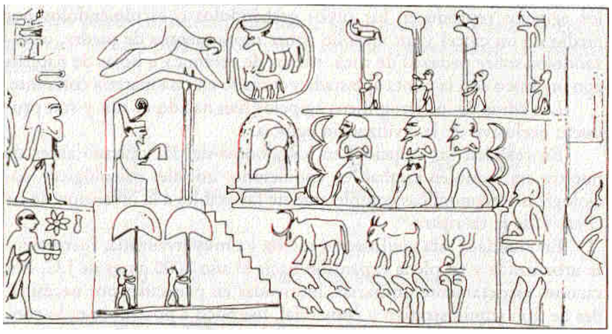
Matemáticas en el Antiguo Egipto

por

Ainhoa Berciano Alcaraz, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

A lo largo de la historia de la arqueología egipcia se han ido encontrando distintos restos en los que aparecen las matemáticas. Entre ellos destaca *la maza del rey Narmer* (considerado el unificador del Alto y del Bajo Egipto), la cual data del 3000 a.C. y hasta la fecha es el resto arqueológico más antiguo con relevancia en el campo matemático.



En dicha maza para demostrar el poderío del rey se hace un recuento de las posesiones más destacables en el período de su reinado, es decir, víveres y prisioneros.

- 400.000 toros.
- 1.422.000 cabras.
- 120.000 prisiones

Con respecto a las matemáticas, es importante subrayar que a pesar de que la mayoría de los resultados obtenidos en la época egipcia eran puramente experimentales y reflejaban soluciones a problemas surgidos de la vida real, algunos destacan tanto por los resultados mostrados como por los procedimientos usados en la resolución.

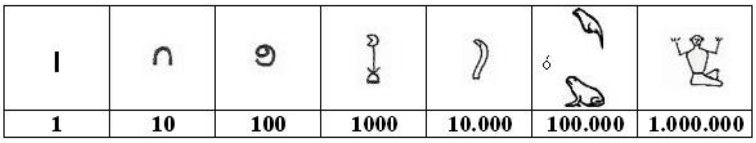
En las siguientes secciones mostraremos algunos de estos ejercicios, los cuales reflejan a grandes rasgos el conocimiento matemático de la época. A la vez, dichos ejercicios reflejan una elección personal con el fin de adecuar el contenido a la charla dada en el ciclo de conferencias “un paseo por la geometría”, centrándonos, como no, en problemas relacionados con la geometría elemental, más concretamente, la resolución de áreas y de volúmenes, quedando otros muchos sin ser considerados, tales como progresiones aritméticas, repartos desiguales, etc, dejándolos al interés del lector.

Por otro lado, es conveniente que recordemos que la mayoría de los resultados que vamos a mencionar se consideran demostrados por griegos ilustres, entre los que destacamos a Pitágoras (582-507 a.C.), Euclides (325-265 a.C.) o Arquímedes (287-212 a.C., autor de la primera aproximación a lo largo de historia del número π), pero aún así, 1500 años antes, ya hubo que dar una solución aunque ésta fuera de modo empírico.

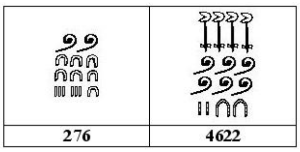
1. Tipos de escritura y papiros

Uno de los aspectos primordiales que marcó la descripción de las matemáticas y la complejidad de la resolución fue el tipo de escritura. De hecho, a lo largo de la historia egipcia, la escritura evolucionó poco a poco, pudiéndose dividir de este modo en tres períodos bien diferenciados:

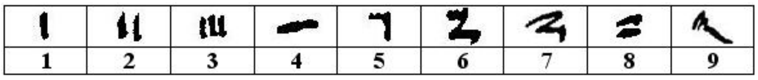
- Escritura *jeroglífica*: usada desde el 3200 a.C. hasta aproximadamente el 2500 a.C. En este período la numeración usada era similar a la mostrada en la siguiente tabla

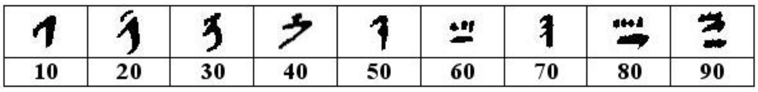


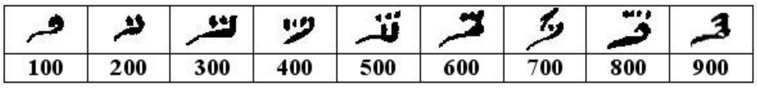
En particular, los números a parte de tener que escribirse con un gran número de símbolos, debían ser escritos con cierta estética, agrupando los símbolos del mismo tipo, a poder ser en orden descendente de valor,...



