

Embaldosando el plano

por

Álvaro Lozano Rojo, Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea

Un mosaico es una obra compuesta por pequeñas piezas de diversos materiales y colores. Los más antiguos encontrados son los babilonios que datan del tercer milenio antes de Cristo aproximadamente. Los artesanos de la ciudad de Uruk incrustaban pequeños trozos de terracota coloreados para decorar paredes con patrones geométricos. Probablemente hubo otros antes, ya que (casi) todas las civilizaciones, en mayor o menor grado, han usado esta técnica.

Claro que, si hablamos de mosaicos, sin duda nos vendrán a la cabeza los mosaicos romanos que podemos encontrar en gran parte de Europa. Estos mosaicos representan diferentes escenas de la vida y costumbres de las ciudades romanas. Seguramente también recordemos los mosaicos de la Alhambra, figuras geométricas que se repiten y que podrían cubrir *todo* el plano. Obviamente hay una diferencia fundamental entre ellos, los mosaicos árabes no son figurativos, si no que se basaban en la repetición de motivos geométricos. La definición matemática de *mosaico* se asemeja más a este tipo de mosaicos:

Definición. Un *mosaico del plano* es una colección \mathcal{T} de polígonos llamados *teselas* de forma que

1. cubren el plano y;
2. se intersecan en el borde.

Otra condición bastante habitual es que los mosaicos sean *cara a cara*, es decir

3. si dos teselas se intersecan, lo hacen en una arista.

Por último, exigiremos que todas las teselas provengan de un conjunto finito

\mathcal{P} de *prototeselas*, es decir, todas las teselas son copias por traslación (o quizá algún otro movimiento rígido del plano) de un conjunto finito de teselas modelo prefijadas.

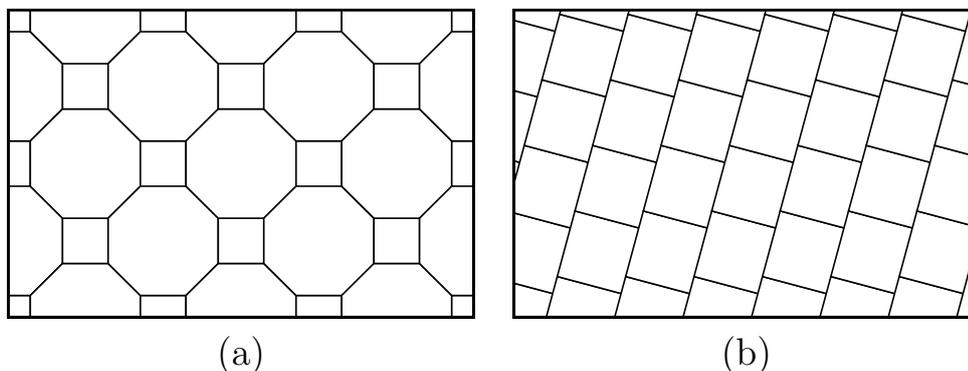


Figura 1: (a) Un mosaico del plano. (b) Un mosaico que no es cara con cara.

También es habitual decorar las aristas o vértices de teselas, de forma que estas decoraciones fuercen cierto tipo de pegados y no otros. En cierta medida éstas son como los machihembrados de los puzzles que todos conocemos.

1. Johannes Kepler: mosaicos y cristalografía

En 1609 Johannes Kepler era un respetado científico dedicado a las investigaciones astronómicas como Matemático Imperial en la corte de Rodolfo II. Kepler, profundamente religioso, trató de explicar el movimiento de los astros mediante la geometría perfecta de esferas y poliedros regulares. Aún así, había enunciado sus dos primeras leyes sobre el movimiento de los planetas (la tercera se haría esperar nueve años). Sin duda la primera de ellas supuso una ruptura con la tradición aristotélica preponderante en la Edad Media: «*Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos*». Este espíritu lo llevó a convertirse en una figura clave de la *revolución científica*, y también a escribir una pequeña joya de la que hablaremos ahora.



Figura 2: Johannes Kepler.

En 1610 Kepler deseaba dedicar un libro a Johannes Matthäus Wackher von Wackhenfels, un amigo suyo, como regalo de año nuevo. Cierta día, mientras paseaba por las calles de Praga, comenzó a nevar. Kepler observó

que los primeros copos que cayeron en su abrigo eran de forma hexagonal. ¿Que motivo los había llevado a esta forma? Esta cuestión era perfecta:

[...] Aquí tenemos algo más pequeño que cualquier gota, pero con forma geométrica, aquí está el regalo de Año Nuevo perfecto para un devoto de la Nada¹, lo mejor que un matemático puede ofrecer, que no tiene nada y nada recibe, ya que proviene del Cielo y parece una Estrella. [...]

Con esta premisa comienza *Strena Seu De Nive Sexangula* [5] (Regalo de año nuevo, sobre el copo de nieve de seis ángulos). De nuevo, Kepler nos muestra el poder de esa revolución del pensamiento que se estaba produciendo en el siglo XV. Analiza cuidadosamente posibles causas para este efecto, usando ejemplos como los panales de miel como análogos. Lo que le conduce a preguntarse sobre el empaquetamiento de esferas². Aduce que las causas que forman los copos de nieve con su forma deben ser inherentes al vapor de agua, y no causadas por un agente externo. Así, el empaquetamiento de las esfera de vapor produciría la forma del copo. Digámoslo de otra manera, *el orden a nivel microscópico produce orden a nivel macroscópico*. Como veremos, esta misma idea la encontraremos más adelante, en el nacimiento de la cristalografía. En cualquier caso Kepler reconoce que no puede resolver el problema, y lo deja para los futuros químicos.

En 1619, Kepler publica *Harmonices Mundi*, donde trata de explicar las proporciones del mundo en términos de la música, como ya lo hicieron Pitágoras, Ptolomeo y otros. Quizás lo más destacable de este volumen sea que en él propugna su tercera ley (ley armónica) sobre el movimiento de los planetas. Pero Kepler creía que *«las formas geométricas eran los modelos del Creador para decorar todo el universo»*, así que comienza este libro con unas disquisiciones sobre polígonos y poliedros regulares, así como otros poliedros estrellados (sólidos de Kepler). Además, en el segundo libro de *Harmonices Mundi* aparece el primer tratado sistemático sobre los mosaicos del que se tiene noticia. Veamos algunos de los mosaicos que conocía Kepler.

