

Construcciones geométricas sin regla ni compás

por

Pedro Alegría, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

La geometría posee dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre la proporción media y extrema. Al primero podemos compararlo con una medida de oro; al segundo podemos denominarlo una preciosa joya.

J. Kepler

Se dice que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras falsas.

M. Chasles

1. Introducción

Es sabido que el origen de la matemática se encuentra en la geometría y dentro de la geometría recreativa, los problemas más antiguos son precisamente los problemas de disección. También es muy conocido el hecho de que las construcciones geométricas griegas se hacían únicamente con regla y compás. Algunos intentos de comprender por qué estas herramientas eran las únicas válidas son los siguientes:

- Las curvas geométricas más simples son la recta y la circunferencia y los instrumentos más simples para su construcción son la regla y el compás.
- Para Platón, toda representación de una circunferencia no es más que el resultado imperfecto de la circunferencia ideal. Por tanto, todos los instrumentos de medida son imperfectos, salvo la regla y el compás.

- El trabajo de Euclides contenía resultados difíciles de creer. Por eso las figuras precisas formaban parte de la demostración y los instrumentos más fiables eran la regla y el compás.

Hoy presentaremos algunos problemas de disección que contengan algún componente de apariencia paradójica, o puzzles geométricos cuya comprensión involucre propiedades matemáticas diversas. Precisamente, al no usar la regla y el compás a veces dará origen a figuras imperfectas que nos llevarán a conclusiones erróneas.

No vamos a proponer verdaderas paradojas, las cuales han sido muy importantes en el avance de las matemáticas, sino simples falacias, errores de razonamiento, menos importantes pero también interesantes por su componente pedagógica. ¿Cuál es la diferencia entre ambos conceptos? La daremos según su definición etimológica.

- **Paradoja** (*para* = contra, *doxo* = opinión): conclusión contradictoria que se llega mediante razonamientos correctos.

- **Falacia** (*fallere* = engañar): razonamiento aparentemente correcto que conduce a una conclusión falsa.

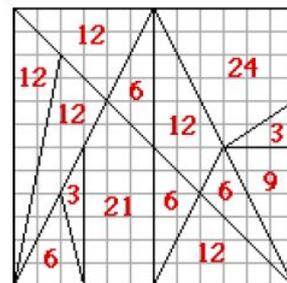
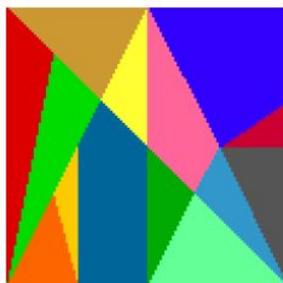
2. Puzzles geométricos

Empezaremos describiendo algunos puzzles geométricos clásicos más o menos populares en la actualidad.

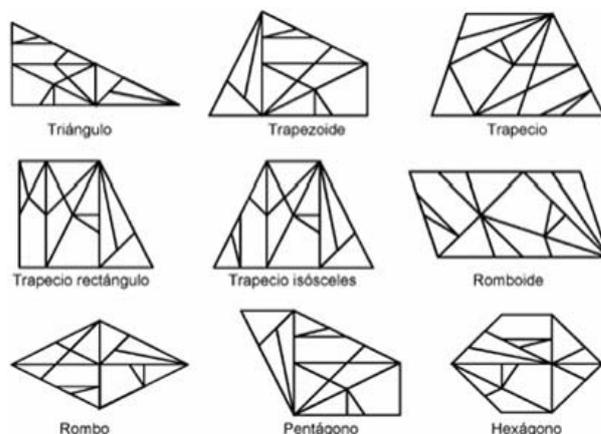
2.1 Stomachion

El puzzle geométrico más antiguo del que se tiene noticia es el llamado “*Stomachion*”, que fue utilizado por **Arquímedes** (-287,-212) para escribir un tratado de combinatoria.

Las piezas del puzzle y sus dimensiones son las indicadas en las figuras siguientes.



Hoy en día se sabe que existen 536 soluciones diferentes (encontradas por **Bill Cutler** el 31-10-2003, justo a tiempo para ganar un premio por ello). Curiosamente, con todas las piezas se pueden construir los cinco tetrominós pero también diversas figuras geométricas, como las siguientes.



