta hasta el último segundo, de todos los arcos desde medio grado hasta 180 grados, que fue una herramienta indispensable para los astrónomos de los mil años posteriores. Por otro lado, el primer tratamiento sistemático de la teoría geométrica de la luz se encuentra en las obras *Optica* y *Catoptrica* (e.d., teoría de los espejos) de **Euclides** (alrededor del 300 a. de C.), a las que siguieron otras de Arquímedes, **Apolonio** (hacia el 190 a. de C.) y **Heron** (siglo I d. de C.)

En cualquier caso, a través de su aproximación lógica y deductiva a la naturaleza, los Griegos obtuvieron una evidencia sustancial de que el Universo está gobernado por una serie de leyes y posee un orden, y las Matemáticas son la llave para expresar esas leyes y descubrir ese orden.

3. Un largo interludio hasta el Renacimiento.

Con el establecimiento del Imperio Romano en el Mediterráneo, la cultura Griega comienza un lento declive, refugiándose principalmente en Alejandría, hasta su conquista por los Árabes en el año 641 d. de C. Por otro lado, el colapso del Imperio Romano de Occidente en el siglo V de nuestra Era llevó a Europa a un largo período de oscuridad en el aspecto cultural y científico. La herencia cultural griega fue conservada en parte y finalmente transmitida a Europa a través del Imperio Bizantino primero y, sobre todo, de los Árabes, quienes la enriquecieron con la incorporación de las ideas sobre aritmética y álgebra de las civilizaciones orientales, especialmente con la notación posicional y la introducción del 0. Uno de los centros fundamentales de transmisión de cultura fue precisamente la Escuela de Traductores de Toledo, con **Gerardo de Cremona** (1114-1187) a la cabeza. La asimilación y aceptación de la cultura griega y en particular del pensamiento Aristotélico por parte de la Iglesia Católica a partir del siglo XIII, sentó las bases para el renacimiento intelectual en la cultura Occidental.

Por otro lado, la aparición de una nueva clase de artesanos libres despertó el interés en la búsqueda de nuevos materiales y, en general, por el desarrollo de la tecnología. Las exploraciones geográficas a través de miles de kilómetros de mar abierto demandaban nuevos y más precisos métodos para determinar la posición; el incremento del comercio exigía nuevos y más rápidos mecanismos de cálculo; la introducción de la pólvora significó la aparición de nuevos problemas militares, como el movimiento y trayectoria de los proyectiles. Al mismo tiempo, el conocimiento de extrañas civilizaciones provocó un sentimiento de apertura en la cultura europea y la invención de la imprenta permitió la diseminación del conocimiento, hasta entonces controlado férreamente por la Iglesia. Todo, en fin, contribuyó a que la idea de la búsqueda del conocimiento y el desarrollo científico para dominar la Naturaleza se convirtiera en un rasgo dominante de la civilización Europea moderna, preparando el terreno a la revolución científica que tuvo lugar a partir del siglo XVII.

La aceptación de las ideas de los griegos sobre la Naturaleza por parte de la Iglesia Católica tuvo también una importante consecuencia: La creencia griega en un universo matemáticamente diseñado se contraponía a las ideas medievales acerca de la omnipresencia de Dios y su acción constante sobre el Mundo. Como síntesis de ambas concepciones surgió la doctrina de que el Dios cristiano había diseñado el universo *matemáticamente* y de ahí la gran importancia del descubrimiento de este diseño matemático por parte de la divinidad. La búsqueda de las leyes matemáticas de la naturaleza se convirtió así en una cuestión de afirmación religiosa.

3.1 La Nueva Astronomía.

Uno de los ejemplos más claros de este maridaje entre la concepción griega de la Naturaleza y la visión cristiana del mundo, revelada a través de las Escrituras, se encuentra en la Revolución astronómica protagonizada por **N. Copérnico** y **J. Kepler**. Hasta el siglo XVI, la única teoría astronómica aceptada por los astrónomos profesionales (y aplicada para el cálculo de calendarios y la navegación) era el sistema geocéntrico de Ptolomeo, contenido en los últimos 12 libros del Almagesto, al que ya hemos hecho referencia. Como la mayoría de los grandes pensadores de la antigedad, Ptolomeo postuló un universo esencialmente geocéntrico, lo que estaba en concordancia con la idea cristiana del Hombre como centro del Universo. Por otro lado, la perfección en el diseño de la Naturaleza exigía que los astros debieran describir sólo líneas perfectas, como el círculo o la recta, y movimientos uniformes. Los astrónomos griegos establecieron un ingenioso esquema para explicar los movimientos aparentes de los astros en estos términos. Básicamente, en este esquema un planeta P recorre con movimiento uniforme un círculo con centro S (en muchos casos el Sol, aunque en algunos era simplemente un punto matemático para explicar las observaciones), que a su vez se mueve con velocidad constante sobre un círculo de centro en la Tierra. El círculo descrito por S se llama el *deferente* del planeta, y el recorrido por P el *epiciclo*. Seleccionando apropiadamente los radios del epiciclo y el deferente, la velocidad del planeta y la del centro del epiciclo, Ptolomeo pudo explicar los movimientos aparentes de los planetas conocidos en bastante concordancia con las observaciones. Para el tiempo en que **Copérnico** (1474-1543) comenzó a trabajar en un nuevo sistema astronómico, la teoría Ptolomeica se había vuelto mucho más complicada. Más y más círculos (hasta 77 en estas fechas) se habían tenido que introducir para adaptar la teoría a las nuevas observaciones. Estudioso de los griegos y convencido de que el Universo estaba diseñado armoniosamente, Copérnico pensaba que debía existir una teoría mucho más simple que explicara los hechos observables. Y efectivamente, Copérnico consiguió reducir el número total de ciclos de 77 a 34, manteniendo el mismo esquema de Ptolomeo, pero con la modificación sustancial de que el *sol* era ahora el centro de cada deferente. De este modo, la tierra abandonaba su posición privilegiada de centro del universo para convertirse en un planeta más moviéndose sobre un epiciclo, y también en torno a su eje (con lo que transfiere el movimiento diurno de la esfera celeste a la Tierra, simplificando sensiblemente el modelo).

En realidad, **Aristarco de Samos** (310-230 a. de C.) había concebido un sistema similar en el siglo III a. de C., pero las dificultades planteadas por la hipótesis de una Tierra en movimiento eran mayores que las ventajas. Copérnico tampoco pudo encontrar respuestas a las objeciones planteadas por un sistema heliocéntrico y una tierra en movimiento, pero estaba convencido de su teoría, por su mayor simplicidad y belleza. Según sus propias palabras,

> *Vale más admitir el movimiento de la Tierra, aunque pueda parecer absurdo, que dejar que el espíritu se pierda y se desgarre por la muchedumbre casi infinita de círculos y orbes de la Astronomía geocéntrica...*

Fruto de sus investigaciones fue un libro notable, *De revolutionibus orbitum coelestium.* Copérnico fue lo bastante cauto como para retrasar la publicación de sus ideas hasta casi el final de sus dias. De hecho, sólo se animó a ello después de que un joven profesor de la Universidad de Wittenberg, **G. J. Rético**(1514-1574) elaborara y publicara en 1540 un breve resumen de su obra, la *Narratio prima*, que tuvo un éxito inmenso. Para evitar la palmaria contradicción de la nueva teoría con algunos pasajes literales de la Biblia, un célebre obispo luterano, **A. Osiander** (1498-1552) propone a Copérnico escribir un prólogo a *De Revolutionibus* en el que se adopte una concepción fenomenista de la ciencia: Ésta, y en especial la Astronomía, no tiene más que un fin: "salvar las apariencias" (*"sal-*

vare apparientias"), e.d., relacionar y ordenar las observaciones por medio de *hipótesis de trabajo* que permitan calcular, prever y predecir, sin ninguna pretensión de encontrar las causas ocultas. Esas hipótesis no deben pretender ser verdaderas, ni siquiera verosímiles, sino simplemente sencillas y convenientes para el cálculo.

La posición de Osiander no es nueva, pues tiene sus orígenes en la antigua Grecia. De hecho, al parecer el origen del sistema de Ptolomeo se encuentra en el encargo que Platón hizo a Hiparco para que encontrara un modelo que explicase los movimientos aparentes de los astros (basado, eso sí, en la inmutabilidad del movimiento circular uniforme). Pero los mismos griegos se dieron cuenta de que puede explicarse el mismo conjunto de fenómenos (astronómicos en este caso) con hipótesis matemáticas alternativas, y también sabían que la elección entre dos explicaciones alternativas (matemáticamente equivalentes) debe hacerse de modo que el modelo elegido sea el más sencillo posible (*Almagesto*, Libro XIII, Cap 2). Esta concepción se fue extendiendo a toda la ciencia a partir del siglo XVII y se explicita claramente a comienzos del siglo XIX, cristalizando en la corriente llamada *convencionalismo*.

Así pues, al principio no hubo una oposición decidida a la teoría Copernicana por parte de las Iglesias (Católica y Luterana). Pero la trascendencia de la nueva teoría para una nueva concepción del Universo en manos de abanderados como **Giordano Bruno** (detenido por la Inquisición en 1592, y posteriormente excomulgado y quemado en la hoguera en Roma, en 1600), hizo cambiar las cosas: *De Revolutionibus* quedó inscrito en el Índice de libros prohibidos en 1616.

A pesar del cambio revolucionario que suponía la teoría Copernicana, se seguían manteniendo en ella dos suposiciones básicas de la teoría Ptolomeica: los astros describen *círculos* y se mueven a *velocidad uniforme*. El abandono de estas hipótesis fue obra de un hombre singular, **J. Kepler** (1571-1630).

Como Copérnico, Kepler era un hombre profundamente religioso, y estaba convencido de que el Universo había sido creado por Dios de acuerdo con algún plan bello y simple. Por ello, al hacerse cargo del puesto de *Profesor de Matemáticas y Moral* en la escuela del Seminario de Graz en 1594, se dedicó de lleno a la búsqueda de ese plan que explicara simple y satisfactoriamente los hecho observados. El porqué había exactamente seis planetas (los únicos conocidos en su tiempo) y la búsqueda de alguna ley que explicara sus distancias sucesivas al sol le preocupaban sobremanera. En 1595 creyó haber encontrado la solución: los planetas describirían órbitas circulares en torno al sol de acuerdo con el siguiente modelo:

> " La Tierra es la medida de todas las demás órbitas (y se representa por una esfera). Ella circunscribe un dodecaedro: la esfera que contiene a éste, es la de Marte. La órbita de Marte circunscribe un tetraedro; la esfera que lo contiene es la de Júpiter. La órbita de Júpiter circunscribe un cubo; la esfera que lo contiene es la de Saturno. Pon ahora en la órbita de la Tierra un icosaedro; la esfera inscrita es la de Venus. En la órbita de Venus coloca un octaedro; la esfera a él inscrita es la de Mercurio."