1.1. Mosaicos regulares

Los *mosaicos regulares* son los más sencillos en los que podemos pensar. Sólo tienen una tesela modelo que es un polígono regular. Todos conocemos

¹Se refiere a Wackher von Wackhenfels

²Un problema que aún los matemáticos no se han puesto de acuerdo en si está solucionado o no. En 1998 Thomas Hales propuso una prueba en la que se usaba el ordenador como elemento fundamental. Según parece los métodos de Hales no son suficientemente rigurosos.

tres ejemplos, usando triángulos, cuadrados y hexágonos. ¿Es posible construir otros? Resulta que no lo es, y ver que en efecto esto es así es muy sencillo. Si dibujamos pentágonos adyacentes alrededor de un vértice, veremos inmediatamente que sólo podemos colocar 3, y que nos quedaría un hueco, imposible de cubrir con pentágonos. Este es precisamente el argumento a seguir: Si pudiésemos teselar el plano con un polígono regular de n lados, alrededor de un vértice podríamos disponer k_n polígonos. Entonces

$$360^\circ = k_n \cdot \text{Ángulo interno del polígono de } n \text{ lados} = k_n 180^\circ \frac{n-2}{n}.$$

Es decir, que podríamos colocar exactamente $k_n = 2 \frac{n}{n-2}$ polígonos de n lados. Sabemos que para $n = 3, 4$ y 6 el valor de k_n es entero, ya que podemos teselar el plano (figura 3). Para el resto de los naturales n , el valor k_n es fraccionario. Así $k_5 = \frac{10}{3}$ y $k_7 = \frac{14}{5}$. Ahora bien, k_n es mayor que k_{n+1} y $k_n > 2$ para cualquier n . Como $k_7 < 3$, resulta que $2 < k_n < 3$ para $n \geq 7$. Por lo que no es posible teselar el plano con ningún polígono regular salvo con triángulos, cuadrados y hexágonos.

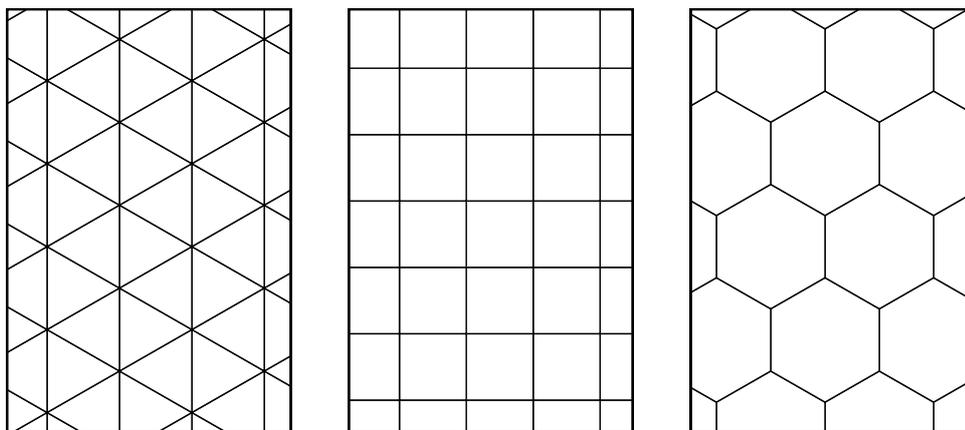


Figura 3: Los únicos tres mosaicos regulares.

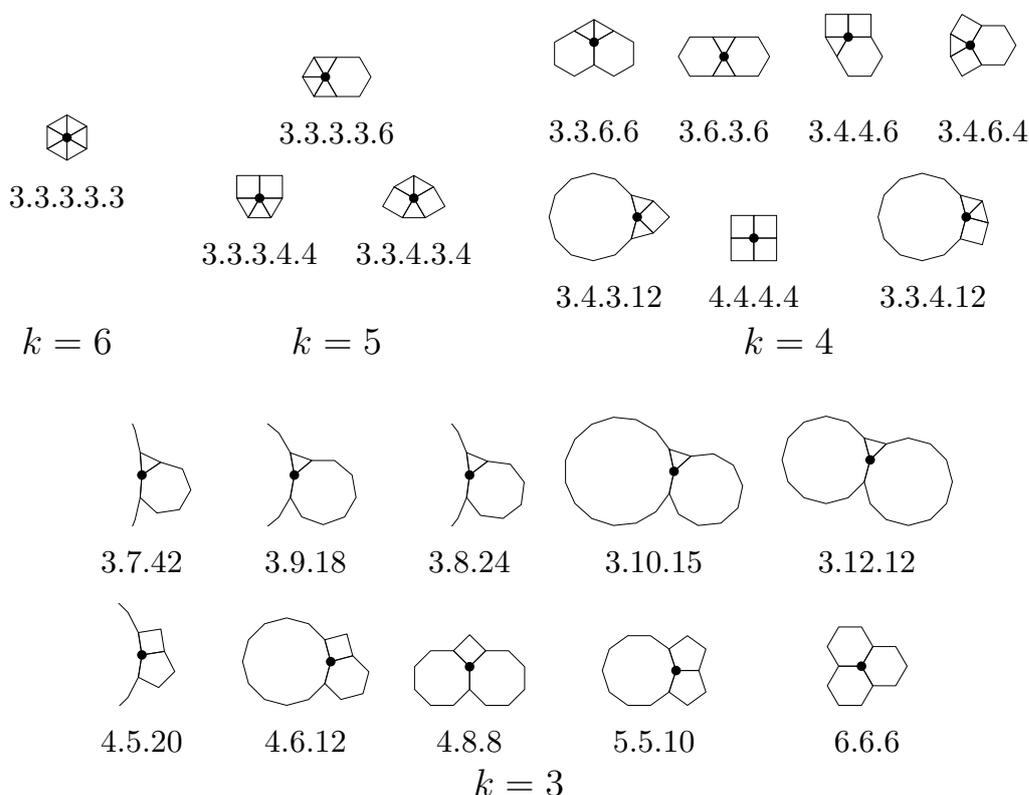
1.2. Mosaicos uniformes

Otro tipo de mosaicos conocidos por Kepler son los *uniformes*. Un *mosaico uniforme* es aquel cuyas losetas son polígonos regulares (no necesariamente iguales) de forma que alrededor de cada vértice encontramos la misma configuración. Obviamente, los mosaicos regulares son uniformes. Tratemos de encontrarlos todos. El argumento es similar al anterior, pero algo más largo. Alrededor de un vértice se tienen k polígonos regulares. Este número ha de ser menor o igual que 6, ya que el polígono regular de menor ángulo interior