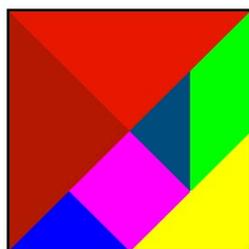
Es también notable la cantidad de figuras no geométricas que pueden formarse con las piezas del *Stomachion*, como se muestra a continuación.

Para más información sobre el *Stomachion*, recomendamos la lectura del libro [12] *El código de Arquímedes*, de R. Netz y W. Noel.



2.2 Tangram

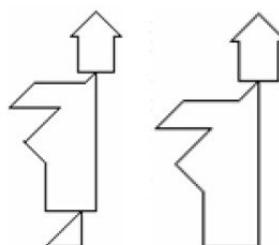
No se sabe con certeza el origen de este tradicional juego tan conocido en nuestros días. Una de las versiones más creíbles sugiere que el origen del nombre proviene de los términos cantoneses “*Tang* = chino” y “*gram* = gráfico”, para indicar la procedencia oriental del juego.



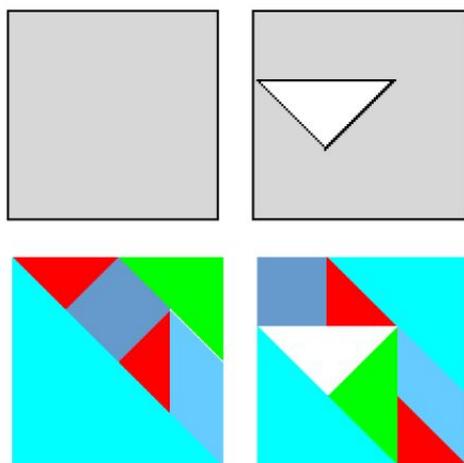
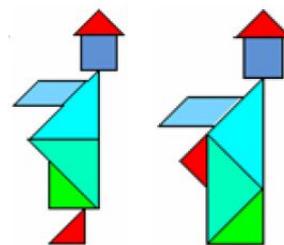
El juego consta de siete piezas que forman un cuadrado, como se ilustra en la imagen adjunta.

El puzzle permite construir una gran cantidad de imágenes, algunas de ellas geométricas, pero se sabe que sólo pueden construirse 13 polígonos convexos.

Dentro del tema que nos ocupa, existen varios pares de figuras muy parecidas, construidas utilizando todas las piezas del tangram y en las que aparentemente la única diferencia entre ellas consiste en que a una le falta una pieza. Se atribuye al gran divulgador de las matemáticas **Henry Dudeney** la aparente paradoja que mostramos a continuación.

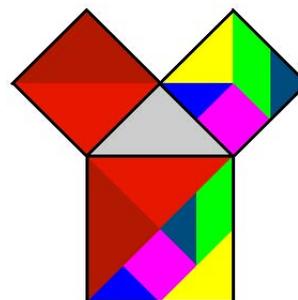


Ambas figuras, que representan a un monje chino, se construyen con todas las piezas pero a la segunda le faltan los pies. La solución a tal paradoja es evidente: las dimensiones de ambas figuras son diferentes. Las figuras siguientes muestran su construcción.

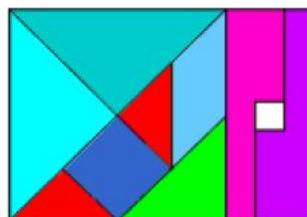
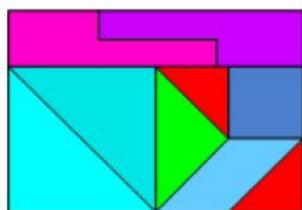


Entre la multitud de “paradojas” similares a la anterior, destacamos la siguiente: con todas las piezas puede construirse un cuadrado completo y un cuadrado con un hueco triangular. Las figuras adjuntas muestran el problema y su solución.

Como curiosidad, citaremos que el teorema de Pitágoras para el triángulo equilátero e isósceles puede demostrarse también mediante el tangram. La demostración, sin palabras, se muestra en la figura siguiente.



Más sorprendente es la siguiente construcción: si añadimos a las siete piezas del tangram otras dos como se muestra en la figura, se pueden construir dos rectángulos de las mismas dimensiones, pero con un hueco cuadrado en uno de ellos.