Kepler quedó entusiasmado por la presunta revelación del plan divino sobre la estructura del Universo. Su obra *Mysterium Cosmographicum* le hizo célebre y conocido entre los astrónomos y matemáticos. Galileo le dio la bienvenida como *"compañero en la investigación de la verdad"* y el eminente astrónomo danés **Tycho Brahe** (1546-1601), a la sazón en Praga bajo la protección del emperador Rodolfo II, reconoció su talento y le invitó a visitarle. Kepler aceptó la invitación y llegó a Praga a mediados de Octubre de 1600. A la muerte de Tycho Brahe, en 1601, Kepler fue nombrado "matemático imperial".

En un trabajo efectuado a lo largo de décadas, Tycho Brahe había acumulado la mayor cantidad y las mejores observaciones astronómicas realizadas hasta la fecha. La abrumadora evidencia experimental convenció pronto a Kepler de la falsedad de su teoría.

Tycho puso a disposición de Kepler las mediciones relativas a Marte, el planeta de órbita más excéntrica, para que tratara de determinar con exactitud su órbita y posición. Después de cálculos tremendamente laboriosos (recordemos que aún no se empleaban los logaritmos) y ensayar todo tipo de órbitas circulares para la Tierra y Marte, Kepler no pudo encontrar una que concordara con las observaciones. Al fin, decidió abandonar la idea de un movimiento *uniforme* a lo largo de un círculo excéntrico, y ensayar con un movimiento circular *variable*, inversamente proporcional a la distancia al sol. Con sorpresa descubrió que ahora las *áreas* barridas por un radio vector que uniera Marte con el Sol sí que eran uniformemente proporcionales a los tiempos (esta es la **segunda Ley de Kepler**) y los datos se ajustaban a las observaciones, dentro de los márgenes de error. Respecto a la forma de la órbita, Kepler probó con muchas curvas. En cuanto se abandonaba la forma circular, las dificultades de cálculo se volvían abrumadoras y, lo que es peor, se destruía la ley de las velocidades. Finalmente, probablemente inspirado por sus lecturas de los geómetras griegos, lo intentó con una elipse, colocando al sol en uno de los focos. Y de repente todos los datos concordaban perfectamente: ¡se verificaba la ley de las áreas y las posiciones se ajustaban a la perfección con las observaciones de Tycho! Así quedó establecida la **primera Ley de Kepler**: los planetas describen elipses en las que el Sol ocupa uno de los focos. De esta forma, una curva inventada por los geómetras griegos 2.000 años antes para la resolución de un problema puramente geométrico (la duplicación del cubo), de repente aparecía como uno de los diseños esenciales de la Naturaleza.

En la *Nueva Astronomia*, aparecida en 1609, aparecen recogidas estas dos primeras Leyes. La **tercera Ley**, que establece que el cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica, la descubrió Kepler, tras innumerables ensayos, en 1618, y apareció publicada en su obra *Harmonices Mundi*, en 1619.

4. La Revolución Científica.

4.1 El Programa de Galileo.

La invención del telescopio por **Galileo** (1564-1642) a comienzos del siglo XVII vino a suponer un apoyo decisivo para las nuevas teorías astronómicas. El descubrimiento de las cuatro lunas mayores de Júpiter, de que Venus presentaba fases diferentes, como la Luna, o la detección de manchas en el Sol y montañas en la Luna, convencieron a Galileo de la bondad de la teoría Copernicana, que permitía explicar claramente esos hechos.

También Galileo es uno de los grandes precursores de la gran Revolución Científica que se iba a iniciar en el siglo XVII. Su afirmación de que *"la Naturaleza está escrita en lenguaje Matemático"* incluida en uno de sus libros en 1623, es tremendamente sugerente y tuvo una influencia decisiva en los hábitos de los científicos posteriores. Para Galileo, los principios básicos de la Física deben derivarse de la experimentación y la inducción para descubrir un principio básico simple, a manera de los axiomas geométricos de Euclides, que permita obtener una descripción matemática de la realidad observada y realizar predicciones comprobables. En todo caso, la afirmación de Galileo era singularmente arriesgada para la época, como demostraron pronto los hechos.

Hacía ya 20 años que Galileo estudiaba la caída de los graves, pero no encontró fórmulas satisfactorias hasta 1632. En su *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo* (es decir, la teoría de Ptolomeo y la de Copérnico), escrito en lenguaje ordinario, la obra toma la forma de una amable discusión entre tres personajes para hacer una crítica feroz de muchas de las teorías vigentes e introducir las visiones completamente nuevas del autor sobre la gravedad, el movimiento en el vacío y, sobre todo, su percepción de que las leyes cuantitativas que rigen los movimientos acelerados *deben* poder deducirse lógicamente de una proporción matemática simple. De esta manera, Galileo se separa de las teorías aristotélicas y escolásticas vigentes, que trataban de buscar explicaciones causales y cualitativas a los fenómenos. El libro tuvo tanto éxito que atrajo la atención de la Inquisición. Tras un proceso de 20 días, el 22 de Junio de 1632 un tribunal de siete cardenales declaró "absurda, falsa en Filosofía y herética la afirmación de que el sol ocupa el centro del Universo y que la Tierra no está inmóvil en el centro del mundo". Después de esto, Galileo tuvo que firmar la fórmula de abjuración y oir la sentencia de reclusión en su casa, donde murió en 1642.

A pesar de su amargura, continuó trabajando infatigablemente. Así, en su *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nove scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali* (1638) hace un estudio sistemático y revolucionario sobre el movimiento de los proyectiles, que le lleva a formular la ley de composición de movimientos, lo que, junto a sus ideas sobre la gravedad, le permitieron obtener la solución correcta.

La influencia del pensamiento de Galileo fue muy grande entre los científicos de la época, aunque, a la vista de la experiencia, la mayoría tomó buien cuidado en plantear sus teorías como meras"hipótesis de trabajo", a semejanza del prólogo del obispo Osiander a *De Revolutiones* de Copérnico, que ya hemos citado.

Aunque las obras de los griegos y, sobre todo, de Arquímedes seguían siendo el modelo de la elegancia y el rigor, los matemáticos del Renacimiento, como hijos de su época, estaban más interesados en la obtención de nuevos métodos y resultados que en el rigor de las pruebas. Como consecuencia de esta mentalidad, los matemáticos de los siglos XVI y XVII habían perdido aquel "horror al infinito" de los griegos, que había impedido el desarrollo de una teoría de límites que evitara la tediosa doble *reductio ad absurdum* de las demostraciones clásicas. Este hecho, junto con el desarrollo de una escritura simbólica adecuada (**Vieta, Descartes**), facilitó la creación de técnicas formales de cálculo y la aparición de los métodos infinitesimales que, usados con profusión y absoluta falta de rigor, permitieron enriquecer y fortalecer en gran medida el "lenguaje" necesario para leer la Naturaleza, según el programa propuesto por Galileo.

Así, por ejemplo, Kepler utilizó razonamientos de este tipo para tratar de demostrar las leyes del movimiento planetario que había descubierto a través de sus observaciones. También publicó un tratado en 1615 (*Stereometria doliorum*) sobre la determinación de volúmenes de barricas de vino, problema de gran importancia práctica, ya que la forma de los toneles utilizados para el transporte del vino era diferente de unos lugares a otros, y era sumamente importante poder calcular con precisión el volumen de las transacciones comerciales. Para realizar sus cálculos, Kepler consideraba un cuerpo sólido como formado por una cantidad infinita de piezas sólidas infinitesimales o *indivisibles*, de forma y tamaño convenientes a la solución del problema estudiado. Por ejemplo, el toro (figura geométrica semejante a un neumático o una rosquilla), generado al girar un círculo de radio a en torno a un eje vertical situado a una distancia b de su centro, lo concebía como formado por infinitas rebanadas muy delgadas, formadas por la intersección del toro con planos que pasan por el eje de revolución. Cada rebanada es más delgada en el interior que en el exterior. Kepler asumió que el volumen de una de estas rebanadas era $\pi a^2 t$, donde $t = \frac{t_1+t_2}{2}$ es el promedio de las anchuras mínima y máxima, e.d., t es la anchura de la rebanada en su centro. Por tanto, el volumen del toro es $V = (\pi a^2)(\sum t) = (\pi a^2)(2\pi b)$, que es la fórmula correcta.

El uso sistemático de las técnicas infinitesimales se popularizó sobre todo por la aparición de 2 obras escritas por el alumno de Galileo **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647): la *Geometria indivisilibus continuorum nova quadam ratione promota* o, simplemente *Geometria*, y *Exercitationes geometricae sex* o *Ejercicios.* Aunque los seis primeros libros de la *Geometria* están redactados a imitación de las obras clásicas griegas, Cavalieri estaba menos interesado en precisar la naturaleza o probar la existencia de los indivisibles que en su utilización práctica para obtener resultados computables. Como escribió más tarde en los *Ejercicios*, *"El rigor es asunto de los filósofos, más que de los matemáticos."*, frase que muestra a las claras el espíritu imperante entre los matemáticos de la época.

De esta forma, el "Diccionario" para leer la Naturaleza, se iba ampliando cada vez más.

4.2 Isaac Newton.

El paradigma de la Revolución Científica en marcha es, sin duda, **Isaac Newton** (1642-1727) y su obra *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* o *Principia*, como se conoce habitualmente. Esta obra, publicada en 1687 consta de 3 libros, los dos primeros titulados *Sobre el movimiento de los cuerpos* y el tercero *Sobre el Sistema del Mundo* y es una de las obras cumbre de la Ciencia. Newton trata de encontrar un modelo matemático riguroso que le permita explicar *todos* los fenómenos de movimiento a partir de unos pocos *principios.* Desde luego, Newton conocía bien los trabajos de Galileo sobre la trayectoria de los proyectiles, y también los de Kepler sobre los movimientos de los planetas; pero nadie hasta entonces había intentado relacionar ambos problemas. En el curso del descubrimiento de las leyes universales del movimiento, Newton hizo uso de sus propias contribuciones al álgebra, la geometría y, sobre todo, al cálculo. Su *Método de las fluxiones*, o lo que es lo mismo, el Cálculo Diferencial, es la herramienta básica para la formulación de los modelos de las Ciencias de la Naturaleza hasta bien entrado el siglo XX (y todavía lo sigue siendo en áreas muy grandes de la misma). Sin embargo, es difícil descubrir esas matemáticas revolucionarias en los *Principia*, pues Newton emplea deliberadamente un lenguaje geométrico similar al utilizado por Arquímedes y los grandes matemáticos griegos. Los descubrimientos matemáticos, imprescindibles para el desarrollo de su obra, los fue obteniendo Newton a lo largo de toda su vida, y constituyen una de las mayores aportaciones al desarrollo de la Matemática desde los tiempos de Arquímedes. Sin embargo, en los *Principia* aparecen someramente recogidos en la Sección 1 del Libro I, como una serie de propiedades y reglas para manejar los límites de razones de cantidades geométricas. Como hemos dicho, el lenguaje empleado es geométrico, a la manera de los clásicos, en lugar de utilizar el formalismo analítico empleado por Newton en muchos de sus trabajos. Se conjetura que Newton desarrolló sus cálculos utilizando su método de fluxiones, y después revistió sus resultados con el lenguaje geométrico clásico, probablemente para evitar controversias.