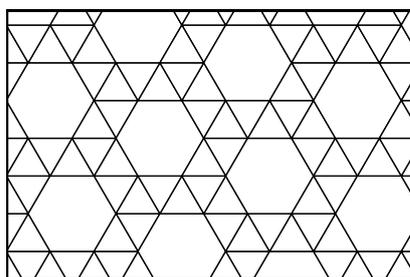
es el triángulo. Obviamente, como antes no puede ser ni 1 ni 2. Por otro lado la suma de sus ángulos internos será $360^\circ = 180^\circ \left(\frac{n_1-2}{n_1} + \dots + \frac{n_k-2}{n_k} \right)$, luego

$$2 = 1 - \frac{1}{n_1} + \dots + 1 - \frac{1}{n_k} \iff \frac{k-2}{2} = \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k}.$$

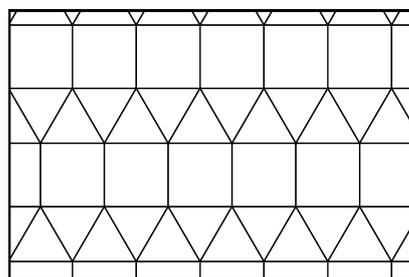
Haciendo variar k entre sus posibles valores (3, 4, 5 y 6) y con algo de trabajo se pueden encontrar las 17 soluciones enteras de esta ecuación. Algunas de esas soluciones se pueden reordenar para producir diferentes motivos alrededor de un vértice, de donde obtenemos las 21 posibles configuraciones alrededor de un vértice:



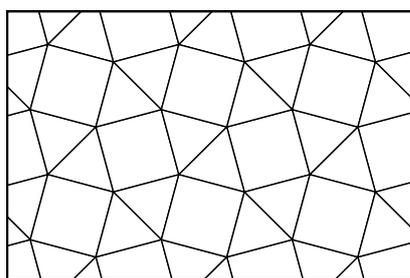
Los motivos 3.3.6.6 y 3.6.3.6, por ejemplo, provienen de la misma solución de la ecuación. Una vez que tenemos todas las posibles configuraciones es sencillo ver cuales producen un mosaico *uniforme* o no. Si obviamos los motivos que ya conocemos 3.3.3.3.3, 4.4.4.4 y 6.6.6, existen sólo 8 mosaicos uniformes del plano. Podemos verlos todos en la figura 4.



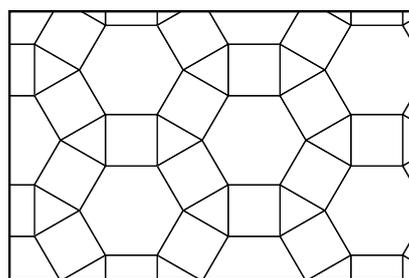
3.3.3.3.6



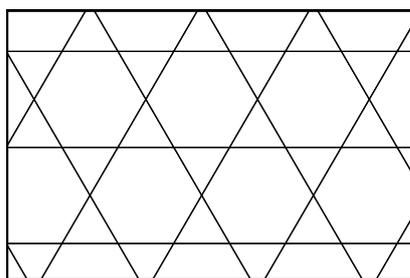
3.3.3.4.4



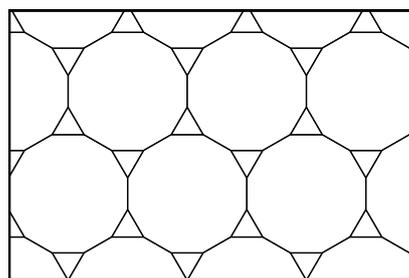
3.3.4.3.4



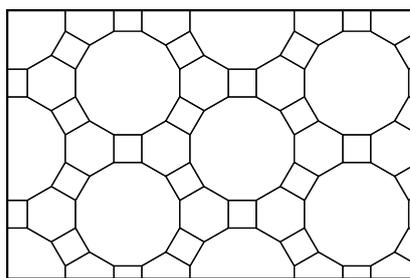
3.4.6.4



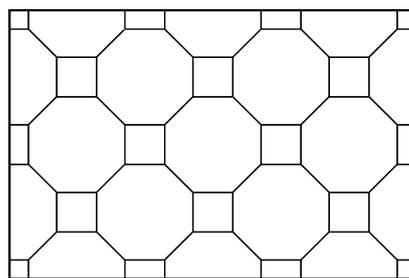
3.6.3.6



3.12.12



4.6.12



4.8.8

Figura 4: Los ocho mosaicos uniformes del plano (obviando los regulares). La notación hace referencia a la configuración alrededor de los vértices. Uno de los mosaicos, 3.3.3.3.6, puede dibujarse de manera simétrica según si disponemos los polígonos en el sentido de las agujas del reloj o al contrario.

1.3. La simetría pentagonal

Una *simetría* de un mosaico es un movimiento rígido del plano (una isometría si se prefiere) que deja invariable el mosaico. Por ejemplo, en el mosaico 4.4.4.4 formado por cuadrados de lado l , la traslación dada por el vector $(0, l)$ es una simetría del plano. De la misma manera, los giros centrados en el punto medio del cuadrado de grados 90° , 180° y 270° también son simetrías del mismo. Nos centraremos ahora únicamente en los giros.

De los mosaicos que hemos visto hasta este momento, ¿cómo son sus giros de simetría? Vamos a tratar de obtener todos las simetrías de giro del mosaico 4.4.4.4. Ya hemos mencionado que en el centro de cada tesela tenemos un centro de giro.

Los vértices también lo son, con los mismo ángulos. Además, los puntos medios de las aristas son centros de giro de 180° . Si hiciésemos un estudio similar para el resto de los mosaicos nos encontraríamos únicamente con giros de

$60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ$ y 300° .

Estos corresponden a centros de giro de ordenes 2, 3, 4 y 6. ¿Que ocurre con el 5 ó el 7 por ejemplo? ¿Acaso no es posible encontrar un mosaico con un giro orden 5? Sí lo es, como nos muestra Kepler en la figura 5.

Aunque hay que notar una diferencia muy importante de este mosaico con los demás. ¡Ese centro de simetría pentagonal es *único*!

Por lo que, a diferencia de todos los mosaicos hasta ahora mostrados, no existe ninguna traslación que lo deje invariable. En otras palabras, ninguna simetría de este mosaico es una traslación.