- Escritura *hierática*: usada predominante desde el 2500 a.C. hasta aproximadamente el 600 a.C. Al igual que antes, la numeración usada varió con el tipo de escritura, dando lugar a una mayor riqueza en el número de símbolos usado para escribir distintas cifras.





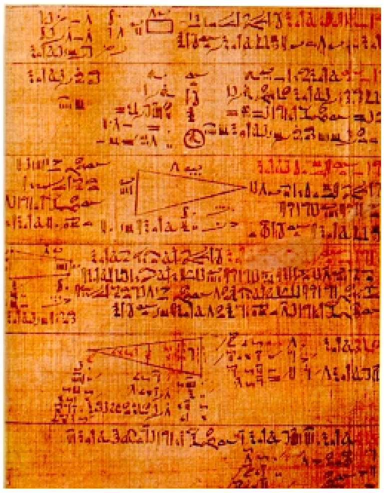


Con esta nueva notación de los números, es clara la simplificación en el número de símbolos usados a la hora de escribir en documentos o de realizar operaciones elementales con ellos. En los dos ejemplos siguientes vemos como hemos pasado de necesitar 20 y 17 símbolos en escritura jeroglífica respectivamente a sólo 4 en hierática.

- Escritura *demótica*: usada en el período tardío de la cultura egipcia, desde el 600 a.C. en adelante. Esta última variación en la escritura también produjo una leve variación en los símbolos usados para los números con respecto a la escritura hierática.

En concreto, los resultados mostrados en este texto son una colección de los ejercicios planteados y resueltos en tres de los papiros matemáticos más importantes hasta ahora encontrados: el *papiro de Rhind*, el *papiro de Moscú* y el *papiro de Berlín*, los cuales datan de la época hierática. Por ello, primero pasemos a describir las características más notables de cada uno de ellos:

- El *papiro de Rhind* o también conocido como *papiro de Ahmes*, debe su nombre a Henry Rhind, egiptólogo escocés que en 1858 adquirió una colección de papiros entre los que se encontraba éste. Data del 1650 a.C, mide aproximadamente 6 metros de largo por 33 centímetros de ancho y su contenido es puramente matemático con 87 **problemas** planteados y resueltos. El autor del mismo es un escriba llamado *A*^{c}*h-mosè* también conocido por *Ahmes*.

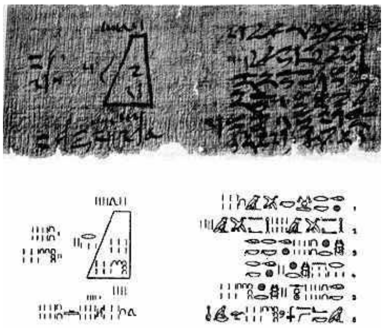
  Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres y comienza con la frase *"Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios"*. Se supone que podría tener como finalidad el ilustrar a los futuros escribas en el ejercicio de sus actividades, (relacionadas con la recaudación, con los repartos, etc), por lo que la resolución de los problemas está escrita de modo pedagógico.

  Además, en el comienzo del papiro, Ahmes hace alusión a que la escritura del mismo es una recopilación de información extraída de otros de 200 años de antigüedad, lo que lleva a suponer que la resolución de los problemas como poco data del 1900 a.C.

  Entre sus problemas planteados destacan los relacionados con la multiplicación y división, fracciones unitarias, áreas de rectángulos, triángulos y círculos (aproximación de π), resolución de ecuaciones con 1 incógnita y cálculo de volúmenes y cálculos sobre pirámides.

- El *papiro de Moscú* originalmente conocido por *papiro de Golenishchev*, fue comprado por Golenishchev en el año 1883, pero tras ser adquirido por el Museo de Bellas Artes de Moscú en 1912, se le conoce con el nombre de papiro de Moscú. Data del 1890 a.C., mide aproximadamente 5 metros de largo por 8 centímetros de ancho y al igual que el papiro de Rhind, es un papiro con contenido puramente matemático, con 25 **problemas** planteados y resueltos.

De autor desconocido, en este caso no es tan clara la finalidad del mismo. En la imagen mostrada más abajo se aprecia en la parte superior el papiro original en escritura hierática y en la parte inferior su traducción en jeroglífica.