Comienza Newton con 8 definiciones, entre las que se encuentran las de fuerza, inercia, masa y cantidad de movimiento y un famoso escolio sobre términos "de todos conocidos": tiempo, espacio y movimiento, distinguiendo cuidadosamente los conceptos absolutos de los relativos. Después enuncia sus famosas **Tres Leyes del movimiento**: la de Inercia, la relación fuerza-momento (e.d., $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$) y el principio de acción-reacción en las acciones mutuas de dos cuerpos (obvio en las acciones de contacto, pero que Newton amplía a las acciones a distancia). Finalmente, incluye 6 Corolarios que contienen las leyes de composición de velocidades y fuerzas, y la invariancia de todos los movimientos bajo movimientos inerciales del espacio, entre otros hechos destacados. Newton honra a Galileo, atribuyéndole las dos primeras leyes y los dos primeros corolarios. Con la sola ayuda de estas definiciones y leyes, Newton obtiene una enorme cantidad de demostraciones matemáticas relativas al movimiento de los cuerpos. Por ejemplo, prueba que el movimiento de un punto sometido a una fuerza central se realiza necesariamente en un plano, y se cumple la ley de las áreas (segunda ley de Kepler en el caso de un planeta sometido a la fuerza de atracción del sol). En particular, si la curva descrita por el punto es una elipse y si el centro de la fuerza ocupa un foco de la misma, *la fuerza debe ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro.* De esta manera, el movimiento de los cuerpos celestes se integra por vez primera dentro de una teoría general de la Dinámica.

En el libro segundo de los *Principia* se estudia el movimiento de un cuerpo en un medio resistente, con distintas hipótesis sobre la resistencia ofrecida. Newton esboza teorías de la resistencia en un medio fluido, aceptando que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Busca el sólido de revolución de menor resistencia, estudia la propagación de las ondas, comienza el estudio de los fluidos viscosos, etc.

La culminación de los *Principia* la constituye el tercer libro, en el que se establece la **teoría de la Gravitación Universal**. Newton comienza pretendiendo demostrar la existencia de la gravedad, para lo que se sirve de 4 *Reglas* del pensamiento científico, mas una serie de *Fenómenos* (que no son más que la realización de las leyes de Kepler en el movimiento de los planetas conocidos en su tiempo). Sobre estos "Fenómenos", utilizando sus reglas de filosofar, Newton justifica su teoría de la gravitación universal y la cuantifica, afirmando que dos cuerpos *cualesquiera* están sometidos a una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. El gran triunfo del "Sistema del Mundo" de Newton es la demostración de las 3 leyes de Kepler, obtenidas como vimos tras largos años de observación, ensayo y error, que aparecen ahora como consecuencia sencilla de la Ley de Gravitación y las tres leyes del movimiento.

Newton estudia también el movimiento de los satélites alrededor de un planeta; fija la densidad de la Tierra entre 5 y 6 (valor admitido actualmente: 5,5) y a partir de aquí deduce las masas de los planetas y del sol en relación con la de la Tierra. Calcula el achatamiento producido por la rotación de la Tierra en $\frac{1}{230}$ (valor actualmente admitido: $\frac{1}{297}$); explica por primera vez la precesión de los equinoccios; estudia la variación del peso con la latitud; justifica las órbitas descritas por los cometas y, finalmente, sienta las bases de la teoría de las mareas por la atracción combinada del Sol y la Luna. En fin, todo un compendio de resultados, deducidos matemáticamente a partir de unos cuantos principios simples.

La obra termina con un largo *Scholium generale* en el que, tras refutar la hipótesis de los torbellinos de Descartes para explicar el movimiento de los planetas (demuestra la imposibilidad de que se verifique la tercera ley de Kepler si se supone la teoría de los torbellinos), concluye con estas palabras:

> *Este conjunto elegantísimo del Sol, los planetas y los cometas no pudo originarse sino es por el plan y el señorío de un Ser inteligente y poderoso...*

4.3 La Matematización de las Ciencias Físicas.

La obra monumental de Newton abrió a la Humanidad la visión de un nuevo orden en el mundo: un universo controlado por un pequeño número de principios físicos expresables únicamente en términos matemáticos. Un esquema majestuoso que abarcaba desde la caída de una piedra hasta el movimiento de los planetas y las mareas. El esquema newtoniano fue decisivo para convencer al mundo de que la naturaleza está regida por leyes matemáticas.

A lo largo del siglo XVIII, los científicos (a su vez la mayoría matemáticos), siguieron con empeño el plan de Newton de matematización de la Naturaleza. Y ciertamente se obtuvieron logros espectaculares en esta dirección. Entre ellos, podemos citar:

• La predicción del regreso y posición aproximada del cometa Halley (descubierto en 1682), realizada por **A. C. Clairaut** (1713-1765) en una sesión de la Academia de Ciencias de Paris. Clairaut anunció la aparición del cometa cerca del sol para mediados de abril de 1759. El cometa apareció un mes antes de lo anunciado, pero la hazaña resultaba enorme, teniendo en cuenta que sólo se disponía de las observaciones realizadas durante unos pocos dias 77 años antes.

• La confirmación experimental del achatamiento polar de la Tierra, predicha por Newton y Huygens, como consecuencia de las mediciones del arco de meridiano en Perú y Laponia.

• El descubrimiento del planeta Neptuno. Aunque realizado en 1846, el descubrimiento está enteramente basado en el trabajo matemático del siglo XVIII. En 1781, el astrónomo **W. Herschel** (1738-1822) descubrió el planeta Urano, utilizando un potente telescopio. Pero la órbita de Urano no se comportaba de acuerdo a las predicciones. Otro astrónomo, **A. Bouvard** (1767-1843), conjeturó que las anomalías se debían a la presencia de un planeta desconocido. Se hicieron multitud de intentos para localizar al nuevo planeta, hasta que el joven astrónomo francés **J. Leverrier** (1811-1877) culminó un impresionante trabajo de cálculo y habilidad matemática y envió al astrónomo alemán **J. Galle** (1812-1910) el 23 de Septiembre de 1846 los datos de la órbita del nuevo planeta, calculada a partir de las perturbaciones observadas en la órbita de Urano. Galle descubrió Neptuno a sólo 55 minutos de arco de la posición predicha por Leverrier.

• En general, la fundamentación de la Astronomía, debida fundamentalmente al trabajo de **J. L. Lagrange** (1736-1813) y, sobre todo, **P. S. Laplace** (1749-1827), cuya monumental obra *Mecánica Celeste* apareció en cinco volúmenes entre 1799 y 1825.

• La formulación por **P. L. M. de Maupertuis** (1698-1759) del *Principio de Mínima Acción*, clarificado y generalizado por Lagrange, permitió unificar métodos y deducir soluciones para muchos problemas de la Mecánica. Este principio fue posteriormente generalizado por **W. R. Hamilton** (1805-1865), llamado "el segundo Newton" y es aún hoy una de las bases de la Mecánica, que ha servido como paradigma en otras ramas de la Física para la formulación de principios análogos ("principios variacionales") . La herramienta matemática básica para la aplicación de este principio es el Cálculo de Variaciones, uno de los grandes motores del desarrollo del Análisis desde el siglo XVIII.

El interés general hacia las Ciencias de la Naturaleza y el éxito de los modelos matemáticos para su descripción hacen que durante el siglo XVIII y las primeras décadas del siglo XIX una parte importante de los desarrollos matemáticos estén dirigidos a su aplicación a la mecánica o a la física en general. Y, obviamente, había razones importantes para ello, pues un mejor y mayor conocimiento en el funcionamiento de los procesos de la Naturaleza podía tener importantes repercusiones en la tecnología, la industria y, en definitiva, el aumento de poder económico y político. Sin embargo, esta explicación "utilitaria", probablemente bastante acertada a partir del último cuarto del siglo XVIII, es, como señala S. Bochner, demasiado simplista, ya que

> *... Parece imposible encontrar una explicación sociológica de por qué en el siglo XVIII (y sólo en este siglo), con un desarrollo industrial incipiente y muy poca atención a la verificación experimental, se produjo esa fusión casi perfecta entre matemáticas y mecánica, con enorme beneficio para ambas y para toda la física y tecnología por venir...* ([Bo, pág. 7])

Como consecuencia de este maridaje, a partir del último tercio del siglo XVIII, la mayor parte de las Academias e Instituciones científicas organizaron multitud de concursos para la resolución de problemas surgidos en el mundo de las aplicaciones: desde el diseño de cascos de buques hasta la creación de mejores modelos matemáticos para entender la transmisión de la luz o el calor. A modo de ejemplo, detengámonos un poco más en este último caso, que puede considerarse paradigmático de la fuerte interacción existente entre el desarrollo de nuevas teorías matemáticas y las necesidades de las ciencias experimentales:

La invención de la máquina de vapor en el último gtercio del siglo XVIII, base de la Revolución Industrial, estimuló el desarrollo de una teoría matemática de la conductividad del calor, más tarde concretada en la termodinámica. Varios matemáticos y físicos, como **Laplace, Lavoisier, Biot**, etc. realizaron investigaciones en este campo. En el año 1811 el *Institut de France* convocó un concurso cuyo objetivo era *"proporcionar una teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar esta teoría con experimentos."* El ganador del premio fue el académico **Jean B.Fourier**(1768-1830). De familia modesta (era hijo de un sastre de Auxerre), Fourier estudió en la Escuela militar de su ciudad natal, de donde llegó a ser Profesor. Se adhirió a las ideas de la Revolución y participó activamente en la política. Tras participar como estudiante en la creación de la *Ecole Normale* en 1794, pasó a ser Profesor de la misma y posteriormente de la *Ecole Polytechnique*. En 1798 participó, junto con **Monge** y muchos otros científicos, en la expedición de Napoleón a Egipto, y se convirtió en un admirador y experto de la cultura egipcia. Regresó a Francia en 1801 y al año siguiente fue designado *Prefecto* del Departamento de Isre. En 1815, se trasladó a Paris, dedicándose desde entonces casi exclusivamente a su actividad científica. En 1817 fue designado miembro de la recién refundada *Academia de Ciencias*, de la que se convirtió en Secretario Perpetuo en 1822.