3. Errores en las demostraciones geométricas

Proponemos en esta sección algunos resultados obviamente erróneos en los cuales invitamos al lector a descubrir el razonamiento falso que se ha deslizado en la demostración. Estos y otros resultados pueden encontrarse en el libro [3] *Lapses in mathematical reasoning*, de V. Bradis et al.

Teorema 3.1. *Todo triángulo es isósceles.*

Demostración

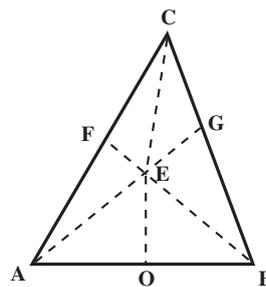
A partir de la figura adjunta, trazamos $CE =$ bisectriz de \widehat{C} , $OE =$ mediatriz de AB , $EF \perp AC$ y $EG \perp BC$.

Así $\triangle CFE \cong \triangle CGE$ porque $\widehat{CFE} = \widehat{CGE}$, $\widehat{FCE} = \widehat{GCE}$ y CE es la hipotenusa común.

Entonces $CF = CG$ y $EF = EG$.

También $\triangle EFA \cong \triangle EGB$ porque $EF = EG$, $EA = EB$ y $\widehat{AFE} = \widehat{BGE} = \pi/2$. Entonces $FA = GB$.

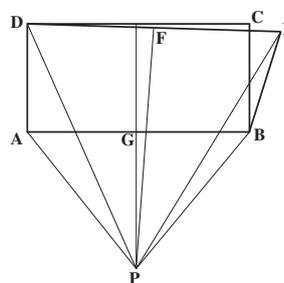
En definitiva $CA = CB$, es decir, el triángulo es isósceles. ■



Teorema 3.2. *Un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso.*

Demostración

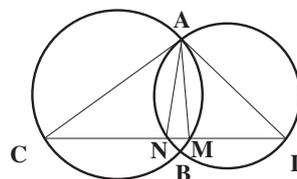
Dado el rectángulo $ABCD$ de la figura, trazamos $BE = BC$, PG mediatriz de AB y PF mediatriz de DE . Por tanto, $PA = PB$ y $PD = PE$. Con estos datos, es evidente que los triángulos $\triangle PAD$ y $\triangle PEB$ son congruentes. Por tanto, $\widehat{PAD} = \widehat{PEB}$. Como también $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$, entonces el ángulo (recto) \widehat{BAD} coincide con el ángulo (obtusos) \widehat{ABE} . ■



Teorema 3.3. *Desde un punto se pueden trazar dos perpendiculares a una misma recta.*

Demostración

Sean A y B los puntos de intersección de dos circunferencias, AC y AD los diámetros respectivos y M y N los puntos donde CD corta a las circunferencias.

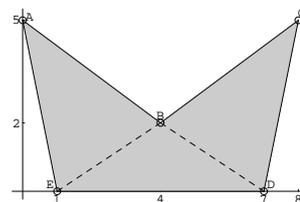


Los ángulos $\triangle AMC$ y $\triangle AND$ son rectos por estar inscritos en una semicircunferencia. Esto quiere decir que AN y AM son perpendiculares (distintas) a CD . ■

Concluimos la sección con un problema que tiene soluciones distintas según el método que apliquemos para resolverlo.

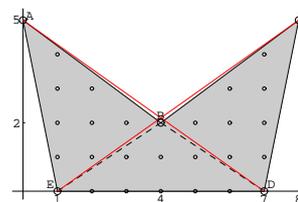
Problema. *Calcular el área del bonete de la figura.*

- Primer método: Área del trapecio $ACDE = \frac{8+6}{2} \cdot 5 = 35$.
 Área del triángulo $ABC = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.
 Área del bonete = $35 - 12 = 23$.



- Segundo método: Área del triángulo $ADE = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
 Área del triángulo $CDE = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
 Área del triángulo $BDE = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$.
 Área del bonete = $15 + 15 - 6 = 24$.

Una solución correcta a la vez que original se obtiene utilizando el teorema de Pick, que enunciaremos posteriormente. Basta contar el número de puntos con ambas coordenadas enteras en el interior y en el borde de la figura.



Como hay 19 puntos en el interior y 10 puntos en la frontera, la fórmula de Pick afirma que: Área del bonete = $19 + 10/2 - 1 = 23$.