De dicho papiro podemos destacar los problemas relacionados con áreas de rectángulos y triángulos, volúmenes de pirámides truncadas, cálculo del área superficial de un "cesto", ecuaciones lineales y las fracciones unitarias.

- El *papiro de Berlín* es una colección de papiros matemáticos y médicos datados alrededor del 1300 a.C. Al igual que el papiro de Moscú, se desconoce el autor de los mismos.

Entre sus papiros se encuentran problemas relacionados con las fracciones unitarias, ecuaciones lineales y sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas (una de las cuales es además de segundo grado).

Por último queda decir que a pesar de que los dos papiros más importantes en los que nos hemos basado contienen información datada alrededor del año 1800 a.C., se cree que los problemas aquí expuestos ya podrían haber sido resueltos hacia el 3000 a.C., aunque de momento no se haya encontrado ningún documento que lo pueda confirmar.

2. Aritmética

La primera característica a destacar es que gracias al conocimiento completo de las *tablas de duplicación* y el *cálculo de los tercios de un número*, los escribas manejaban con total facilidad las cuatro operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división.

Las sumas se realizaban del modo más simple posible, se añadían los símbolos y en el caso de tener 10 iguales se sustituían por uno de la siguiente potencia de 10, tal y como muestran los ejemplos con escritura jeroglífica.

24+33=77 37+46=83

Las restas se realizaban de modo análogo a las sumas, pero las multiplicaciones y divisiones enteras tenían una característica muy peculiar, esto es, se realizaban utilizando exclusivamente *las tablas de duplicación* o *potencias de* 2, lo que podría considerarse como el *origen del sistema binario* (utilizado por los ordenadores actuales). Veamos algunos ejemplos junto con su curioso modo de resolución:

Problema del papiro de Rhind: calcular el resultado de multiplicar 41 por 59.

Solución: para obtener el resultado, se consideran las potencias del número 2, 2^n, hasta que 2^{n+1} sea mayor que 41, construyendo así una tabla en la que en la primera columna se colocan las potencias de 2, en la segunda el valor de multiplicar 59 por dicha potencia y en la tercera se escogen los valores necesarios para el cálculo (marcados por una x). Así pues, tenemos

1	59	x
2	118	
4	236	
8	472	x
16	944	
32	1888	x

$$41 = 32 + 8 + 1$$
$$\Downarrow$$
$$41 \cdot 59 = (32 + 8 + 1) \cdot 59$$
$$\Downarrow$$
$$1888 + 472 + 59 = 2419$$

Problema del papiro de Moscú: calcular el resultado de dividir 98 entre 7.

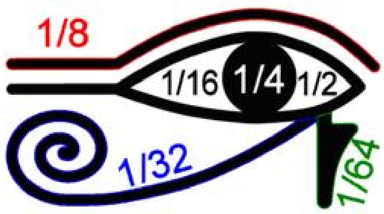
Solución: al igual que para las multiplicaciones, en este caso se vuelve a utilizar una tabla de potencias de 2, hasta que $7 \cdot 2^{n+1}$ sea mayor que 98, obteniendo, de nuevo, una tabla con 3 columnas:la primera con las potencias de 2, la segunda con el resultado de multiplicar 7 por dicha potencia y en la tercera, se marcan con una x los valores pertinentes de esta división:

1	7	
2	14	x
4	28	x
8	56	x

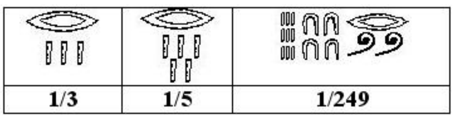
$$\begin{gathered} 98 = 56 + 28 + 14 \\ \Downarrow \\ 98 = 7 \cdot (2 + 4 + 8) \\ \Downarrow \\ 98/7 = 2 + 4 + 8 = 14 \end{gathered}$$

3. Fracciones unitarias

Cuenta la historia que el dios Seth mató a Osiris, padre de Horus, y que éste, por vengar a su padre, años más tarde se enfrentó a Seth. En dicha batalla, el ojo de Horus fue seccionado por distintas partes, las cuales fueron asociadas a fracciones unitarias denominadas las *fracciones del ojo de Horus*. Así pues, la parte izquierda de la pupila equivalía a $1/2$, la pupila a $1/4$, las cejas a $1/8$, la parte derecha del ojo a $1/16$, la parte inferior vertical bajo el ojo a $1/32$ y la parte inferior diagonal del ojo a $1/64$.



De hecho, se supone que el uso de fracciones unitarias se debió a la simplificación en la notación considerándose oportuno que un número natural n con un círculo encima significara la fracción $1/n$.