Estos estudios sobre mosaicos, como ya hemos dicho, fueron pioneros. Pero no fueron muy apreciados ya que en algunas ediciones de *Harmonices Mundi* algunos de los diagramas fueron eliminados. Sin ir más lejos, el mosaico de la figura 5, del que volveremos a hablar, aparece en la edición referenciada en [6], pero no así en otra edición que podemos hojear en la Posner Memorial Collection³.

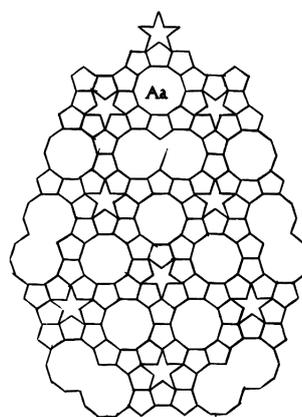


Figura 5: Un mosaico con simetría pentagonal. Reproducción de una de las páginas de [6].

³<http://posner.library.cmu.edu/Posner/>

2. Cristalografía y mosaicos del espacio

En 1665, Robert Hooke publicó *Micrographia* [3] una obra de dibujos de imágenes al microscopio. Se recogían en este volumen imágenes que nunca antes se habían visto, lo que lo convirtió en un éxito no sólo científico, si no que también comercial. En sus páginas podemos encontrar el dibujo de la figura 6.

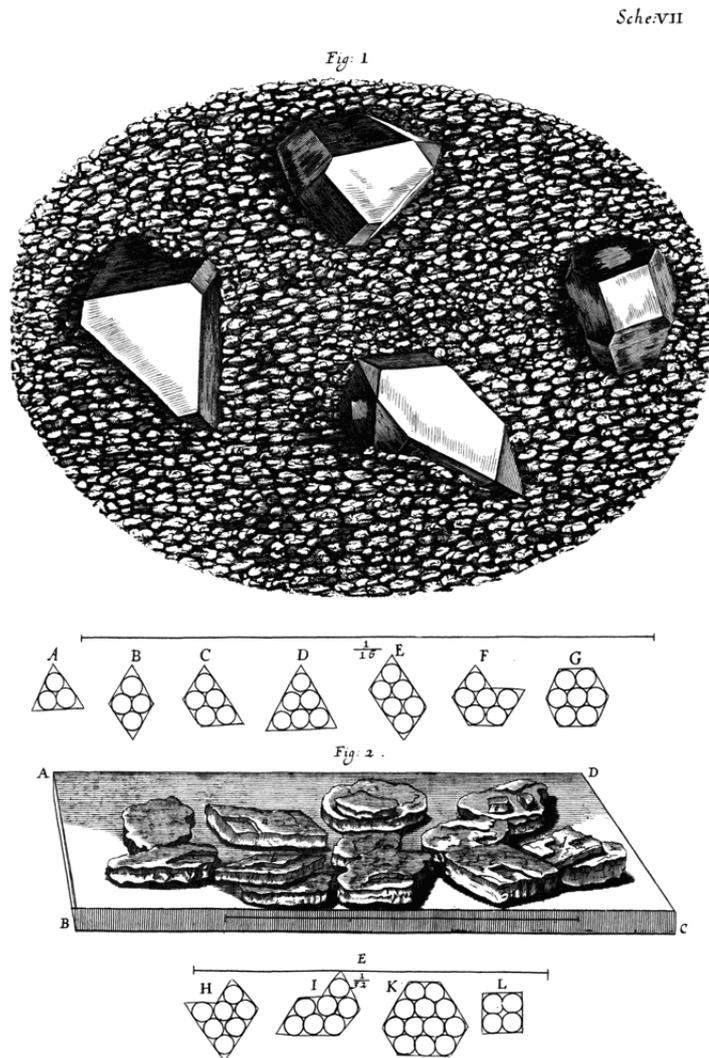


Figura 6: Reproducción de uno de los dibujos de R. Hooke [3].

Existe una profusa explicación del mismo:

[...] que todas estas figuras regulares que son tan claramente diferentes y curiosas, y hacerlo adornan y embellecen tal multitud de

cuerpos, como ya he insinuado anteriormente, surgen solamente de tres o cuatro posiciones o posturas diferentes de partículas globulares, y las más claras, evidentes y necesarias de esas disposiciones de tales partículas, a fin de que el supuesto de tal y tan claras y evidentes causas, concurra en que las partículas coagulantes necesariamente compongan un cuerpo de una determinada figura regular, y no otra, [...]

Y esto lo he demostrado empíricamente mediante un conjunto de balas, y algunos otros cuerpos muy simples[...]

Así volvemos a encontrarnos con la idea de que el orden microscópico produce orden macroscópico. Pero no fue hasta comienzos del Siglo XIX cuando el minerólogo francés René Just Haüy demostró que, en efecto, este es el caso:

«los cristales se formaban a partir de bloques que rellenaban el espacio.»

Ahora bien, ¿Cómo modelar matemáticamente ese orden interno?

En 1850, Auguste Bravais⁴ publicó su trabajo *Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace* en el que formalizó matemáticamente el estudio de los cristales.

El objeto básico es el de *Redes de Bravais*: una red de Bravais (en el espacio) no es más que un retículo

$$R = \{n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 \mid n_i \in \mathbb{Z}\},$$

donde v_1 , v_2 y v_3 son tres vectores linealmente independientes. Los vectores v_i son conocidos como *vectores primitivos* de la red de Bravais. La *celda unidad* es el paralelepípedo generado por los vértices 0 , v_1 , v_2 , v_3 , $v_1 + v_2$, $v_1 + v_3$, $v_2 + v_3$ y $v_1 + v_2 + v_3$.

Si observamos la *División cúbica del espacio* de M.C. Escher podemos ver una red de Bravais.

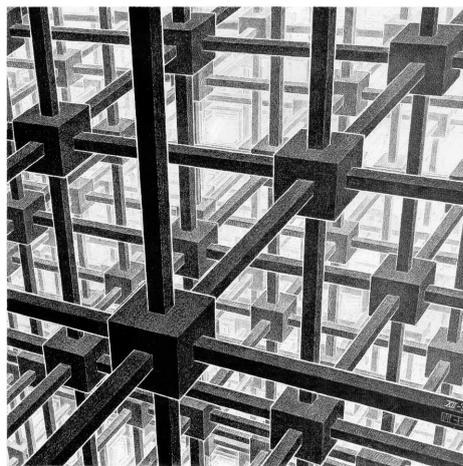


Figura 7: *División cúbica del espacio*. M.C. Escher, 1952. Un ejemplo de red de Bravais. © Cordon Art-Baarn-the Netherlands. Todos los derechos reservados. Usado con permiso.