Fourier, hombre comprometido con los problemas de su época, concebía las matemáticas, y especialmente el análisis infinitesimal, como el instrumento fundamental para comprender la Naturaleza, domeñarla y adaptarla a las necesidades del Hombre. como dice claramente en el *Discours Préliminaire*,

> *Las causas primeras las desconocemos, pero están sujetas a leyes simples y constantes que pueden ser descubiertas por medio de la observación. Este el es objeto de la Filosofía Natural...*

Pero, una vez realizadas una serie de observaciones empíricas, es necesario obtener un modelo del fenómeno en términos matemáticos, y más precisamente, por medio de ecuaciones diferenciales. *"Éste es el camino que hay que seguir para avanzar nuestro conocimiento sobre la Naturaleza"*. Vemos, pues, que Fourier es el paradigma de lo que hoy llamaríamos un "matemático aplicado" (como lo eran la mayoría de sus contemporáneos). La motivación para desarrollar teorías matemáticas "abstractas" (a las que Fourier contribuyó en gran medida) debe ser siempre la obtención de nuevas herramientas que permitan resolver los problemas planteados por la observación de la Naturaleza:

> *El profundo estudio de la naturaleza en la fuente más fértil de los descubrimientos matemáticos. Este estudio ofrece no sólo la ventaja de un objetivo bien determinado, sino la de excluir vaguedades y cálculos inutiles [...]*
>
> *...Su principal atributo* [de la Matemática] *es la claridad; no posee símbolos para expresar ideas confusas. Unifica los fenómenos más diversos y descubre analogías ocultas entre ellos [...] y, lo que es más importante, sigue el mismo método en el estudio de todos los fenómenos y los interpreta con el mismo lenguaje, confirmando la unidad y simplicidad del plan del Universo y poniendo de manifiesto el orden inmutable que gobierna todos los fenómenos naturales.* [Théorie analytique de la chaleur]

Y en su *Discours préliminaire*, abunda:

> *No puede haber lenguaje más universal ni más simple, más exento de errores y de oscuridades, es decir, más digno de expresar las relaciones invariables entre los seres naturales.*
>
> *Considerado desde este punto de vista, es tan extenso como la Naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide los tiempos, los espacios, las fuerzas, las temperaturas; esta difícil Ciencia se forma lentamente, pero conserva todos los principios una vez adquiridos. Crece y se consolida constantemente, en medio de tantos errores del espíritu humano.*

Fourier es, pues, un profundo convencido del carácter social de la Matemática y la Ciencia en general, a la que considera elemento esencial para el progreso de la Sociedad civil. En contrapartida, el rigor en el razonamiento no es lo más importante.

Con estas premisas, no es de extrañar que Fourier se interesara por la teoría de la transmisión del calor. De hecho, había presentado una extensa Memoria al Instituto en 1807 que no fue publicada. En el informe del Jurado sobre la concesión del premio convocado por el Instituto, se lee

> *Este trabajo contiene las ecuaciones diferenciales correctas que gobiernan la transmisión del calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie, y la novedad del tema junto con su importancia, ha motivado la concesión del premio... Sin embargo, la forma como el autor obtiene sus ecuaciones ... y el análisis de su solución deja algo que desear tanto en lo concerniente a la generalidad* [de la solución] *como al rigor.*

Probablemente estas objeciones fueron la razón por la que el trabajo ganador no fuera publicado inmediatamente (como era costumbre), y tuviera que esperar hasta 1824 para su aparición, cuando ya Fourier era Secretario Perpetuo de la Academia.

Las ecuaciones obtenidas por Fourier son:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

según se trate de una barra, un recinto plano o un cuerpo sólido, donde $u = u(\mathbf{x}, t)$ es la temperatura en el instante t del cuerpo, en el punto de coordenadas $\mathbf{x}$. Por supuesto, las soluciones buscadas deben verificar ciertas condiciones de contorno. A la resolución de distintos casos particulares (barras, cilindros, esferas, etc.) dedicó Fourier una serie de artículos que culminaron en su renombrada Monografía *Théorie analytique de la chaleur*, publicada en 1822. En esta obra, Fourier, a través de un gran número de ejemplos, desarrolla una serie de ideas y de técnicas que iban a ser el modelo a seguir en las investigaciones posteriores sobre las Ecuaciones en Derivadas Parciales.

También en este libro Fourier establece su famosa conjetura de que *toda función arbitraria en un intervalo puede representarse como una serie de senos y cosenos* del tipo (suponiendo por comodidad que el intervalo es el $[-\pi, \pi]$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{‡}$$

Fourier hace mención expresa de la validez del desarrollo para toda *función arbitraria* [1], aunque a la vista de los múltiples ejemplos que aparecen en la *Théorie analytique de la chaleur*, parece claro que Fourier está pensando en lo que hoy llamaríamos *funciones continuas a trozos*. Lo importante para nosotros es que Fourier argumenta la validez de la conjetura basándose en la evidencia física: si su modelo matemático para la conductividad del calor refleja realmente la realidad, cualquiera que sea la distribución de la temperatura elegida como condición de el contorno (¡una función "arbitraria"!), el problema **debe** tener solución y, por tanto, esta solución debe poder expresarse en la forma propuesta por Fourier. Más aún, Fourier da una fórmula para calcular los coeficientes a_n y b_n en (‡) (los famosos *coeficientes de Fourier*).

El desarrollo de una función periódica en serie trigonométrica ya había sido propuesto en 1741 por **D. Bernouilli**(1700-1782), como solución del famoso *problema de la cuerda vibrante*, consistente en determinar la posición en cada instante de una cuerda homogénea fija en sus extremos y que vibra libremente en un plano. Los argumentos de Bernouilli estaban basados en razonamientos físicos: la posición más general debería poder obtenerse como *superposición* (e.d., combinación lineal) de armónicos simples, cuyas frecuencias fundamentales son múltiplos sucesivos de una de ellas. Este hecho, bien conocido para un sistema finito de puntos oscilantes, Bernouilli lo extendió sin más al caso de los infinitos puntos de la cuerda, (efectuando un peculiar salto "de lo finito a lo infinito", tan habitual en la modelización de los fenómenos físicos). De este modo, las combinaciones lineales finitas se convierten en sumas infinitas. Los argumentos de Bernouilli fueron rechazados (por poco rigurosos y contradictorios) por los dos principales actores del debate en cuestión:

[1] En palabras de Fourier: *No suponemos que estas ordenadas* [f(x)] *estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada...*

L. Euler(1707-1783) y **J. le R. D'Alembert**(1717-1783). Otra de las razones dadas por Euler para rechazar la solución de Bernouilli es la dificultad en el cálculo de los posibles coeficientes del desarrollo, tarea que le parecía *sin duda muy difícil, por no decir imposible.* Es claro que los argumentos de Bernouilli convencerían a cualquier físico contemporáneo, *después de más de 150 años de tradición en este tipo de razonamientos, y sabiendo ya que el argumento es correcto en la mayor parte de los casos prácticos.*

En todo caso, esta conjetura fue, directa o indirectamente, el origen de una parte importante de las matemáticas que se desarrollaron a lo largo del siglo XIX, desde la clarificación y evolución de la noción misma de *función* hasta el comienzo de la topología o los números transfinitos, pasando por el desarrollo de las distintas nociones de integración y medida. Es realmente sorprendente la omnipresencia del tema en tal cantidad de situaciones, tanto en el área de la matemática más teórica como en el de las aplicaciones. Hoy mismo, el *Análisis de Fourier* sigue siendo una de las técnicas matemáticas imprescindibles en la modelización de cualquier fenómeno ondulatorio, desde la transmisión del sonido o imágenes al análisis de la percepción visual en los animales, el reconocimiento de formas o la Tomografía Axial Computerizada. También en el ámbito de la matemática "pura" la Teoría de Fourier siguió siendo un campo de gran actividad investigadora en este siglo. Para los interesados, digamos que la veracidad de la conjetura de Fourier depende del sentido que se de a la palabra "representar" en la expresión (‡). Si se entiende, como en la época de Fourier, una representación punto a punto, ya en el siglo XIX se dieron contraejemplos de funciones continuas con serie de Fourier divergente en algunos puntos de su dominio. Sin embargo, la ingente maquinaria desarrollada al respecto, permitió que en 1966 los matemáticos **L. Carleson** y **R. A. Hunt** consiguieran probar que la serie de Fourier de cualquier función continua (de hecho, el resultado es cierto para una clase mucho más amplia de funciones) converge a la función, salvo a lo más en un conjunto "despreciable" (en un sentido que se puede precisar completamente) de puntos. ¡Finalmente, Fourier tenía razón!.

La percepción de que las matemáticas son una herramienta imprescindible para la consolidación de otras ciencias fue, pues, ampliamente aceptada durante este periodo y sirvió como base para su institucionalización como ciencia independiente. Un ejemplo típico de esta opinión predominante lo podemos encontrar en las palabras del astrónomo **J. Zech** (1821-1864):

…Creo que no se puede rechazar al menos la posibilidad de que todo lo que es

> *aprehendido por nuestros sentidos, pueda calcularse matemáticamente. La razón de que esto no haya ocurrido todavía no reside en las limitaciones de las matemáticas, sino en las de las ciencias naturales, que todavía no han progresado lo suficiente en el conocimiento de las causas que yacen tras los fenómenos observados. Si se conocieran éstas, las matemáticas podrían aplicarse. A este respecto,* **la extensión con que se hayan aplicado las matemáticas a una rama de las ciencias naturales, puede servir como criterio general sobre su grado de utilidad**... ([Sc, pág. 224]; el énfasis es mío).

Así pues, durante la primera mitad del siglo XIX gran parte de la matemática que se produce tiene su motivación en las aplicaciones. Sin embargo, hay que hacer notar que esta matemática "práctica" fue desarrollada por hombres como **Cauchy, Fourier, d'Alembert, Euler, Lagrange, Poisson, Laplace, Gauss, Jacobi, Hamilton**, etc., que nadie dudaría en colocar entre los matemáticos "puros". De hecho, la mayor parte de las teorías desarrolladas por estos "arquitectos" de la mecánica y la ingeniería, surgieron de un proceso de abstracción matemático, con muy poco que ver con una experimentación directamente planificada, a diferencia de los modelos matemáticos de los físicos "teóricos" de un siglo más tarde, como **Gibbs, Boltzmann** o **Plank**, creados precisamente para explicar convincentemente una diversidad de hechos experimentales.

5. El siglo XX: Luces y Sombras.

Por supuesto que no toda la matemática desarrollada en los siglos XVII y XVIII, ni siquiera la producida por los matemáticos que se distinguieron en Física o en Mecánica, fue originalmente desarrollada con un fin concreto. Ya a mediados del siglo XIX, la matemática se hizo completamente independiente de la Mecánica y la Física en general, lo que no obsta para que estas ciencias siguieran siendo, directa o indirectamente, el origen de una parte importante de las matemáticas desarrolladas en la época. Sin embargo, una y otra vez, muchos de los resultados absolutamente abstractos, obtenidos sin una motivación práctica aparente, han resultado decisivos para la formulación y desarrollo de algunas de las más importantes teorías científicas de nuestro siglo. Como ejemplo bien conocido podemos poner dos de los considerados más grandes descubrimientos del siglo XX: la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica.

A finales del siglo XIX, la Mecánica clásica creada por Newton, complementada por la Electrodinámica clásica (finalizada por **J. C. Maxwell** (1831-1879)), proporcionaban un marco totalmente satisfactorio para la comprensión del mundo macrocósmico. A comienzos del siglo XX, con el aumento de precisión en los instrumentos de medida y la posibilidad de realizar experimentos más y más complejos, los físicos empiezan a estudiar fenómenos en condiciones poco usuales: a velocidades muy altas o a escala microscópica. Y es entonces cuando empiezan a surgir discrepancias con las predicciones suministradas por la Física clásica, lo que motivó una profunda revisión de sus fundamentos y dio origen a las dos grandes teorías físicas de este siglo: la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica. La primera trata de explicar con precisión los fenómenos que ocurren a altas velocidades (próximas a la de la luz), mientras que la segunda intenta describir los acontecimientos que tienen lugar a escala atómica.