Dicha notación dio lugar a representar fracciones con numerador distinto de 1 como sumas de fracciones unitarias. Un ejemplo simple podría ser la fracción $3/4$, la cual es equivalente a

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Pero por otro lado, este sistema de descripción de fracciones no unitarias dio lugar también a problemas en su equivalencia como sumas de unitarias dado que la representación usada en muchos casos no era única, tal y como muestra el siguiente ejemplo con la fracción 19/20: por un lado, ésta puede escribirse como

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5},$$

pero también como

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.$$

Por tanto, ¿cual era la más adecuada? o ¿cual era la que resultaba más asequible de manejar por los escribas?. En particular, en el papiro de Rhind aparece una tabla (semejante a la mostrada más abajo) con la descomposición de fracciones con numerador 2 y denominador un número impar entre 3 y 101:

Div.	Descomposición	Div.	Descomposición
3	2/3	53	1/30 + 1/318 + 1/795
5	1/3 + 1/15	55	1/30 + 1/330
7	1/3 + 1/15	57	1/38 + 1/114
9	1/6 + 1/18	59	1/36 + 1/236 + 1/531
11	1/6 + 1/66	61	1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
13	1/8 + 1/52 + 1/104	63	1/42 + 1/126
15	1/10 + 1/30	65	1/39 + 1/195
17	1/12 + 1/51 + 1/68	67	1/40 + 1/335 + 1/536
19	1/12 + 1/76 + 1/114	69	1/46 + 1/138
21	1/14 + 1/42	71	1/40 + 1/568 + 1/710
23	1/12 + 1/276	73	1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
25	1/15 + 1/75	75	1/50 + 1/150
27	1/18 + 1/54	77	1/44 + 1/308
29	1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	79	1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
31	1/20 + 1/124 + 1/155	81	1/54 + 1/162
33	1/22 + 1/66	83	1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498
35	1/30 + 1/42	85	1/51 + 1/255
37	1/24 + 1/111 + 1/296	87	1/58 + 1/174
39	1/26 + 1/78	89	1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890
41	1/24 + 1/246 + 1/328	91	1/70 + 1/130
43	1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301	93	1/62 + 1/186
45	1/30 + 1/90	95	1/60 + 1/380 + 1/570
47	1/30 + 1/141 + 1/470	97	1/56 + 1/679 + 1/776
49	1/28 + 1/196	99	1/66 + 1/198
51	1/34 + 1/102	101	1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606

Dicha tabla fue comparada a mediados de los años 60 con los 22295 posibles resultados obtenidos por un programa de ordenador (imponiendo como única condición que en las igualdades halladas, las sumas de fracciones tuvieran a lo sumo 4 términos), con el que se pudieron estudiar las razones que dieron lugar a la elección de las igualdades escritas por el escriba y enunciar interesantes teorías al respecto, entre las que destaca la teoría de R.J. Gillings por su alto porcentaje de aceptación entre los estudiosos (ver [1]).

Dicha teoría describe 5 principios básicos que podrían haber sido usados por los escribas a la hora de elegir la suma de fracciones más idónea, más concretamente:

1. De las posibles igualdades, la que tenga denominadores más pequeños es preferible, sin exceder ninguno el número 1000.
2. Una igualdad con 2 términos es preferible a una con 3; una con 3 a una con 4 y jamás se usan igualdades en las que aparezcan más de 4 fracciones.
3. Las fracciones se escriben en orden ascendente de denominador y nunca se repite la misma dos veces.
4. La primera fracción marca la elección, esto es, de todas las igualdades posibles, se escoge la que tenga el primer denominador más pequeño; salvo que el coger una con el denominador más grande implique una reducción sustancial en los posteriores denominadores.
5. Son preferibles denominadores con números pares a aquellos con números impares.

Veamos un ejemplo para ilustrar cómo deberían aplicarse los principios mostrados anteriormente para llegar al resultado obtenido por el escriba: si consideramos la fracción $2/45$, el ordenador da como resultado una lista de 1967 posibles descomposiciones de las cuales 1826 tienen 4 términos, 134 tienen 3 términos y 7 tienen 2 términos. Por tanto, siguiendo el principio número 2, las únicas posibles soluciones con las que nos quedaríamos serían las igualdades formadas por 2 términos

$$1/24 + 1/360; \quad 1/25 + 1/225; \quad 1/27 + 1/135; \quad 1/30 + 1/90;$$

$$1/35 + 1/63; \quad 1/36 + 1/60; \quad 1/45 + 1/45.$$

Ahora bien, 4 de ellas serían descartadas por aplicación directa de alguno de los principios, más concretamente,

$1/25 + 1/225$	principio número 5;
$1/27 + 1/135$	principio número 5;
$1/35 + 1/63$	principio número 5;
$1/45 + 1/45$	principio número 3.