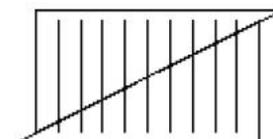
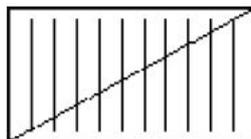
4. Paradojas numéricas

Diversos procedimientos geométricos que contienen errores bien disimulados en el razonamiento, producen resultados numéricos incorrectos, como mostramos en los siguientes ejemplos.

4.1. $9 = 10$

Paradoja de las líneas. En una hoja de papel se dibujan diez líneas paralelas, como en la figura de la izquierda; se recorta la hoja por la diagonal y se desplaza la mitad superior como indica la figura de la derecha.

¿Por qué ahora sólo hay nueve líneas? ¿Dónde está la décima?

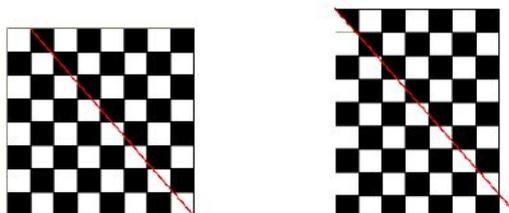


Este problema aparece en el libro [10] *Rational Recreations, in which the principles of numbers and natural philosophy are clearly and copiously elucidated, by a series of easy, entertaining, interesting experiments*, de W. Hooper, publicado en 1774. En el libro se plantea, utilizando el método anterior,

la posibilidad de cortar nueve billetes en dieciocho partes de forma que, al recomponerlos adecuadamente, se formen diez billetes.

4.2. $32 = 31.5$

En el tablero de ajedrez de la izquierda se recorta por la diagonal marcada y se desplaza la mitad superior como se ilustra en la figura de la derecha.



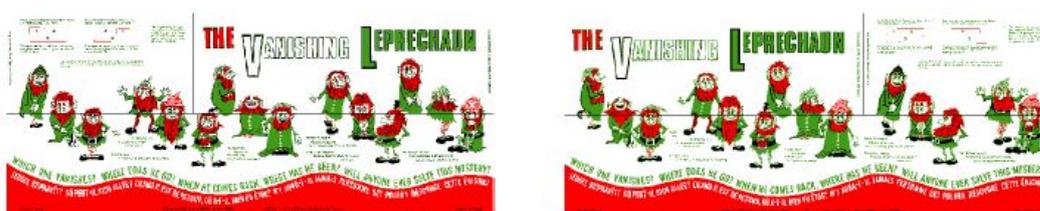
El triángulo que sobresale en el extremo inferior derecho se traslada al extremo superior izquierdo. Si el tablero original tenía $8 \times 8 = 64$ cuadros, ahora sólo tiene $9 \times 7 = 63$ cuadros. Se ha perdido medio cuadro de cada color. La explicación es simple: la línea de corte no es la diagonal del cuadrado, de modo que no divide cada cuadro en dos partes iguales. La altura del rectángulo de la derecha es $9\frac{1}{7}$.

Este problema aparece en el libro [6] *Amusements in Mathematics*, de Henry Dudeney.

4.3. ¡DESAPARECIDOS!

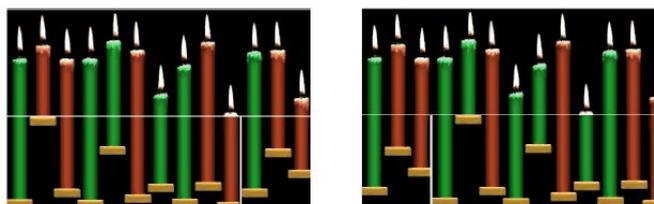
Muchos ejemplos de disecciones paradójicas se relacionan con figuras no geométricas. Aquí nos limitaremos a mostrar dos situaciones bastante representativas de las demás.

Un modelo muy popular es el diseñado por Pat Patterson, titulado “*Vanishing Leprechaun*”, que mostramos a continuación.



El dibujo de la izquierda muestra 15 duendes; el de la derecha, sólo 14.

El siguiente ejemplo contiene una doble contradicción. En los dos dibujos siguientes hay 13 velas.



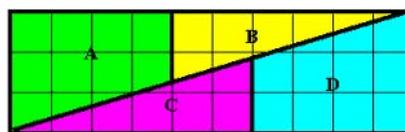
Sin embargo, el de la izquierda tiene 7 velas rojas y el de la derecha sólo 6. Se puede observar que, en todos los casos, los elementos en cada sección móvil son números primos entre sí.