⁴En 1835, Moritz Ludwig Frankenheim publicó *Die Lehre von der Cohäsion*, adelantándose a los trabajos de Auguste Bravais, presentando los retículos como modelos geométricos a los cristales. Lamentablemente incluyó modelos equivalentes como diferentes, lo que fue corregido por A. Bravais.

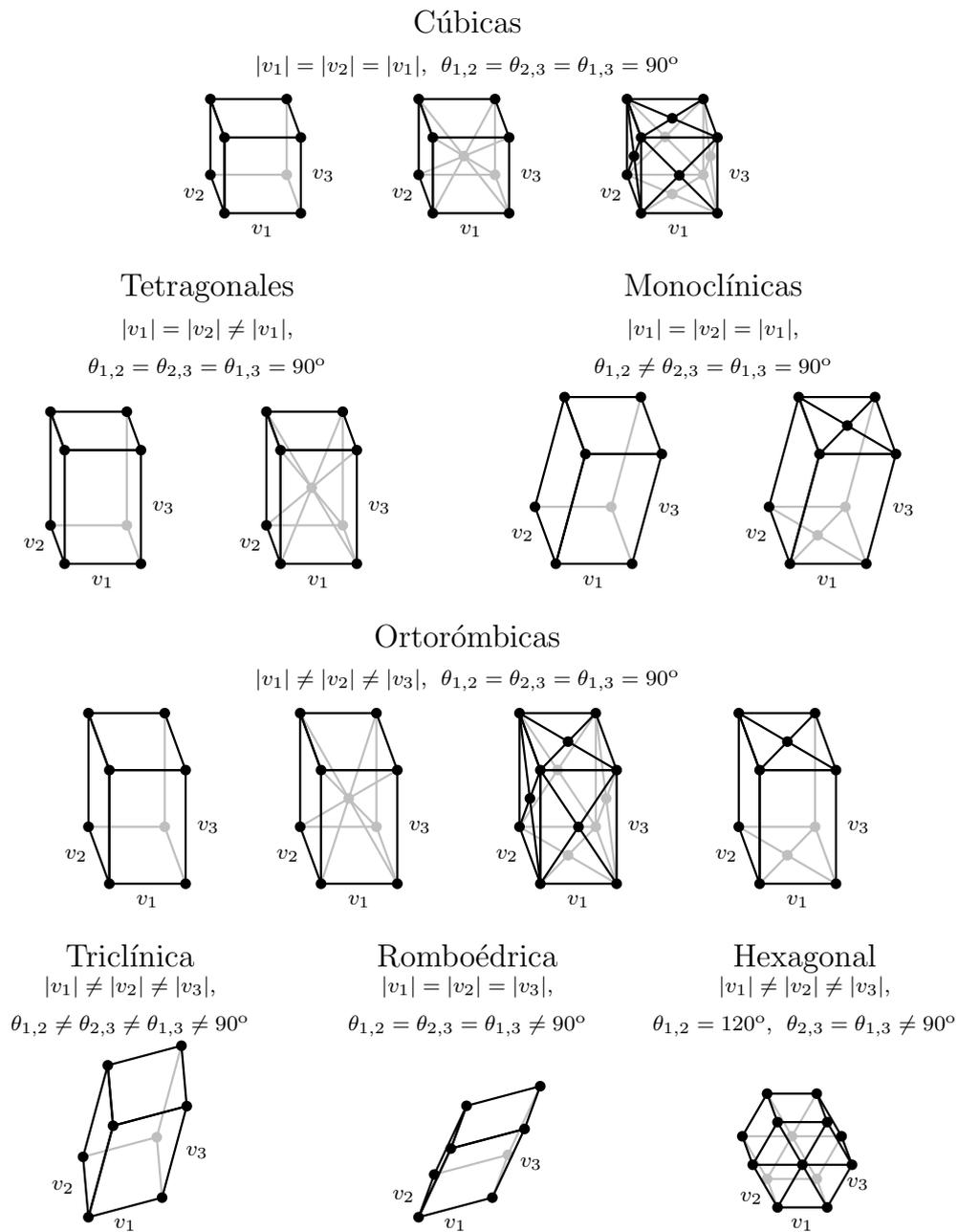


Figura 8: Las 14 posibles redes de Bravais con sus celdas, clasificadas según las simetrías de la red formada por los vectores primitivos. El símbolo $\theta_{i,j}$ denota el ángulo entre las aristas v_i y v_j .

¿Son las simetrías del cristal las mismas que las de la red de Bravais? Es fácil ver que no. Las simetrías de la red de Bravais son más numerosas, ya que no tienen en cuenta las diferencias entre vértices. ¡Sin ir más lejos

los vectores primitivos de la red no generan simetrías del cristal! Así pues, pueden existir otros grupos de simetrías, y no sólo los asociados a las redes de Bravais. Entonces, los cristales o mosaicos pueden presentar otros grupos de simetrías. ¿Cuántas formas esencialmente diferentes hay de construir mosaicos del espacio? Es decir, ¿cuántos grupos de simetría pueden tener los cristales?

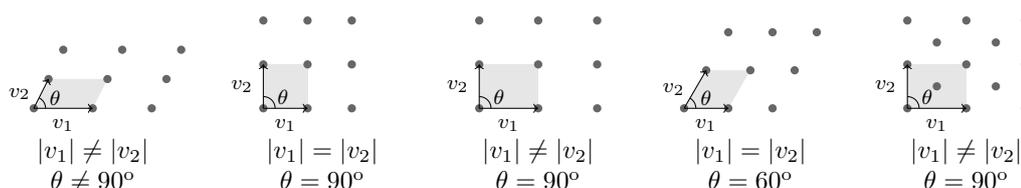


Figura 9: Los cinco tipos de redes de Bravais del plano: oblicuo, cuadrado, rectangular, hexagonal, rectangular centrado. La celda elemental es la región sombreada.

Tuvieron que pasar 50 años desde los trabajos de Bravais, hasta que se dio con la respuesta a esta pregunta. Este resultado lo descubrieron independientemente Yevgraf Stepanovich Fyodorov y Arthur Moritz Schönflies en 1891.