5.1 La Teoría de la Relatividad.

La Teoría Especial de la Relatividad, aunque tremendamente atrevida y revolucionaria en sus postulados físicos, no requiere matemáticas desconocidas hasta entonces para los físicos; de hecho, algunos historiadores han sostenido que esta Teoría está en germen implícita en la obra de Poincaré y Lorentz. Sin embargo, la Teoría General es genuinamente obra de **A. Einstein** (1879-1955). En la teoría que desarrolló en la primera década del siglo, Einstein hizo uso solamente de herramientas matemáticas “clásicas”. Sin embargo, a partir de 1911 dirigió sus esfuerzos a integrar en su teoría especial los efectos de la gravitación, explicando sus efectos por medio de una estructura geométrica en el espacio-tiempo que obligara a los objetos a desplazarse en la forma prevista por la teoría de la gravitación de Newton. En los primeros intentos, el formalismo matemático empleado por Einstein era bastante elemental y clásico, y los resultados no fueron muy prometedores. Precisamente entonces, un matemático conocido suyo, **G. Pick**, dirigió su atención a los trabajos de **G. Ricci** y **T. Levi-Civita** en una abstracta parcela de la Matemática pura. Einstein comenzó a estudiar esos trabajos, con la ayuda de su amigo M. Grossman, y descubrió que constituían precisamente el aparato matemático adecuado que necesitaba. Así, en su *Teoría General de la Relatividad* formulada 1916, Einstein modelizó el universo como una "variedad tetra-dimensional, dotada de una métrica Riemanniana determinada por el tensor $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$."

Como hemos dicho, el contexto del aparato matemático usado por Einstein era una teoría absolutamente abstracta, llamada Geometría Riemaniana, en honor de su fundador, **B. Riemann** (1826-1866), de gran importancia matemática, pero por el que los físicos no habían mostrado ningún interés. La formulación de la Teoría General de la Relatividad en términos de "espacios curvos" y geometría Riemaniana (no euclídea) se hizo ya inseparable de la misma. Como tantas otras veces, este hecho atrajo la atención de los matemáticos hacia esta teoría, lo que impulsó su interés y desarrollo dentro del ámbito de las matemáticas "puras" y en particular de la Topología. A su vez, los físicos comenzaron a interesarse en este campo de la matemática, lo que les llevó a aproximarse a áreas como la topología y a intensificar el contacto con la geometría diferencial.

Las teorías de Einstein se expandieron rápidamente, tanto entre los científicos como entre el público en general, por las espectaculares consecuencias que de ella se derivaban. Algunas de ellas (la curvatura de los rayos de luz en un potente campo gravitatorio, la dilatación del tiempo a velocidades relativistas, la equivalencia entre masa y energía, etc.) fueron pronto confirmadas por los experimentos y, de hecho, son la base de muchas aplicaciones cotidianas, desde los aceleradores de partículas a la producción de energía atómica o de fusión. Por otro lado, la figura humana de Einstein, su compromiso ético y su fe en la grandeza del hombre, en el valor de la Ciencia y en su profunda inteligibilidad, le hicieron una personalidad popular y respetada en todo el mundo.

5.2 La Mecánica Cuántica.

La Mecánica Cuántica, como hemos dicho, surge para explicar las discrepancias con lo predicho por la Física clásica a nivel microcósmico. A diferencia de la Teoría de la Relatividad, centrada en la obra de un sólo hombre, la Mecánica Cuántica es una obra colectiva, aunque plagada de protagonistas sobresalientes (entre ellos tuvo un papel destacado el mismo Einstein). La historia comienza cuando **M. Planck** (1858-1947), para explicar el problema de la *radiación del cuerpo negro*, postula que la energía emitida por cada oscilador atómico sólamente puede surgir en cantidades discretas, $h\nu, 2h\nu, 3h\nu \ldots$, donde h es una constante universal (*constante de Planck*) y ν es la frecuencia intrínseca del oscilador radiante. Del mismo modo, **N. Bohr** (1885-1962) para explicar el espectro discreto de emisión, tuvo que postular en 1913 que los electrones excitados, del átomo de hidrógeno no podían existir en cualquier estado, sino sólo en aquellos en los que su momento cinético tomara los valores discretos $h/2\pi, 2h/2\pi, \ldots$. Otros ejemplos de estos *efectos cuánticos* se fueron descubriendo a lo largo del primer cuarto de este siglo.

La cuantización de las variables físicas conlleva aceptar que, a nivel microcósmico, los fenómenos tienen lugar de manera esencialmente discontinua e imprevisible. Las implicaciones de este hecho iban a hacer tambalear las ideas previas sobre la realidad física. Así, el gran matemático francés **H. Poincaré** (1854-1912), a su regreso del Congreso Solvay de 1911, escribió:

> *... Parece innecesario señalar cómo estas ideas (se refiere a la hipótesis de Planck) difieren de las concepciones tradicionales; lo que las nuevas investigaciones parecen poner en tela de juicio no son solamente los principios fundamentales de la Mecánica, sino algo que hasta ahora nos parecía inseparable del concepto mismo de ley natural: los fenómenos físicos dejarían de obedecer a leyes expresables por ecuaciones diferenciales y esto, indudablemente, sería la mayor y más radical revolución en la filosofía natural desde los tiempos de Newton.*

Y poco antes de su muerte, en sus *Dernires Pensées*, escribe:

> *Nos preguntamos ahora no sólo si las ecuaciones diferenciales de la dinámica deben modificarse, sino incluso si las leyes del movimiento pueden continuar expresándose por medio de ecuaciones diferenciales... Se está cuestionando si no sería necesario introducir discontinuidades en las leyes naturales, no solo aparentes, sino esenciales.*

Es decir, parece claro que Poincaré se da cuenta de las consecuencias que implican las nuevas teorías, en particular la necesidad de un nuevo modelo matemático que sustituya al vigente, basado en la descripción de los fenómenos por medio de ecuaciones diferenciales.

El otro tipo de dificultades que apareció al estudiar el mundo microscópico se refiere a la distinción entre *ondas* y *partículas.* Así, al principio se pensó que la luz se comportaba como una lluvia de corpúsculos, como gotas de agua. Los fenómenos de interferencia y difracción mostraron claramente que, en realidad, la luz se comportaba como una onda, similar a las ondas del agua, por ejemplo. Sin embargo, para explicar el *efecto fotoeléctrico*, Albert Einstein propugnó en 1905 que un rayo de luz de frecuencia ν se comporta como si fuese una colección de partículas *fotones*, cada una de las cuales con una energía $e = h\nu$. La hipótesis de Einstein fue confirmada enseguida por estudios experimentales precisos y respaldada espectacularmente en 1923, al demostrar **A. H. Compton**(1892-1962) que los fotones podían hacer saltar electrones, de acuerdo con las leyes usuales de la Mecánica clásica.

Por otro lado, cuando se descubrieron los electrones, se vio que se comportaban como partículas, minúsculas balas tremendamente veloces. Sin embargo, en 1927 **C. Davisson** y **L. Germes** mostraron que los electrones se difractaban a través de una red cristalina, comportándose como una onda, con longitud de onda $\lambda = h/p$ (p = cantidad de movimiento del electrón). De esta manera se confirmaron experimentalmente las ideas de **L. de Broglie**(1892-1987) y **E. Schrdinger**(1887-1961) de asignar *paquetes de ondas* a partículas materiales.

Una vez más, la Física se enfrentaba al dilema de elegir entre dos concepciones contradictorias, cada una de las cuales parecía igualmente demostrable por las observaciones. Intentar resolver esta serie de hechos confusos y a veces contradictorios condujo a un cambio radical de la imagen de la realidad microfísica: el comportamiento de las cosas a escala microcósmica es, simplemente, distinto al que estamos habituado. Un átomo no se comporta como un muelle oscilando, ni como un sistema solar en miniatura, ni como algún tipo de nube rodeando un núcleo (por citar alguna de las imágenes habituales). Sin embargo, al menos podemos decir que, en este aspecto, *todas* las partículas subatómicas se comportan igual. En palabras del físico y Premio Nobel **R. Feynman** (1918- 1988), "todas están chifladas, pero exactamente de la misma manera".

A diferencia de otras teorías físicas, los modelos matemáticos propuestos para desarrollar la Mecánica Cuántica fueron muy diversos. En muchos casos, las matemáticas empleadas eran claramente insatisfactorias y en absoluto rigurosas. Las formulaciones más conocidas son la *Mecánica Matrices* de **W. Heisenberg**(1901-1976) y la *Mecánica Ondulatoria* de **E. Schrdinger**. El mismo Schrdinger se encargo de encontrar lo que llamó "una identidad matemática formal" entre ambas formulaciones. Esencialmente se trataba de una regla formal que permitía trasladar toda ecuación de la mecánica ondulatoria a una ecuación de la mecánica matricial, y un recíproco parcial. La unificación de ambas teorías, sin embargo, se produjo en 1927 como consecuencia del trabajo de un matemático, **J. Von Neumann** (1903-1957), discípulo del gran **D. Hilbert** (1862-1943). En efecto, el problema residía en la búsqueda de una analogí a formal entre el espacio "discreto " Z de los valores de los í ndices de las matrices que aparecían en la teoría de Heisenberg, y el espacio Ω de la variable "continua" de las ecuaciones de Schrdinger. Como señala Von Neumann, *"... no es de extrañar que esto no se pueda lograr sin cierta violencia sobre el formalismo y la matemática: los espacios Z y Ω son verdaderamente muy distintos, y toda tentativa de ponerlos en relación debe chocar con grandes dificultades."* ([Vn, pág. 20]). El descubrimiento innovador de Von Neumann fue percatarse de que, si bien Z y Ω son muy distintos, **los espacios de funciones reales sobre ellos que intervienen en la Mecánica Cuántica son esencialmente los mismos.** En efecto, a las sucesiones que aparecí an en la Mecánica de matrices habitualemente se les imponí a la condición de normalización $\sum \mid x_n \mid^2 = 1$, mientras que las funciones ψ de la Mecánica ondulatoria debí an cumplir $\int \mid \psi \mid^2 = 1$, tras su interpretación como densidades de probabilidad. Esto sugirió a Von Neumann limitar el ámbito de las sucesiones o funciones aceptables en ambas teorí as a lo que hoy conocemos como los espacios

$$\ell_2 = \{\mathbf{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \parallel \mathbf{x} \parallel = (\sum \mid x_n \mid^2)^{1/2} < \infty\}$$

y

$$L_2(\Omega) = \{\psi : \Omega \to \mathbb{C} : \psi \text{ es medible Lebesgue y } \parallel \psi \parallel = (\int \mid \psi \mid^2)^{1/2} < \infty\}$$

(Von Neumann los designó por F_Z y F_Ω, respectivamente). Ambos espacios eran bien conocidos en Matemáticas. El espacio ℓ_2 lo introdujo Hilbert en sus trabajos sobre ecuaciones integrales en 1906, y su estructura había sido minuciosamente estudiada en la tesis de otro de sus discípulos, **E. Schmidt**(1876-1959), realizada en 1906. El espacio $L_2(\Omega)$ había aparecido implí citamente en los trabajos de **H. Lebesgue**(1875-1941) sobre la teorí a de la integral (para Ω un intervalo de la recta real) y más o menos explí citamente en los trabajos de Schmidt y otros discí pulos de Hilbert. Lo interesante es que en 1907, independientemente, **F. Riesz**(1880-1956) y **E. Fischer**(1875-1954) probaron que *ambos espacios son isomorfos e isométricos*, es decir, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos, que preserva la suma y el producto por escalares y tal que si $\mathbf{x} \leftrightarrow \psi$, entonces $\| \mathbf{x} \| = \| \psi \|$. Como quiera -razonó Von Neumann- que F_Z y F_Ω (¡y no Z y Ω!) forman el "substrato analí tico real" de las mecánicas matricial y ondulatoria, respectivamente, y ambos espacios son isomorfos, esta isomorfí a significa que ambas teorí as deben dar los mismos resultados.