Más ejemplos de este tipo e información adicional se encuentran en [8] *Mathematics, Magic and Mystery*, de Martin Gardner.

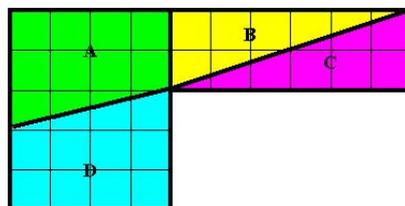
4.4. $30 = 32$

Se conoce con el nombre de *paradoja de Hooper* a la siguiente construcción:

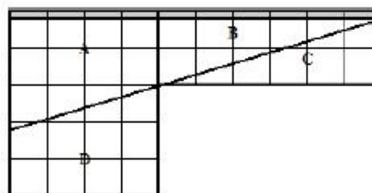
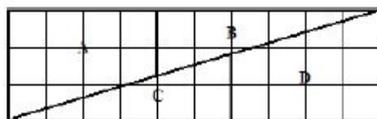
El rectángulo de la figura se construye uniendo las piezas A, B, C y D. Es evidente que el área de dicho rectángulo es $3 \times 10 = 30$ unidades.



Sin embargo, si intercambiamos las piezas C y D, la figura que resulta tiene área $20 + 12$ unidades. ¿En qué momento ha cambiado el área?



Para explicar este fenómeno, debemos calcular de forma exacta las dimensiones de cada pieza. La verdadera construcción es la siguiente:



La figura de la derecha tiene altura menor de la supuesta. Ha quedado disimulado un rectángulo de base 10 y altura 0,2 unidades.

Un poco de historia

- **Martin Gardner** atribuye la paradoja a **W. Hooper** en el volumen 4 de la cuarta edición (de 1794) de *Rational Recreations*. El enunciado de Hooper contiene una errata.

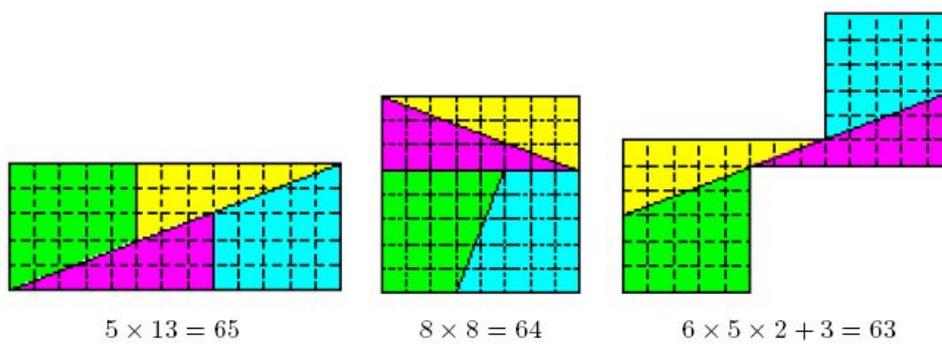
- Sin embargo, **Douglas Rogers** afirma que la primera aparición del puzzle se encuentra en *Nouvelles récréations physiques et mathématiques* de **Edmé Gilles Guyot**. El error de la primera edición fue corregido en la segunda (aparecido aún antes que el de Hooper).

- **Sebastiano Serlio** (1475-1554) transformó un rectángulo 3×10 en dos rectángulos $4 \times 7 + 1 \times 3$, tratando de convertir un rectángulo en otro, sin observar que tenían áreas distintas.

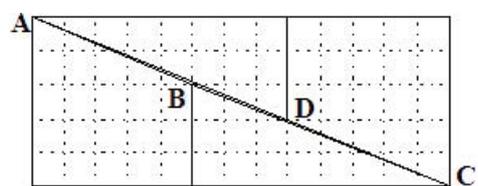
Puedes encontrar una información más detallada en el libro [7] *Dissections: plane and fancy*, de G. Frederickson.

4.5. $63 = 64 = 65$

Una de las primeras construcciones donde distintas colocaciones de las piezas de un cuadrado producen figuras con área aparentemente distinta aparece en [12] *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*, de S. Loyd (1868). Observa las figuras siguientes: el rectángulo de la izquierda tiene área $65 = 5 \times 13$; sin embargo, las mismas piezas pueden reagruparse para formar el cuadrado central que tiene área $8 \times 8 = 64$. Una nueva disposición permite formar la figura de la derecha cuya área es 63.