Por último, de entre los tres candidatos posibles que nos quedan $1/24+1/360$, $1/30+1/90$, $1/36+1/60$, la elección podría haber seguido un razonamiento análogo al siguiente: tanto $1/24+1/360$ como $1/36+1/60$ resultarían descartadas por el principio número 4. En la primera descomposición $1/24+1/360$, a pesar de que $24 < 30 < 36$, el denominador de la segunda fracción 360 es mucho más grande que el de las otras dos, por tanto, descartada. La segunda descomposición $1/36+1/60$ resulta descartada porque $30 < 36$ y 60 no es mucho más pequeño que 90; obteniendo así que la representación más idónea coincide con la tomada por el escriba

$$2/45 = 1/30 + 1/90.$$

4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Por necesidades de reparto de víveres, salarial o de tierras, los escribas tuvieron que ser capaces de solventar distintos problemas, los cuales podrían ser reescritos en nuestros días como ecuaciones de primer grado o incluso como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En particular, en los siguientes ejemplos, veremos algunas de las resoluciones originales mostradas en los papiros:

Problema 63 del papiro de Rhind: se quieren repartir 700 panes entre 4 hombres, con $2/3$ para el primero, $1/2$ para el segundo, $1/3$ para el tercero y $1/4$ para el cuarto. Calcular la parte de cada uno.

Solución: es claro que $2/3+1/2+1/3+1/4 = 1+1/2+1/4$, por lo que $1+1/2+1/4$ es a 700 como 1 es a x. De aquí se obtiene que $x = 400$, por lo que cada hombre recibirá

$$\begin{aligned}
&2/3 \cdot 400 = 266 + 2/3 \text{ panes;}\\
&1/2 \cdot 400 = 200 \text{ panes;}\\
&1/3 \cdot 400 = 133 + 1/3 \text{ panes;}\\
&1/4 \cdot 400 = 100 \text{ panes.}
\end{aligned}$$

Problema 39 del papiro de Rhind: calcular la diferencia entre las partes cuando 100 panes son repartidos entre 10 hombres, 50 para los 6 primeros y 50 para los otros 4.

Solución: por un lado es claro que $1/6 \cdot 50 = 8 + 1/3$, mientras que $1/4 \cdot 50 = 12 + 1/2$, por lo que la diferencia será

$$(12 + 1/2) - (8 + 1/3) = 4 + 1/6 \text{ panes.}$$

Problema 24 del papiro de Rhind: una cantidad y su séptima parte dan conjuntamente 19. Calcular dicha parte.

Solución: supóngase que la solución es 7, entonces 7 y $1/7$ de 7 suman 8. Tantas veces como 8 debe ser multiplicado para dar 19 son las veces que 7 debe ser multiplicado para dar el número deseado. Resolviendo la regla de tres,

$$x = 133/8 = 16 + 1/2 + 1/8.$$

Problema del papiro de Berlín: el área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros 2 cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es $1/2 + 1/4$ del otro. Calcular los lados de los cuadrados.

Solución: la resolución de dicho problema actualmente podría ser escrita como

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100, \\ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right)x &= y; \end{aligned}$$

cuya solución es $x = 8,\ y = 6$, tal y como muestra el escriba.

5. Superficies, áreas y el número π

Otro de los problemas más importantes a solventar estaba relacionado con el cálculo de áreas, de hecho, dado que la sociedad era principalmente agrícola, tras la subida anual del Nilo, había que volver a asignar a cada persona la misma superficie de tierra que tenía antes de la inundación. Este hecho dio lugar a que se tuviera que saber calcular el área de distintas superficies y, dependiendo del tipo, encontramos diversos ejercicios planteados y resueltos.

Superficies rectangulares.

Problema 49 del papiro de Rhind: cálculo del área de un rectángulo de 1000 codos de largo por 10 de ancho (codo=unidad de longitud).

$$\text{Area} = 1000 \cdot 100 = 100000 \text{ codos}^2.$$

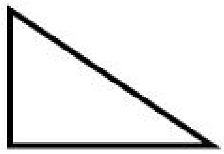
Problema 6 del papiro de Moscú: un rectángulo de 12 unidades cuadradas de área satisface que la anchura es $1/2 + 1/4$ de su longitud. Calcular las medidas del rectángulo (solución dada: 3 unidades de anchura y 4 de longitud).

