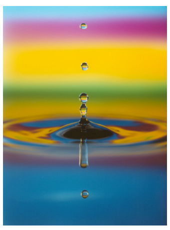
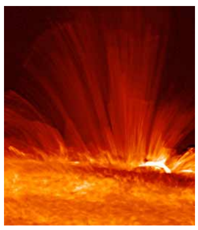
En busca de singularidades en fluidos incompresibles

por
Diego Córdoba, CSIC-ICMAT

Este artículo es un resumen de la conferencia *En busca de singularidades en fluidos incompresibles* impartida en el ciclo "Un Paseo por la Geometría 2010/2011".

Empecemos estas notas dando una definición precisa de las tres palabras cruciales en el título:

- ¿Qué es un fluido? Aquella sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia y adopta la forma del recipiente que lo contiene. Tres estados de la materia satisfacen esta definición:
  - Líquido
  - Gas
  - Plasma.

- ¿Qué es un fluido incompresible? Un fluido que no se puede comprimir; el volumen del fluido se preserva en el tiempo.

- ¿Qué es una singularidad de un fluido incompresible? Que una de las características (la velocidad, la presión, la frontera, etc.) que describen al fluido desarrolle en tiempo finito una cantidad que se haga infinito.

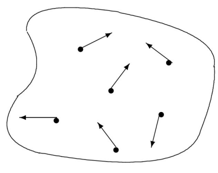
 

Podemos decir que la teoría matemática de la dinámica de los fluidos comienza en el siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, quien fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica a los movimientos de los flujos. Más tarde Leonhard Euler escribió por primera vez en 1755 las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal, es decir, en ausencia de disipación debido a la interacción entre moléculas. Y finalmente C. Navier (1822) e, independientemente, G. Stokes (1845) introdujeron en el modelo el término de viscosidad y llegaron a las ecuaciones que hoy denominamos "Navier-Stokes".

Leonhard Euler (1707-1783)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

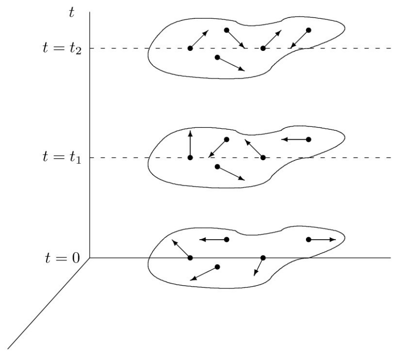
Hay dos formas clásicas de interpretar el fluido; la versión Euleriana y la versión Langrangiana. La descripción matemática de un fluido requiere:



- D es un dominio de $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)
- $x \in D$ es una partícula del fluido
- $\rho(x,t)$ es la densidad del fluido en el punto x en el instante t
- $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ nos da la velocidad que tendría una partícula en cada punto x del espacio y cada tiempo t,

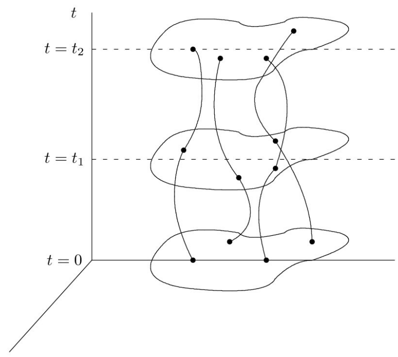
- $p = p(x,t)$ es la presión en el seno del fluido.

Formulación euleriana: fijar un punto en el dominio y medir sus características en ese punto



$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$$

Formulación lagrangiana: calcular la variación de sus características a lo largo de trayectorias



$x = x(a,t)$ es la trayectoria de la partícula que está en posición a en tiempo $t = 0$.

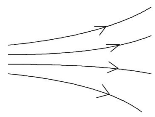
Relación entre las dos formulaciones viene dada por la siguiente ecuación:

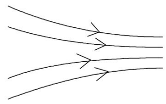
$$\frac{dx}{dt} = u(x,t)$$

El objetivo de las ecuaciones de Navier-Stokes es modelar la evolución de un fluido incompresible a partir de la segunda ley de Newton, que asocia la aceleración de las partículas con las fuerzas que actúan sobre ellas (las variaciones espaciales de la presión, las fuerzas de rozamiento entre las moléculas, viscosidad, y las posibles fuerzas externas como la gravitatoria), y con la ley de conservación de masa. Las condiciones de contorno varían dependiendo del contexto en el que estemos; un fluido en un vaso tiene la restricción de que la frontera del dominio es estática. En el caso por ejemplo, de considerar la evolución de dos fluidos inmiscibles uno dentro de otro (o un fluido en el vacío) entonces la frontera se mueve con el flujo.

Incompresibilidad es equivalente a que la velocidad sea de divergencia nula i.e.

$$\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

- En el caso de $\operatorname{div}(u) > 0$ el fluido se expande 

- En el caso de $\operatorname{div}(u) < 0$ el fluido se comprime 

Para la velocidad de la partícula $u(x(a,t),t)$ la aceleración viene dada por:

$$\frac{d}{dt}u(x(a,t),t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u$$

Así que

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u\right) = F_{\text{internas}} + F_{\text{externas}}$$

Fluidos perfectos, $\rho = 1$, sin fuerzas externas:

$$(Euler) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{div}(u) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u & = & -\nabla_x p \end{array} \right.$$

Fluidos viscosos, $\rho = 1$, sin fuerzas externas:

$$(Navier - Stokes) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{div}(u) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u & = & -\nabla_x p + \nu \Delta u \end{array} \right.$$

Fluidos perfectos y viscosos. En coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1 \le j \le n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_i, \qquad i = 1,..,n \\ \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

donde ν es el coeficiente de viscosidad cinemática y $f = f_i(x,t)$ representa un campo de fuerzas externo.