Figura 10: Yevgraf Stepanovich Fyodorov y Arthur Moritz Schönflies.

Teorema de Fyodorov-Schönflies. *Existen 230 grupos de simetrías de cristales (o mosaicos tridimensionales). En dos dimensiones existen exactamente 17 de estos grupos.*

Estos grupos se denominan *cristalográficos*. Un corolario de estos resultados es la conocida *restricción cristalográfica*:

Restricción cristalográfica. *Los giros de simetría de un mosaico o cristal (en dimensión 2 ó 3) sólo pueden ser de*

$$60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ \text{ y } 300^\circ. \quad (\text{RC})$$

Más aún, todos los ángulos de giro han de ser múltiplos del de menor ángulo.

De esto se desprende un interesante corolario

«No existen mosaicos o cristales con simetría pentagonal»,

ya que un objeto periódico no puede tener como giros de simetría aquellos de ángulos múltiplo de 72° .

4. Cristales y mosaicos del plano

Con la clasificación de todos los posibles grupos de simetrías de los cristales, los cristalógrafos contaban con unas herramientas matemáticas muy útiles. Aún así, 230 posibles grupos de simetría es un número relativamente grande, sobretodo si pretendemos recordar todos ellos.



Figura 11: Max von Laue, junto a un diagrama de difracción, en un sello alemán.

Pocos años después, en 1885, el físico Wilhelm Conrad Röntgen descubrió los Rayos X, un tipo desconocido de radiación (en 1901 recibió el Premio Nobel por este descubrimiento). A pesar de que se desconocía la naturaleza de estos rayos, se suponía que era una radiación electromagnética, en otras palabras, una forma de luz. De hecho, una luz con longitud de onda muy corta. Esto fue lo que llevó a Max von Laue a pensar que se produciría un fenómeno de difracción con los átomos de un cristal. Así que tomó una fuente de rayos X y bombardeó un material cristalino. Cada átomo del cristal, al recibir los rayos X, los vuelve a emitir en todas direcciones. Los rayos emitidos por los diferentes átomos estarán en fase en algunas direcciones (las intensidades se suman) o desfasadas (en cuyo se compensan). La simetría traslacional implica que los rayos X, al llegar a la película fotográfica, produzcan puntos de luz bien definidos (picos de Bragg). Esa imagen que se obtiene es lo que se conoce como *patrón de difracción*.

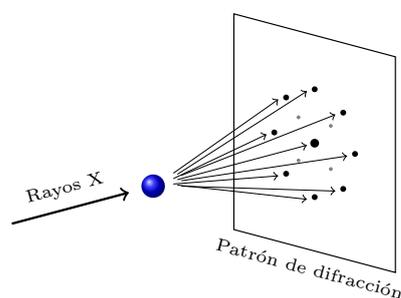


Figura 12: Esquema del experimento de von Laue

De esta manera von Laue probó que los rayos X son efectivamente una forma de luz. En 1912 publicó los resultados de este experimento y la formulación matemática del mismo. Dos años más tarde le concedieron el Premio Nobel por este descubrimiento. Había nacido la *crystalografía de rayos X*, una técnica que se ha convertido en fundamental para el estudio de la estructura íntima de los cristales.

Los patrones de difracción representan el orden interno del cristal. Podríamos decir que son una huella dactilar de los mismos, tanto es así que es posible reconstruir la estructura del cristal a partir de la posición e intensidad de los picos de Bragg. Así, el problema tridimensional se puede simplificar y basta estudiar patrones de difracción. Estos pueden considerarse como los centros de las teselas de un mosaico del plano. En resumen, la cristalografía de rayos X permitió reducir, de cierta manera, el estudio de los mosaicos del plano. Tienen además otra peculiaridad, son siempre centrosimétricos, incluso si el cristal no tiene una simetría tal. Además la restricción cristalográfica aplica en este centro de simetría, es decir, los giros de ese centro de simetría deben de pertenecer al conjunto (RC). Así que, como con las otras estructuras que hemos estudiado...

«Los patrones de difracción tampoco pueden tener simetría pentagonal»

5. Aperiodicidad

Observemos otra vez el mosaico de Kepler de la figura 5. Como ya hemos mencionado no es periódico, es decir, da igual que vector consideremos, al trasladarlo por él no coincidirá con el mosaico original. Por otro lado, es posible reordenar las teselas de manera que el mosaico que se obtenga sea periódico, como en la figura 13. Esto mismo ocurría con todos los mosaicos conocidos (al menos a principios de los 60). En otras palabras, no se conocía ningún conjunto de teselas aperiódico (i.e., que todos los mosaicos formados con estas teselas son aperiódicos). De hecho, se creía que esto era general,

debido a una idea que flotaba en el ambiente: «*lo ordenado es periódico*». Fue esta idea la que llevó a la correcta decisión de modelar los cristales como redes periódicas, y parecía la hipótesis más razonable.

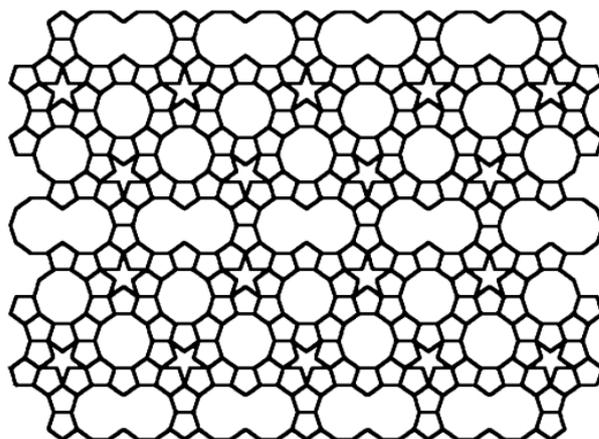


Figura 13: Las teselas de Kepler (fig. 5) puede formar un mosaico periódico.

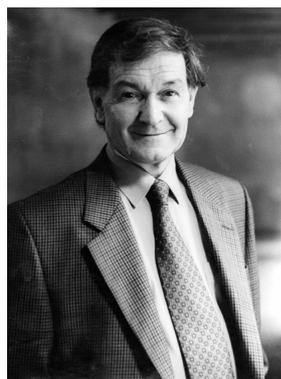


Figura 14: Hao Wang y Roger Penrose.