En particular, para el caso de los rectángulos ya era conocida la fórmula

$$\text{Area} = \text{base} \cdot \text{altura}\,.$$

Superficies triangulares.

Problema 51 del papiro de Rhind: calcular el área de un triángulo de 10 unidades de altura y 4 de base.



$$\text{Area} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ unidades}^2.$$

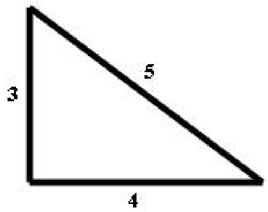
Problema 7 del papiro de Moscú: dado un triángulo de 20 unidades cuadradas de área e *idb* igual a $2 + 1/2$, calcular las medidas del mismo. Tras estudiar la solución dada por el escriba, parece ser que *idb* se refiere a la relación entre la altura y la base, lo que lleva a que la base mida 4 unidades y la altura 10).

Al igual que antes, para el caso de superficies triangulares ya se conocía la fórmula del área

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}.$$

Triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras.

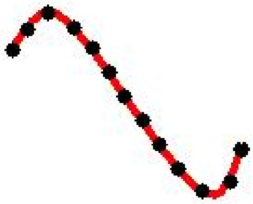
Una de las dudas que persiste con el paso de los siglos es si en el antiguo Egipto era conocido el "teorema de Pitágoras" para cualquier triángulo rectángulo de lados a y b cualesquiera. Lo que si que parece cierto es que el teorema de Pitágoras era conocido para el caso especial del triángulo rectángulo de lados 3 y 4.



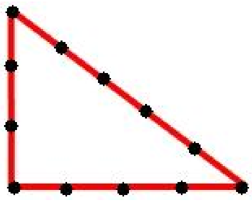
Dado un triángulo rectángulo de lados 3 y 4 unidades, era conocido que la *hipotenusa mide* 5 *unidades*.

Dada la falta de información al respecto, a lo largo de la historia distintos matemáticos ilustres han estado tanto a favor como en contra de afirmar que dicho teorema formaba parte del conocimiento matemático de aquella época.

Pero gracias al conocimiento de dicho teorema para el caso particular del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, los egipcios fueron capaces de delimitar superficies con ángulos rectos, usados por ejemplo en la construcción de la base de las pirámides. Veamos el método en cuestión:



En primer lugar cogían una cuerda y le hacían 13 nudos, equidistantes dos a dos.

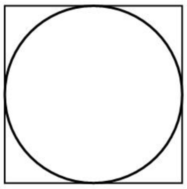


Al juntar los dos extremos obtenían un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, y por consiguiente, el ángulo recto buscado.

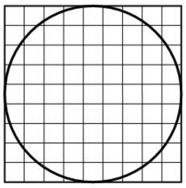
Superficies circulares y el número π.

Siguiendo con el estudio de áreas dependiendo de la superficie, al considerar un círculo, encontramos entre otros resultados, una aproximación del número π.

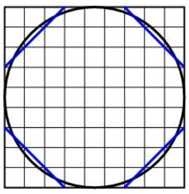
En los problemas 42, 43 y 44 del papiro de Rhind se plantea el cálculo explícito del área de un círculo, y en el problema 50 se resuelve para un círculo de diámetro 9 unidades. Para ello, dados los argumentos que aparecen en el papiro original, el razonamiento lógico seguido por el escriba sería el siguiente.



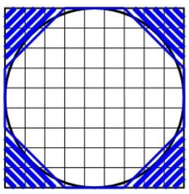
Como primer paso se considera el cuadrado circunscrito al círculo. Su lado mide 9 unidades, cuya área es igual a $9^2 = 81$ unidades^2.



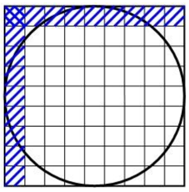
Se subdivide dicho cuadrado en cuadrados de lado unidad, obteniéndose así un mallado de 9×9 cuadrados unitarios.



Se traza la diagonal de los cuadrados de lado 3 unidades de las esquinas, obteniéndose un octógono irregular, que será tomado como aproximación del círculo.



El área del octógono es equivalente a restar al área del cuadrado (81 unidades^2), el área de la región sombreada (18 unidades^2), es decir, el área sería 63 unidades^2.