C. Navier (1785-1836) y G. Stokes (1819-1903)

Una de las propiedades fundamentales en este sistema es que en el caso de fluidos no viscosos la energía se conserva y con viscosidad la energía decae. La energía se define por $\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$, y de las ecuaciones se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + \nu \int_{t_0}^{t}\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t_0)|^2 dx.$$

Uno de los problemas más importantes en la mecánica de fluidos consiste en deducir de los modelos físicos la formación de singularidades que nos ayude a entender fenómenos como la turbulencia, formación de frentes de aire frío y caliente, formación de tornados, dinámica de las olas, la ruptura de gotas etc. La cuestión a determinar es si un fluido incompresible con energía finita puede desarrollar singularidades en tiempo finito. Ocurre que las ecuaciones que rigen la dinámica de un fluido, Navier-Stokes, son no-lineales y no-locales pero, a su vez, tienen una rica estructura que conserva cantidades globales y, en el caso de ausencia de viscosidad (las ecuaciones de Euler) conservan también diversas estructuras locales.

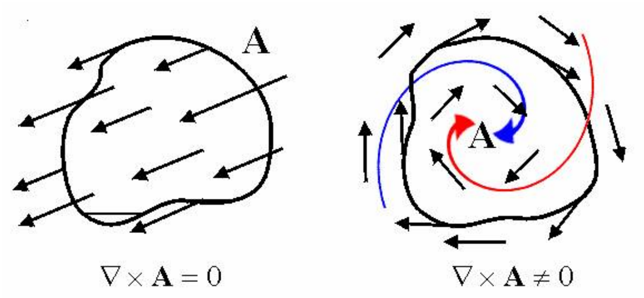
El matemático francés J. Leray fue pionero en hacer un análisis matemático de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. En 1933 probó la existencia local de soluciones regulares donde el tiempo de existencia depende del dato inicial. Introdujo, en 1934, la noción de solución débil, antes del desarrollo de la teoría de distribuciones por L. Schwartz (1950) y poco antes de que S.L. Sobolev (1936) definiera los famosos espacios que llevan su nombre, y probó la existencia de soluciones débiles para Navier-Stokes. No obstante la unicidad de las soluciones débiles sigue siendo un problema abierto. En cambio para las ecuaciones de Euler la unicidad es falsa. Uno de los problemas más importantes, por sus consecuencias dentro de la física y de la ingeniería, es el problema de existencia de singularidades para las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes en dimensión 3. La presencia de dichas singularidades fue conjeturada por J. Leray como posible explicación del fenómeno de la turbulencia. De hecho, Leray llamo a sus soluciones débiles “soluciones turbulentas”, anticipando una conexión entre singularidades de las soluciones débiles y el fenómeno de la turbulencia.

Tal como ya observó Leonardo da Vinci, el régimen turbulento se caracteriza por la aparición de remolinos (torbellinos) a muy diversas escalas espaciales. La aparición de estructuras *rotantes* en el seno de un campo vectorial sugiere la introducción de un operador vectorial clásico que las caracteriza: el rotacional.

En el contexto de la mecánica de fluidos al rotacional del campo de velocidades se le denomina vorticidad y es un vector que juega un papel crucial. La vorticidad se define como

$$\omega(x,t) = \nabla \times u(x,t) = \Big(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big)$$

La vorticidad es un término que sirve para cuantificar la rotación local de un fluido



El clásico criterio para la formación de singularidades en fluidos es el teorema de Beale, Kato y Majda (1984)

$$\textit{Singularidad en tiempo } T \textit{ si y solo si } \int_0^T sup_x|\omega|dt = \infty.$$

Y una consecuencia de este criterio son los siguientes resultados:

- Un fluido muy viscoso no tiene singularidades. Viscosidades muy grandes (o velocidades muy pequeñas) previenen que la vorticidad incremente su intensidad.
- En dimensión 2 $sup_x|\omega|$ está acotado.

A finales del siglo pasado, y con ocasión del cambio de milenio se reflexionó sobre las cuestiones matemáticas más relevantes que quedaban por resolver y que debían concentrar los esfuerzos intelectuales en años venideros. A este respecto el problema de existencia de singularidades para el sistema de Navier-Stokes juega un papel estelar. El Instituto Clay lo ha distinguido como uno de los siete problemas del milenio, dotados con un premio de un millón de dólares. A día de hoy ya se conoce la solución de uno de esos problemas; la conjetura de Poincaré. Desde que Poincaré formuló el problema han pasado 100 años para su resolución; Grigoriy Perelman, en dos artículos en 2002 y 2003 halló la respuesta usando el trabajo pionero de Richard Hamilton con su teoría del flujo de Ricci.

Las condiciones de contorno desempeñan un papel crucial, por ejemplo en dos dimensiones las respuestas a esta pregunta pueden ser opuestas dependiendo si la frontera es libre o rígida. En una serie de trabajos recientes, en colaboración con Ángel Castro, Charles Fefferman, María López-Fernández, Francisco Gancedo y Javier Gómez-Serrano, demostramos la existencia de singularidades para varios ejemplos de fluidos incompresibles bidimensionales donde la densidad del fluido tiene dos valores constantes separados entre sí por una interfase (frontera libre) sin tensión superficial. Estos resultados nos dan la esperanza de poder explicar de primeros principios la naturaleza y estructura de las singularidades en la dinámica de fluidos.

Diego Córdoba
Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)
Instituto de Ciencia Matemáticas (ICMAT)
Nicolás Cabrera, 13-15
Campus Cantoblanco
28049 Madrid
e-mail: dcg@icmat.es
http://www.icmat.es/user/14