En 1961 Hao Wang, un lógico de origen chino, estaba interesado en un cierto tipo de mosaicos cuyas teselas son cuadrados de lados coloreados. Para cubrir el plano, los lados adyacentes de los cuadrados deben ser del mismo color. Estos cuadrados se conocen como *teselas o dominós de Wang*.

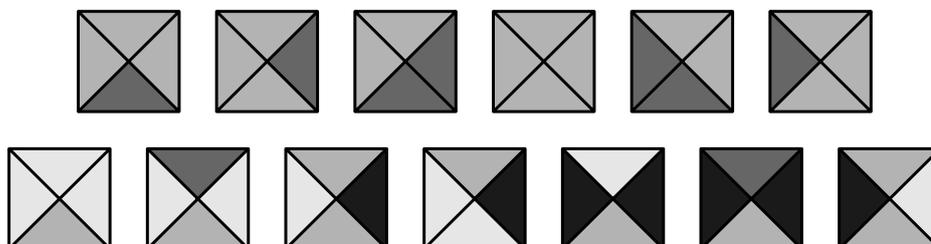


Figura 15: 13 dominós de Wang que teselan el plano *sólo* de manera aperiódica (debidos a K. Culik).

En la figura 15 pueden verse 13 de estas teselas. ¿Cómo saber si un conjunto finito de teselas cubren el plano o no? Esta es una pregunta natural, pero difícil de contestar. H. Wang propuso un algoritmo que comprobaba si un conjunto finito cualquiera de estos dominós cubría el plano o no. En la prueba de que en efecto su algoritmo daba con la respuesta⁵, usaba un hecho no probado:

Conjetura de Wang. Si un conjunto de dominós de Wang tesela el plano (periódica o aperiódicamente) habrá alguna forma de hacerlo periódicamente.

Así pues, para decidir si un conjunto de teselas de Wang cubre el plano, bastaría con encontrar una configuración finita de ellas que por traslación cubra el plano. Pocos años más tarde, en 1964, se comprobó que la conjetura era falsa. Fue un alumno de propio Wang, Robert Berger, quien encontró un contraejemplo: *un conjunto de 20426 teselas de Wang que sólo teselaban el plano de manera aperiódica!* Se había construido el primer ejemplo de conjunto de teselas aperiódico. Tras este primer ejemplo aparecieron muchos otros, cada vez con menos teselas.

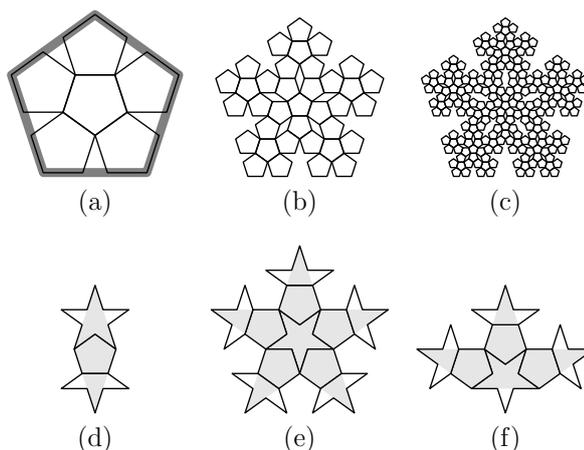


Figura 16: La construcción de los mosaicos de Penrose.

En 1974, el matemático-físico Sir Roger Penrose propuso un nuevo conjunto de teselas aperiódicas de tan solo dos elementos. Veamos como los construyó [7]:

[...] Todo comienza con la observación de que un pentágono regular puede dividirse en 6 más pequeños, dejando 5 huecos de forma triangular (figura 16a). Imaginemos ahora que este proceso se repite un gran número de veces, donde en cada paso

⁵En este caso se debía probar que el algoritmo *siempre* se detenía (es decir, que no se ejecutaba indefinidamente sin responder nada) y que daba la respuesta correcta.

los pentágonos se dividen de acuerdo con el esquema de la figura 16a. Aparecerán entonces agujeros de diversas formas y deseamos cubrirlos con las figuras más adecuadas. En el segundo paso, los huecos que aparecerán tendrán forma de diamante (figura 16b). En el tercero, a estos diamantes les crecen “espinas”, pero es posible incluir en estos “diamante espinado” un pentágono, de forma que el agujero queda dividido en una estrella (pentagrama) y en un “barco de papel” (figura 16d). En el siguiente paso, a la estrella y al barco también les crecen “espinas”, y como antes, es posible colocar pentágonos en ellos, estando el espacio restante formado por estrellas y barcos (como los de antes). Estas subdivisiones pueden verse en las figuras 16e y f.

Como no se introducen figuras nuevas en los pasos siguientes, podemos continuar con este proceso de manera infinita. En cada paso, la escala de las figuras puede aumentarse de manera que los nuevos pentágonos que aparecen sean del mismo tamaño de los del paso anterior. [...]

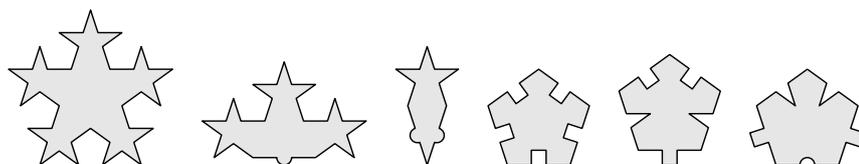


Figura 17: Las seis losetas aperiódicas de Penrose.

Si observamos los mosaicos que así se obtienen, vemos que ¡es el mosaico de Kepler (figura 5), pero en el que se han subdividido los decágonos! Ahora bien, añadiendo lengüetas y ranuras a las cuatro piezas elementales (pentágono, diamante, pentagrama y barco) podemos obtener las 6 teselas de la figura 17 que realmente teselan el plano únicamente de manera aperiódica.

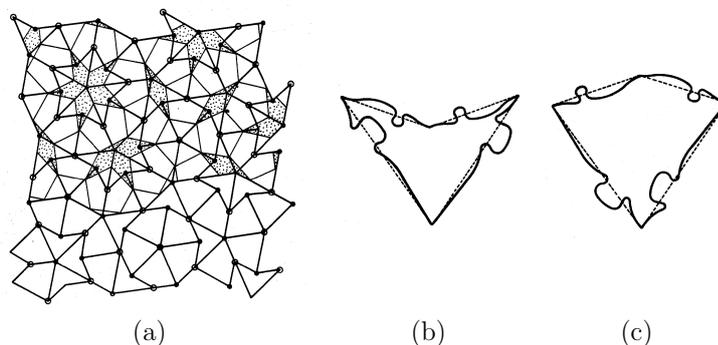


Figura 18: La división de los mosaicos de Penrose y las losetas obtenidas. Imágenes de la patente en Estados Unidos 4,133,152.