Por último, como $8^2 = 64$ es cercano a 63, el área del círculo, que había sido aproximado por el del octógono, es de nuevo aproximado por 8^2, resultando que el área es $(8/9 \cdot 9)^2$.

Repitiendo el proceso para un círculo de radio r arbitrario, obtenemos que el área del círculo es

$$\text{Area} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{256}{81}r^2.$$

Luego, el número π, a pesar de no ser mencionado en ningún papiro explícitamente, es aproximado por la fracción

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3,16049.$$

Área superficial de una semiesfera o de un semicilindro.

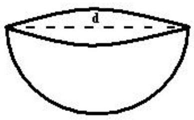
Uno de los problemas más estudiados por su controversia es el que hace referencia al cálculo de la superficie de un cuenco, cuya traducción del problema original es la siguiente:

Problema 10 del papiro de Moscú: calcular el área superficial de un cesto con una apertura de boca de $4 + 1/2$.

La duda surge al examinar la resolución dada por el escriba, debido a que una parte de la misma no se puede examinar por la mala conservación del papiro. En particular, no está claro cual era la forma del cuenco en cuestión. Por los restos arqueológicos encontrados y el estudio matemático de los pasos seguidos en la resolución, parece coherente considerar que el cuenco tenía forma semi-esférica, aunque también pudiera ser semi-cilíndrica. Ambas hipótesis tienen argumentos consistentes para ser consideradas y por tanto las detallaremos a continuación.

Hipótesis de la semi-esfera

En este caso, hay que suponer que en el enunciado la apertura de la boca hace referencia al diámetro de una semiesfera $4 + 1/2$, obteniéndose que

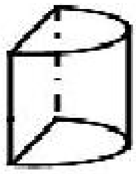


$$\text{Area superficial} = 2\pi \cdot r^2 .$$

Hipótesis del semi-cilindro

Por el contrario, si consideramos que el cuenco era semi-cilíndrico, hay que suponer que en el enunciado la apertura de la boca hace referencia al radio de un cilindro cuya altura mide igual, por lo que el problema quedaría reescrito como:

cálculo del área lateral del semi-cilindro de altura $h = 4 + 1/2$ y diámetro $d = 4 + 1/2$. Cuya área superficial es



$$\text{Area} = \frac{1}{2}\pi \cdot d \cdot h\,.$$

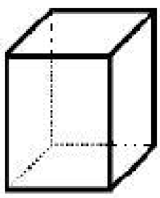
Por último sólo queda decir que en cualquiera de los casos el conocimiento del cálculo del área superficial del cuenco sería de modo empírico y no por ello quiere decir que conocieran de modo explícito la fórmula del área superficial de la semiesfera o del cilindro, pero en caso de que así fuera, se habrían adelantado en más de 1500 años a los griegos.

6. Graneros, volúmenes y pirámides

Del mismo modo que el reparto de terreno ocasionó la necesidad de conocer el cálculo de diversas superficies, el almacenamiento del grano, dio lugar al cálculo de volúmenes de graneros tanto rectangulares como circulares. Veamos algunos ejemplos dependiendo de la base elegida.

Graneros de base rectangular.

Problema 44 del papiro de Rhind: calcular el volumen de un granero rectangular de longitud 10 codos, anchura 10 codos y altura 10 codos.



$$\text{Volumen} = 1000 \text{ codos}^3.$$

Problema 45 del papiro de Rhind: dado un granero rectangular en el que caben 7500 heqats-cuádruples de grano, ¿qué dimensiones tiene?.

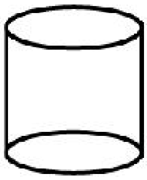
Problema del papiro de Kahún LV.4, líneas 30-32: dado un granero rectangular cuya anchura es $1/2 + 1/4$ de su longitud, si 40 cestas de 90 *hin* lo llenan con una profundidad de 1 codo encontrar sus dimensiones.

Las resoluciones planteadas en todos los problemas encontrados, llevan a deducir que conocían la fórmula del volumen para un granero de base rectangular, tal y como la conocemos ahora:

$$\text{Volumen} = a \cdot b \cdot d.$$

Graneros de base circular.

Problema 41 del papiro de Rhind: cálculo del volumen de un granero de base circular de diámetro 9 y altura 10.



$$\text{Volumen} = \frac{256}{81} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot 10 = 640 \text{ codos}^3.$$

Problema 43 del papiro de Rhind: cálculo del volumen de un granero de base circular de 9 codos de altura (¿diámetro?) y 6 de anchura (¿altura?).