De esta manera, la equivalencia de la mecánica de matrices y la mecánica ondulatoria resulta una consecuencia lógica del hecho de que ambas son sólo diferentes representaciones matemáticas de las mismas relaciones abstractas. *Es de esperar* -añade Von Neumann- *que una formulación de la mecánica cuántica basada exclusivamente en las propiedades intrí nsecas básicas comunes a F_Z y F_Ω, permitirá obtener una estructura unitaria, presentando las relaciones absolutamente esenciales, y eliminando lo accidental que resulta del marco formal en cada caso elegido...* [Vn, pág. 23].

Esa estructura básica común a la que hace referencia Von Neumann es la noción de *Espacio de Hilbert*, estudiada y conocida por los matemáticos desde 1906. Como vemos, de nuevo una herramienta matemática desarrollada en otro contexto, resuelve un problema fundamental para la formulación de una teoría física. Como en el caso de la Teoría de la Relatividad, este éxito impulsó enormemente la teoría de espacios de Hilbert y la teoría de Operadores (que en el modelo de Von Neumann representan los *observables* de un sistema físico). Como dice S. Bochner,

> *...apenas habrá una propiedad puramente matemática de los operadores sobre un espacios de Hilbert que no pueda interpretar un físico teórico como un suceso o como una propiedad de un suceso en la realidad* ([Bo; pág.44]).

El mismo Von Neumann, en lo que muchos consideran sus trabajos más profundos, contribuyó decisivamente al desarrollo de la teoría, abriendo así las puertas de toda un campo de investigación matemática pujante (las *Álgebras de Von Neumann*), también cultivado por los expertos en Mecánica Cuántica. La formulación de Von Neumann está hoy universalmente aceptada y sus resultados concuerdan enormemente con las observaciones. No así las diferentes *interpretaciones* de la teoría, en el sentido ontológico del término (*Cfr.* [J1] y [J2]).

Añadamos que Von Neumann hizo también importantes contribuciones a la teoría de computadores, participó en el *Proyecto Manhattan*, que culminó con la creación de la bomba atómica, y fue uno de los creadores de la Teoría de Juegos, de gran aplicación en Economía. Su obra *Theory of Games and Economic Behavior*, en colaboración con **O. Morgenstern** (1902-1977), se ha convertido ya en un clásico. Tuvo una amplia participación en la vida política, formando parte de distintos Comités del Gobierno de los Estados Unidos, llegando a ser considerado uno de los mayores expertos en armas nucleares. Partidario decidido de la guerra preventiva, en 1950 declaraba: *Si ustedes dicen que por qué no bombardear mañana, yo digo que por qué no hoy. Si ustedes dicen que por qué no a las cinco, yo digo que por qué no a la una...* ([Hm; pág. 211]). Fue uno de los mayores defensores de la creación de la Bomba de Hidrógeno (o “superbomba”, como se llamaba a comienzos de los 50). Llegó a ser uno de los 5 miembros de la todopoderosa Comisión Nacional de Energía Atómica de los Estados Unidos, gozando de gran poder político. Fue uno de los creadores e impulsores de la política del *equilibrio del terror*, que llevó al mundo a un masivo rearme nuclear que garantizara la destrucción completa de cualquiera que iniciara un conflicto atómico. Y a pesar de esta tremenda (y a veces discutida) actividad política, realizó aportaciones fundamentales en muy distintas áreas de la Matemática, desde la Lógica y la Teoría de Conjuntos a la Teoría de Juegos y la Economía Matemática, por lo que se le considera uno de los más grandes matemáticos del siglo XX.

En otro orden de cosas, digamos que la física cuántica se apropió también de parte sustancial de la Teoría de Grupos, que ahora aparece incluída en la mayor parte de los manuales sobre el tema.

Otro ejemplo de “matemáticas prefabricadas” lo podemos encontrar en la teoría de ondas de choque. La necesidad de una tal teoría se hizo urgente en los años 1940, con la aparición de la fisión atómica, ¡y resultó que ya existía todo un libro que contenía el mejor estudio sobre el tema!. El libro, titulado *Leons sur la propagation des ondes* había sido escrito en 1903 por el eminente matemático francés **J. Hadamard** (1865-1963), e inmediatamente se convirtió en libro de referencia para los especialistas en fisión atómica ¡40 años después de su aparición!.

Del mismo modo, el trabajo de **G. Boole** (1815-1864) y su obra *Laws of Thought* resultó crucial como base para el inicio de la Teoría Redes y de la Información. Y que decir de la Teoría de Grafos, indispensable hoy en día en materias como Diseño de Circuitos, Máquinas Finitas o Redes Neuronales, y que se inició en 1736 con la solución dada por **L. Euler** (1707-1783) del famoso problema de los siete puentes de Knisberg.

5.3 Luces y Sombras.

Los ejemplos anteriores, a los que podríamos añadir muchos otros, muestran lo que el Premio Nobel en Física **E. P. Wigner** (1902-) llamó “la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales". En sus propias palabras

> *El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello, con la esperanza de que de que continúe siendo válido en el futuro y que se extienda [...] a otras ramas del conocimiento.* ([Wi, pág. 14])

Y en otro lugar ([Wi, pág. 2]), escribe:

> *[...] Nos encontramos en una posición semejante a la de aquel a quien se le ha proporcionado un manojo de llaves y que, teniendo que abrir varias puertas sucesivamente, da siempre con la llave correcta al primer o segundo intento. Tal persona se vuelve necesariamente escéptica en lo que se refiere a la unicidad de la coordinación entre llaves y cerraduras.*

El primer ejemplo que da Wigner de esta situación es el de la Ley de Gravitación Universal de Newton ([Wi, pág. 8]): Filosóficamente, la Ley tal como la formuló Newton era *repugnante* (sic) para su tiempo (y para el propio Newton); su evidencia empírica era escasa, basada en unas pocos resultados, y Newton comprobó su adecuación con las observaciones con poca precisión; el lenguaje matemático en que se formuló contenía el concepto de derivada segunda, que no es en absoluto inmediato ni fácilmente comprensible en términos no matemáticos. Sin embargo, ha resultado ser de aplicación universal, permitiendo explicar una enorme variedad de fenómenos, y sus predicciones se adaptan a las observaciones con una precisión más allá de todo lo esperado.

Wigner pone también el ejemplo de la Mecánica de Matrices en Mecánica Cuántica: Una aproximación puramente analógica (las reglas de cálculo propuestas por Heisenberg en ciertas condiciones, eran formalmente idénticas a las del cálculo matricial de los matemáticos), se mostró sorprendentemente de acuerdo con las observaciones *incluso cuando las reglas de cálculo de Heisenberg no podían aplicarse*, según probaron **Kinoshita** y **Bazley** al calcular el nivel mínimo de energía del helio. Es un nuevo ejemplo del poder creador del lenguaje matemático al que hacía referencia **Y. Manin**: obtenemos "algo más" de las ecuaciones de lo que pusimos en ellas.

En el mismo sentido se expresa **N. Bourbaki** (pseudónimo de un grupo de matemáticos, en su mayoría franceses, de gran influencia en el desarrollo de la matemática moderna):

> *Que existe una relación íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece confirmarse plenamente de la forma más inesperada mediante los descubrimientos más recientes de la física contemporánea. Pero no sabemos absolutamente nada sobre los fundamentos de este hecho (suponiendo que se pudiera encontrar realmente significado a estas palabras) y tal vez no lleguemos a saber nunca sobre ello.* ([Bk])

Como hemos dicho, las matemáticas no solamente son una herramienta para el científico por medio de la cual se pueden calcular y predecir fenómenos. Son también una fuente importantísima de conceptos y principios, por cuyo medio se crean las nuevas teorías.

Por otro lado, las matemáticas no son, propiamente, una rama de las Ciencias naturales, ya que no tratan directamente con fenómenos y objetos del mundo exterior. Como señala S. Bochner ([Bo, pág. 255-256]),

> *Las figuras matemáticas de la geometría bi- o tridimensional son, en gran parte, idealizaciones de objetos que aparecen en el mundo físico, pero las figuras en el espacio n-dimensional para un n arbitrario, ya no lo son...*
>
> *...Los intentos filosóficos para reducir el origen de toda la matemática a razones meramente utilitarias, son muy poco convincentes. Pero es cierto que las matemáticas son el lenguaje de la ciencia en un sentido profundo. Las matemáticas son el medio indispensable a través de cual la ciencia se expresa y se comunica consigo misma. Y así como el lenguaje no sólo expresa pensamientos... sino que también los crea, así sucede que las matemáticas no sólo especifican, clarifican y hacen manejables en forma rigurosa conceptos y leyes de la ciencia que quizá, parcialmente al menos, podrían desarrollarse sin ella; sino que, en ciertos instantes cruciales, es un constitutivo esencial para su aparición y creación. En la fórmula de Newton para el movimiento de una partícula sobre una recta*
>
> $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,$$
>
> *la masa m y la fuerza F son quizá objetos no matemáticos. Pero la velocidad instantánea $v = dx/dt$ y la aceleración instantánea $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ son puramente matemáticos, inconcebibles sin una teoría matemática del cálculo infinitesimal... También Newton tuvo que considerar el concepto matemático*

de función, porque sólo una función puede diferenciarse. Y no sólo requería la función espacio $x = x(t)$ sino que, para la derivada segunda, tuvo que considerar la velocidad $v = dx/dt$ como función del tiempo, a pesar de que en la definición de v esta dependencia había sido reducida a "instantaneidad"... De hecho, desde el trabajo de Arquímedes sobre las leyes de la palanca, la Mecánica Teórica se mantuvo prácticamente inalterada durante casi 2000 años, hasta la aparición de los conceptos gemelos de función y derivada...