Pero no solo eso, R. Penrose dividió inteligentemente sus losetas para obtener únicamente dos que teselan el plano sólo de manera aperiódica (figura 18a). Estas losetas son las famosas *Dardo* y *Cometa* que pueden verse en las figuras 18b y c. Puede apreciarse ahí que es posible añadir lengüetas y muescas para evitar que las losetas se dispongan periódicamente.

Sin duda, este ejemplo es el más conocido de los conjuntos de teselas aperiódicas. Fue el primer conjunto de losetas aperiódicas con un número tan bajo de elementos, tan sólo dos. De hecho, aún no se ha podido encontrar ningún ejemplo de conjunto aperiódico de teselas con una única tesela o demostrar que no puede existir una tesela tal.

Además de esto, posee propiedades muy interesantes. De entre ellas podemos destacar que todos los mosaicos formados con el dardo y la cometa comparten los mismos motivos finitos. Es decir, si fijamos un mosaico cualquiera⁶ y dentro de ese mosaico tomamos un motivo finito cualquiera de él, esa región finita la podemos encontrar en cualquier otro mosaico formado con estas teselas. De hecho, encontraremos ese motivo infinitas veces y *cerca* de cualquier punto del plano. En resumidas cuentas

«No podemos distinguir dos mosaicos de Penrose mediante motivos finitos»

En particular, cualquier motivo de un mosaico de Penrose se puede encontrar “cerca” de cualquier lugar del mismo mosaico.

Por otro lado, en la figura 16c vemos que existe un cierto *orden*. Este mismo orden se encuentra en *todos* los mosaicos de Penrose, precisamente por lo que acabamos de decir. De manera que los mosaicos de Penrose nos muestran que “el orden no tiene por qué ser periódico”.

6. Casicristales

Según la cristalografía básica existían dos tipos de materiales: *periódicos* (cristales) y los *amorfos*. Así, los mosaicos aperiódicos como el de Penrose no presentaban demasiado interés. De hecho, estos eran más del interés de las matemáticas recreativas.

Esto cambió a partir de un asombroso descubrimiento: en 1982 los investigadores D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias y J.W. Cahn crearon un material que rompía con las ideas anteriores. Según publicaron dos años más tarde en [8]:

Hemos observado un sólido metálico (Al-al 14 %-Mn) con orden

⁶Formado con el dardo y la cometa ó con las losetas de la figura 17, ya que son *equivalentes*.

y orientación de largo alcance⁷, pero con simetría puntual icosaédrica, que es inconsistente con las traslaciones de un retículo. Sus picos de Bragg están bien definidos como los de los cristales, pero no puede modelarse mediante ninguna red de Bravais.

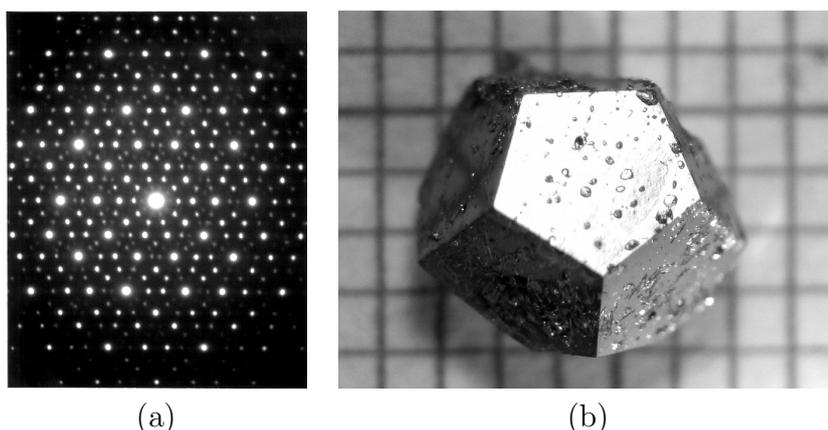


Figura 19: (a) El patrón de difracción de un material casicristalino. (b) Un grano de casicristal sintetizado por el grupo de I.R. Fisher (obsérvese la forma dodecaédrica).

Si no podemos modelarlo como una red de Bravais, ¿que podemos hacer? La estructura atómica de este nuevo material es, por así decirlo, un análogo a la estructura de los mosaicos de Penrose. Esto ha llevado un tema de matemáticas recreativas (los mosaicos de Penrose) a las revistas científicas y ha abierto un campo de investigación en matemáticas, física y química.

Bibliografía

- [1] M. Gardner, Mathematical Games: Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles, *Scientific American*, **236** (1997), 111–119. Disponible en <http://www.ma.utexas.edu/users/radin/gardner.html>
- [2] B. Grunbaum y G.C. Shephard, *Tilings & patterns*, W. H. Freeman & Co, 1986.
- [3] R. Hooke, *Micrographia*, 1665. Disponible en el Proyecto Gutenberg <http://www.gutenberg.org>
- [4] D.E. Joyce, <http://www.clarku.edu/~djoyce/>
- [5] J. Kepler, *Strena seu de nive sexángula*, 1610. Edición bilingüe latín/inglés *The six-cornered snowflake*, OUP, 1966.

⁷El orden de largo alcance es la versión física de la propiedad que cumplían los mosaicos de Penrose: Existe una dependencia o correlación entre las posiciones de partículas lejanas.

- [6] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619. Disponible en European Cultural Heritage Online <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home>
- [7] R. Penrose, Pentaplexity, *Eureka* **39** (1978), 16–32. Disponible en <http://www.ma.utexas.edu/users/radin/pentaplexity.html>
- [8] D. Schechtman et al., Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry, *Physical Reviews Letters* **53**(20) (1984) 1951–1954. Disponible en <http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/icosahedral/shechtman.pdf>
- [9] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, CUP, 1995.
- [10] R.J.D. Tilley, *Crystals and crystal structures*, Willey, 2006.

Álvaro Lozano Rojo

Universidad del País Vasco–Euskal Herriko
Unibertsitatea

Departamento de Economía Aplicada III
Avenida Lehendakari Aguirre 83, 48015 Bilbao

e-mail: alvaro.lozano@ehu.es

<http://www.ehu.es/alvaro/>