Todas las resoluciones mostradas llevan a creer que la fórmula usada en el antiguo Egipto se correspondería con la fórmula actualmente usada para el cálculo del volumen de un cilindro (teniendo en cuenta la aproximación del número π usada para calcular el área de la base como la fracción $256/81$), es decir,

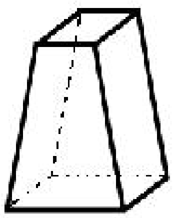
$$\text{Volumen} = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Pirámides.

Por último, en el caso de las pirámides, en distintos papiros se encuentran ejercicios en los que hay que calcular tanto la inclinación de las caras como el volumen total de la misma. Lo que lleva a afirmar que los egipcios sabían calcular el ángulo de inclinación de cada una de las paredes de la pirámide, el volumen de una pirámide truncada y el volumen de una pirámide.

Problema 56 del papiro de Rhind: dada una pirámide cuyo lado de la base mide 360 codos y altura 250, calcular el *seked* (seked=ángulo de inclinación).

Problema 14 del papiro de Moscú: calcular el volumen de una pirámide truncada de lados 2 y 4 y altura 6.

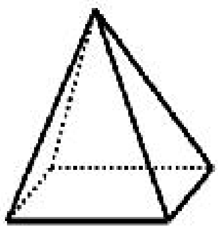


$$\text{Volumen} = \frac{6(2^2 + 2 \cdot 4 + 4^2)}{3} = 56.$$

En general, la fórmula del volumen de una pirámide truncada de lados a y b y altura h era conocida en el antiguo egipto y se correspondía con la actual

$$\text{Volumen} = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}.$$

En particular, el cálculo del volumen de una pirámide lo obtenían de la fórmula anterior considerando $a = 0$.



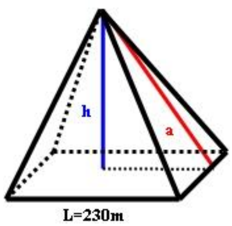
$$\text{Volumen} = \frac{h}{3} \cdot b^2 .$$

7. Pirámide de Keops, el número de oro y π

Por último, teniendo en cuenta que uno de los grandes enigmas de la cultura egipcia sigue siendo el método de construcción de las pirámides, no podíamos obviar los resultados aparecidos en relación a distintos aspectos matemáticos al estudiar la pirámide de Keops.

Más concretamente, la *pirámide de Keops*, también conocida como *pirámide de Giza*, es una de las imágenes más representativas del antiguo Egipto, la cual fue construida sobre el 2570 a.C. con fines funerarios. Fueron necesarios unos 20 años para finalizar la construcción y hasta el siglo *XIX* resultó ser el edificio más grande del mundo.

Entre sus medidas, destacan sus 147 metros de altura (h) por 230 metros de lado de la base (L), por lo que utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos que la *apotema* (a) mide $186,6$ *metros*.



Con respecto a sus peculiaridades matemáticas, ya en el siglo *V* a.C., Herodoto afirma en uno de sus textos que los sacerdotes egipcios le habían mostrado que *el* *cuadrado de la altura total de la pirámide de Keops, era igual al área de una cara*.

De hecho, las relaciones matemáticas que vamos a ver a continuación hacen de la pirámide de Keops un objeto singular desde el punto de vista geométrico, dado que entre sus proporciones aparecen curiosamente el *número de oro* y el *número* π.

Para ello, recordemos que el *número de oro*, Φ, es una de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$, esto es,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}6180339.$$

Así pues, el número Φ aparece aproximado al calcular

$$\frac{2a}{L}; \qquad \frac{\text{Área total}}{\text{Área lateral}}; \qquad \frac{\text{Área lateral}}{\text{Área base}}.$$

Mientras que el número π resulta del cociente

$$\frac{\text{Perímetro base}}{2h}.$$

Bibliografía

[1] L.N.H. Bunt, P.S. Jones, J.D. Bedient, *The historical roots of elementary mathematics*, Dover, 1976.

[2] R. J. Gillings, *Mathematics in the time of the Pharaohs*, Dover, 1972.

[3] C. Maza, *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto*, Colección de divulgación científica, Universidad de Sevilla, 2003.

[4] D. E. Smith, *History of Mathematics*, Dover, 1923.

Ainhoa Berciano Alcaraz
Universidad del País Vasco-
Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemática Aplicada,
Estadística e Investigación Operativa
Barrio Sarriena s/n. 48940 Leioa
e-mail: ***ainhoa.berciano@ehu.es***
http://www.ehu.es/aba