En el carácter deductivo y (aparentemente) irrefutable de las Matemáticas es donde reside probablemente gran parte del éxito de las mismas como lenguaje universal de la Ciencia, primero en el campo de las ciencias físicas y, a partir de este siglo, en todos los ámbitos, incluidas las ciencias sociales, la lingística, la biología, la medicina e incluso el arte. Y sin embargo esta idea de que las Matemáticas eran el reino de la verdad irrefutable y gozaban de unos cimientos sólidos e inamovibles, hace tiempo que ha sido abandonada por los mismos matemáticos, que han tenido que aprender a moverse dentro de límites bien precisos, y aceptar que el viejo sueño de alcanzar la infalibilidad y la certeza absoluta, es imposible. Aún en 1925 el gran matemático alemán David Hilbert expresaba en un famoso artículo:

En cierto sentido, la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta aceptada por todos y donde cada afirmación sea controlable... Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así... pues en matemática no hay ningún ignorabimus.

En 1931, **K. Gdel** (1906-1978) acababa con la esperanza de Hilbert, probando que todos los esfuerzos para demostrar que la matemática está libre de contradicciones, están condenados al fracaso. De hecho, es imposible probar la *consistencia* (es decir, la ausencia de contradicciones) de cualquier sistema formal lo suficientemente amplio como para contener la aritmética. Más aún, cualquier sistema formal consistente y adecuado para la aritmética clásica es necesariamente *incompleto*, es decir, contiene afirmaciones legítimas del sistema que son indecidibles, esto es, ni su afirmación ni su negación son demostrables. Esto supone, por tanto, una limitación fundamental del método axiomático mismo que, desde su invención por los griegos, había sido considerado como la más potente herramienta descubierta para alcanzar la verdad.

La elección de diferentes sistemas de axiomas conduce a diferentes teorías matemáticas, a veces conteniendo resultados contradictorios entre sí. El caso de las geometrías no euclídeas, aparecidas en el siglo XIX, es paradigmático, y la aceptación de que todas ellas son igualmente "verdaderas" (es decir, consistentes), supuso una de las más importantes crisis de fundamentos del siglo. También Gdel contribuyó decisivamente a clarificar esta idea de "verdad" dentro de un sistema axiomático, con sus resultados sobre la consistencia relativa de la teoría de conjuntos abstracta, creada a principios de este siglo con la idea de constituir una sólida fundamentación de toda la matemática. En 1904 **E. Zermelo** (1871-1956) formuló explícitamente el siguiente *axioma de elección*: Si $\mathcal{S} = \{A, B, \ldots\}$ es cualquier colección de conjuntos no vacíos, existe un conjunto Z que consta precisamente de un elemento de A, uno de B, etc. Con este axioma se pueden demostrar resultados realmente sorprendentes, a pesar de su aparente inocuidad. Por ello, pronto se puso en cuestión si los resultados obtenidos con este axioma tendrían la "misma validez" que los obtenidos sin él. En 1938, Gdel demostró que si la teoría de conjuntos habitual es consistente, también lo es si le añadimos el axioma de elección. En 1963 **P. Cohen** dio otra vuelta de tuerca a esta historia probando que, recíprocamente, la teoría de conjuntos usual sigue siendo consistente si le añadimos la *negación* del axioma de elección. De modo que este axioma es imposible de demostrar a partir de los restantes.

En este siglo se desarrolla con fuerza una filosofía de la ciencia que, como en el caso del prólogo del obispo Osiander a *De Revolutionibus* de Copérnico, reconoce que no siempre es posible discernir de manera clara y firme entre diferentes modos de establecer una teoría o los fundamentos de una ciencia, sino que pueden plantearse teorías simultáneamente alternativas y, a veces, contradictorias entre sí. A veces porque no se pueda discriminar entre ellas, y otras porque, para ciertos fines, una es "más sencilla" o "más apropiada" que otra. Usando un ejemplo de S. Bochner, diríamos que incluso el más apasionado defensor de la teoría especial de la relatividad no defendería la postura de utilizar exclusivamente las formulaciones relativistas, en lugar de la mecánica clásica "pasada de moda" de Newton y Maxwell, que sigue siendo útil y "más práctica" (y desde luego, más sencilla) para estudiar una gran parte de los fenómenos físicos. Ni tampoco se le ocurriría retirar todos los libros en los que se utilizan las "viejas" coordenadas espaciales, en lugar de las espacio-temporales de Einstein-Minkowski. Es preciso, pues, hacer un *convenio* previo sobre los criterios de utilidad y conveniencia, sin pretender encontrar u obtener la *verdad absoluta*. Los ejemplos que hemos puesto explican claramente que esta corriente de pensamiento, llamada *convencionalismo*, se haya extendido también a las Matemáticas: Hay teoremas que son ciertos admitiendo ciertos axiomas, y falsos si no se admiten esos axiomas o bien se toman otros, y la mayor parte de los matemáticos actuales se han acostumbrado a esta situación. Y la han aceptado, probablemente mejor que sus colegas físicos que, debido a que muchos de sus modelos actuales están construidos exclusivamente en lenguaje matemático, puede verse inducido a "creer" en la "realidad" de esos objetos que se ha inventado él mismo a partir de algunas ideas y técnicas matemáticas.

6. Conclusión.

La mayor parte de nuestra exposición se ha referido a la interrelación entre matemáticas y física, como consecuencia de haber sido esta la conexión más clara (de hecho, hasta el siglo XVII no existe distinción entre las distintas parcelas de las ciencias naturales); véase, no obstante, el artículo [Bg] del famoso físico y Premio Nobel **L. de Broglie**(1892-1987). Pero es evidente que a lo largo de este siglo ha tenido lugar una matematización acelerada de muchas otras partes de la ciencia. Y no sólo porque se utilice la matemática para medir o describir fenómenos (pensemos, por ejemplo, en la creciente utilización de la estadística en las ciencias sociales o en la medicina), sino como herramienta básica para su desarrollo. Sería prolijo, y probablemente inútil, intentar siquiera una enumeración de las contribuciones de la matemática a las distintas áreas de conocimiento, pero podemos añadir algunos ejemplos a los ya citados: desde el uso del Análisis de Fourier por la Psicología de la percepción (como instrumento básico para modelizar la recepción e interpretación de imágenes a través de los sentidos), pasando por la creciente utilización de la Teoría de Grupos en Química, Cristalografía o la Física subatómica (véase, por ejemplo, el interesante artículo [Dy]), la Teoría de Números en Criptografía o la utilización de los Sistemas Dinámicos, la Teoría del Caos y los Fractales en Medicina, Meteorología o Economía (*cfr.*, por ejemplo, [St]). Recordemos que varios Premios Nobel en Economía han sido otorgados a economistas con una fuerte formación matemática y por sus contribuciones a la Economía Matemática (**L. Kantorovich**, en 1975; **G. Debreu**, en 1983, por ejemplo). En este campo, como en muchos otros, se utilizan cada vez con mayor frecuencia técnicas y métodos matemáticos procedentes del área de la matemática más pura. Un botón de muestra puede ser el libro [AB], publicado en la prestigiosa colección “Studies in Economic Theory” de Springer. La obra, según los autores, tuvo su origen en un seminario sobre Economía Matemática impartido en Caltech en 1989-90, e intenta “presentar y organizar los fundamentos analíticos subyacentes en la economía moderna y las finanzas...”. Pues bien, las 600 páginas largas de esta Monografía constituyen una excelente recopilación del *Análisis Funcional* más abstracto: Espacios Vectoriales Topológicos, Espacios normados, Retículos de Banach, Medida y topología, Espacios de sucesiones, Teoría ergódica...

Esta tendencia creciente a la matematización, ha originado también, como ocurrió en el siglo XVIII, necesidades matemáticas específicas, lo que S. Bochner llama “matemáticas-para-usos diversos” (*cfr.* [Bo]), y que ciertamente ha contribuído a la aparición y desarrollo de nuevos métodos y teorías matemáticas. Ello ha producido, a su vez, un reavivamiento de la polémica entre la "matemática aplicada" y "matemática pura" (*cfr.*, p. e. [Bo], [Da], [DH]) . Esta polémica, iniciada a mediados del siglo XIX, cuando la Matemática obtuvo su *status* de Ciencia independiente, aparece cada cierto tiempo y, a mi entender, es en gran parte artificial y coyuntural. Basta realizar un pequeño recorrido histórico para darse cuenta de cómo cambia la opinión de la corriente dominante en la Comunidad matemática en un sentido u otro. Ya hemos visto como la mayor parte de los matemáticos del XVIII y primera mitad del XIX consideraban que el desarrollo de teorías matemáticas "abstractas" estaba fundamentalmente motivado por la necesidad de obtener nuevas herramientas que permitieran resolver los problemas planteados por la observación y modelización de la Naturaleza. Sin embargo, en el último tercio del siglo XIX la actividad de la mayor parte de las sociedades Matemáticas, con la potente escuela alemana al frente, estaban dirigidas al establecimiento de las Matemáticas como disciplina autónoma, como un fin en sí misma y basada en sus propios principios fundamentales. Por supuesto, el papel de las matemáticas para desarrollar y enriquecer otras ciencias (especialmente la Física y la Astronomía), nunca se puso en duda. Pero gran parte de la actividad de la Comunidad matemática estaba dirigida a la fundamentación y desarrollo interno de la misma. Posiblemente no fue ajeno a este movimiento el creciente número de matemáticos profesionales, con el consiguiente aumento de la productividad matemática y la progresiva fragmentación de esta ciencia en campos más y más especializados. Esto provocó una cierta actitud arrogante y despectiva hacia las aplicaciones de las matemáticas a problemas prácticos concretos. Un ejemplo extremo de esta actitud es el comentario de **E. Kummer** (1819-1893) de que *"la matemática aplicada es una matemática sucia"*. Menos agresivo, pero también contundente se muestra **C. J. Jacobi** (1804-1851) al decir

> *Es cierto que Fourier opina que el principal objetivo de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un científico como él debería saber que el único objeto de la ciencia es el honor del espíritu humano y, sobre esta base, un problema de la teoría de números es tan importante como una cuestión sobre el sistema planetario...*

¡Por supuesto, Jacobi hizo contribuciones fundamentales a en Mecánica y Astronomía!. En el otro lado, podrían situarse físico-matemáticos como **Lord Kelvin** (William Thomson, 1824-1907) o el mismo **L. Kronecker** (1823-1891), el gran enemigo de Cantor quien, a su vez, hizo importantes trabajos en álgebra abstracta (como después dijo Poincaré, "se olvidó de su propia filosofía"). Pero incluso una misma persona puede variar sus opiniones a lo largo de su vida profesional. Así, por ejemplo, el mismo **C. F. Gauss** (1777-1855) afirma que *" la Matemática es la reina de las Ciencias, y la aritmética es la reina de las Matemáticas...*, lo que parece un claro manifiesto a favor de la matemática pura. Sin embargo, en otro momento Gauss escribe: *"Tú, Naturaleza, eres mi diosa; a* [descubrir] *tus leyes dedico mis servicios".* Desde luego, es universalmente aceptado que Gauss, astrónomo de profesión y calculista impresionante, es uno de los mayores matemáticos "puros" de la Historia. Toda la matemática del siglo XIX estuvo dominada por las ideas de este matemático genial.

A principios del siglo XX, el péndulo comienza a oscilar nuevamente. **F. Klein** (1849-1925) en Alemania advierte de los peligros de la abstracción sin más en Matemáticas:

"...No podemos menos de advertir que en el rápido desarrollo del pensamiento moderno, nuestra ciencia está en peligro de quedarse cada vez más aislada. La íntima relación mutua entre las matemáticas y las ciencias naturales que, para beneficio de ambas partes, existía desde el comienzo del desarrollo de Análisis Moderno, amenaza con romperse..."

Los ejemplos pueden multiplicarse indefinidamente. **H. Poincaré** (1854-1912), tras repasar alguno de los logros de la Matemática de finales del XIX, los pone como muestra de *...lo que la mente humana puede crear cuando se libera de la tiranía del mundo exterior...*, insiste, sin embargo en que *...es en la otra dirección, la de la naturaleza, hacia donde debemos dirigir el grueso de nuestro ejército.* (*Cfr.* [P1], [P2] y [P3]). **R. Courant**, **G. D. Birkhoff** o **J. Von Neumann**, entre otros, advirtieron en distintas ocasiones del peligro que corre la Matemática "pura" de convertirse en un mero juego formal, si se abandonaba la conexión con las demás ciencias naturales como fuente de inspiración en la investigación. Por contra, el gran matemático británico **G. H. Hardy** (1877-1947) afirma en [Ha]:

> *Jamás he hecho nada "útil". Ninguno de mis descubrimientos ha causado, ni es probable que sea la causa de, directa o indirectamente, para bien o para mal, la más mínima diferencia en el bienestar del mundo [...] El alegato en pro de mi vida, y obviamente de quienquiera que haya sido matemático en el mismo sentido en que lo he sido yo, es éste: he aportado algo al conocimiento y he ayudado a otros a aportar más; y que estos "algos" tienen un valor que difiere sólo en grado, mas no en naturaleza, de las creaciones de los más grandes matemáticos, o de cualesquiera otros artistas, grandes o pequeños, que hayan dejado tras de sí algo por lo que ser recordados.*

(tomado de [DH, pág. 72]). Y en un artículo sobre las matemáticas en 1940,

> *Debería decir cuanto antes que por "matemáticas" yo entiendo matemáticas* [de verdad], *las matemáticas de Fermat, Euler, Gauss y Abel, y no la mezcolanza que se hace pasar por matemáticas en un laboratorio de ingeniería. Y no pienso sólo en matemática "pura" (aunque, naturalmente, es mi primera elección); Cuento a Maxwell, Einstein, Eddington y Dirac entre los matemáticos "de verdad".*

Sin ser tan radicales, **M. Stone**, **L. Schwartz** o **J. Dieudonné**, por citar alguno entre los matemáticos más importantes del siglo XX, han defendido también en distintas ocasiones la importancia del estudio de los sistemas abstractos generales, sin necesidad de buscar aplicaciones concretas.

En todo caso, el enorme crecimiento de los conocimientos científicos y la necesidad de una especialización cada vez más acusada, hacen que cada vez tenga menos sentido la dicotomía "matemática pura"-"matemática aplicada". Una gran parte de los matemáticos profesionales se mueven en parcelas de saber tan especializadas que sería difícil su adscripción directa a una de las dos categorías mencionadas. Más aún, probablemente a lo largo de su vida profesional, cambien más de una vez su adscripción formal a uno u otro campo.

Queremos terminar este comentario con la opinión de Salomon Bochner sobre esta polémica:

> *La mayor parte de la matemática-para-un-fin-determinado que se está desarrollando, probablemente perdurará, pero nos gustaría señalar que cuanto más "pura" es la matemática, más capaz es de incorporar los esquemas importantes de la textura general del conocimiento; por esta razón, en el pasado, las aplicaciones más importantes a las ciencias básicas provinieron de la matemática que se había desarrollado por sus propios fines y su lógica interna, más que de la matemática que se había desarrollado con alguna finalidad concreta.* ([Bo; pág. 7-8])

Como ya he dicho anteriormente, mi opinión personal es que se trata de una falsa polémica, avivada cada cierto tiempo por razones que muchas veces son extrañas a la propia Comunidad Matemática. Estoy mucho más de acuerdo con la clasificación que hace el reciente ganador de la medalla Field **W. T. Gowers**, distinguiendo entre los matemáticos que conciben su Ciencia como una enorme colección de problemas fascinantes que resolver, y los que prefieren construir y desarrollar teorías amplias y generales (que permitan, a su vez, resolver mejor los problemas que se planteen) (*cfr.* [Go]). Muchos matemáticos se adscribirían a las dos categorías: como dice Gowers, *... No todos los problemas son igualmente interesantes, y una forma de reconocer los más interesantes es demostrar que sirven para mejorar nuestro conocimiento de las matemáticas como un todo...* Pero también existen otros matemáticos que se decantarían claramente por una u otra actitud. El mismo Gowers, por ejemplo, cita a **M. Atiyah** entre los *teóricos* y a **P. Erds** como prototipo de los *resolvedores de problemas* (ambos excelentes matemáticos). Pero se podrían añadir muchos más ejemplos. Creo que esta es una diferencia mucho más profunda y real entre los matemáticos que la vieja dicotomía entre "puros" y "aplicados".

Es obvio que las matemáticas necesitan de ambas clases de matemáticos. Y también es evidente que distintas ramas de las matemáticas requieren aptitudes diferentes. Pero ambas *culturas*, como las llama Gowers, se necesitan y complementan. En último caso, el único adjetivo diferenciador aceptable ha de ser el de *buenas* matemáticas frente a *malas* matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

[AB] ALIPRANTIS, Ch., BORDER, K.: *Infinite Dimensional Analysis: a hitchiker's guide.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Bo] BOCHNER, S.: *The role of Mathematics in the rise of Sciencie.* Princeton, 1966. (Hay traducción en castellano: *El papel de la matemática en el desarrollo de la Ciencia.* Alianza Universidad Ciencia 689. Madrid, 1991.)

[Bk] BOURBAKI, N.: *The Architecture of Mathematics.* American Math. Monthly, **57** (1950), 221-232.

[Bg] BROGLIE, L. DE: *El papel de las Matemáticas en el desarrollo de la física teórica contemporánea.* En "Las grandes corrientes del pensamiento matemático", F. Le Lionnais y Col. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 3a. Ed., 1976.

[Br] BRUTER, C. P: *Sur la nature des mathématiques.* Gauthier-Villars, 1979.

[CR] COURANT, R., ROBBINS, H.: *What is Mathematics?* Oxford University Press, 14th Ed., 1969. (Traducción española: *¿Qué es la Matemática?*, Madrid, Aguilar.)

[Da] DAVIS, CH.: *Where did Twentieth-Century Mathematics go wrong?* en "The intersection of History and Mathematics", S. Chikara *et alt.*, Ed. Birkhõuser, 1994.

[DH] DAVIS, Ph. J., HERSH, R.: *Experiencia Matemática.* Ed. Labor, 1988.

[DD] DIEUDONNE, J.: *History of Functional Analysis.* North Holland Math. Studies **49**. North-Holland Pub., 1981.

[Di] DIRAC, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*, (4a. Edición) Oxford University Press, 1958.

[Dy] DYSON, F. J.: *Matemáticas en las Ciencias Físicas* en "Matemáticas en el Mundo Moderno", Selecciones de Scientific American. Ed. Blume, Madrid, 1974.

[Fe] R.P. FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. y SANDS, M:: *Fí sica Vol. III.- Mecánica Cuántica.* Addison Wesley Iberoamericana, 1971.

[Go] GOWERS, W. T.: *The two cultures of Mathematics.* En "Mathematics: Frontiers and Perspectives". Amer. Math. Soc., 2000.

[GG] GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.): *From the Calculus to Set Theory: 1630-1910.* Durckworth, London, 1980. (Hay traducción española en Alianza Ed., 1984).

[Ha] HARDY, G. H.: *A Mathematician's Apology*, Cambridge Univ. Press, 1967.

[He] HEATH, T.L.: *A history of Greek mathematics.* Vol. 1-2. Dover, New York, 1981.

[Hm] HEIMS, S. J.: *J. Von Neumann y N. Wiener.* Biblioteca Salvat de grandes biografías. Salvat Ed., Barcelona, 1989; 2 Vols.

[J1] JAMMER, M.: *The Philosophy of Quantum Mechanics.* Wiley Interscience, 1974.

[J2] JAMMER, M.: *The conceptual development of Quantum Mechanics.* en " The History of Modern Physics, 1800-1950" Vol. 12. American Inst. of Physics, 1989.

[Ka] KATZ, V.: *A history of Mathematics: an introduction.* 2nd. Ed. Addison-Wesley, Reading. Mass., 1988.

[K1] KLINE, M.: *Mathematics. The Loss of Certainty.* Oxford University Press, 1980.

[K2] KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern times.* Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[Ed] EDWARDS, C.H.: *The historical development of the Calculus.* Springer, 1979.

[La] LAKATOS, I.: *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Ed., Madrid, 1981.

[Ma] MANIN, Yu. I.: *Mathematics as Profession and Vocation.* en "Mathematics: Frontiers and Perspectives", Amer. Math. Soc., 2000.

[Na] NAGEL, E.: *The structure of Science.* Routledge and Kegan Paul Ltd., London, 1961.

[Ne] NEWMAN, J.: *SIGMA. El Mundo de las Matemáticas. Vols. 1-6.* Ed. Grijalbo, Barcelona, 1968.

[P1] POINCARÉ, H.: *La Ciencia y la Hipótesis.* Col. Austral, nº 379. Espasa Calpe. 3ª Ed., Madrid, 1963

[P2] POINCARÉ, H.: *Ciencia y Método.* Col. Austral, nº 409. Espasa Calpe. 3ª Ed., Madrid, 1963.

[P3] POINCARÉ, H.: *El valor de la Ciencia.* Col. Austral, nº 628. Espasa Calpe. 1ª Ed., Buenos Aires, 1946.

[RT] RADEMACHER, H. y TOEPLITZ, O.: *Números y Figuras.* Alianza Ed., Madrid, 1970.

[Sc] SCHUBRING, G.: *Pure versus Applied Mathematics in Late 19th.-Century Germany.* En "The History of Modern Mathematics, Vol. II", Proc. of the Symposium on the History of Modern Mathematics, Poughkeepsie, New York, 1989. D. R. Rowe, J. McCleary, Edts. Academic Press, 1989.

[St] STEWART, I.: *¿Juega Dios a los dados? La nueva Matemática del caos.* Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1991.

[Ta] TATON, R. (ed.): *Histoire générale des sciences.* Presses Univ. de France, Paris, 1957-1961, 5 vols. (Hay traducción al español por Destino, Barcelona, 1971-75, y por Orbis, Barcelona, 1988)

[Vn] VON NEUMANN, J.: *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica.* Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1949.

[Wi] WIGNER, E.: *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Commun. Appl. Math. **13** (1960), 1-14.