En este caso, la explicación se encuentra en que las dimensiones de las piezas no permiten encajar exactamente en el rectángulo de la izquierda. Una figura más precisa sería la siguiente:



Podemos observar que se forma un hueco casi imperceptible con forma de cuadrilátero ABCD muy alargado. Como las cuatro piezas forman un cuadrado de área 64, es claro que el área de dicho cuadrilátero es uno. Ahora bien, ¿cómo calcular dicha área?

Nuevamente apelamos al teorema de Pick, demostrado en 1899, y que enunciamos a continuación.

Teorema de Pick. *Sea P un polígono simple (es decir, sus lados no se cortan) cuyos vértices son puntos de un retículo (es decir puntos con ambas coordenadas enteras). Si llamamos $I(P)$ al número de puntos del retículo en el interior de P , $F(P)$ al número de puntos del retículo en la frontera de P y $A(P)$ al área del polígono, entonces*

$$A(P) = I(P) + \frac{F(P)}{2} - 1.$$

Puedes leer distintas demostraciones y aplicaciones del teorema en diversos lugares. Citaremos simplemente dos páginas web y un libro:

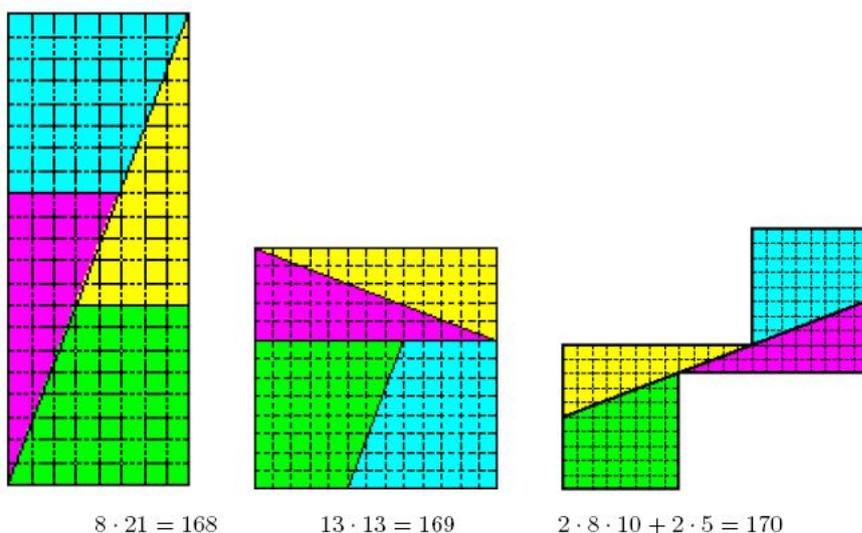
- http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick_proof.shtml, de A. Bogomolny.

- <http://www.amc.edu.mx/laciencia/pick.htm>, de C. Bosch.

- [1] *El libro de las demostraciones*, de M. Aigner y G. Ziegler.

4.6. $168 = 169 = 170$

En 1868, **Oskar Schlomilch** publicó la generalización de esta paradoja a figuras cuyas dimensiones están relacionadas con la sucesión de Fibonacci. Si observamos las siguientes figuras, resulta que el rectángulo de la izquierda tiene área $8 \times 21 = 168$, el cuadrado central tiene área $13 \times 13 = 169$ y la figura derecha tiene área 170 .



Las dimensiones de las piezas corresponden a elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n \geq 0}$, que se define por

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

y cuyos primeros términos son: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

Un cuadrado de área $(F_n)^2$ se divide en cuatro regiones de modo que, al recomponerlas, se puede obtener el rectángulo de área $F_{n-1} \times F_{n+1}$.

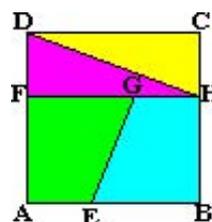
Este hecho es debido a la *identidad de Cassini* (1680):

$$(F_n)^2 - F_{n-1} \times F_{n+1} = (-1)^{n-1}. \quad (1)$$

En todos los casos el error absoluto es siempre el mismo; sin embargo, para n suficientemente grande, el error relativo es casi nulo y, a simple vista, no puede observarse que las piezas no ajustan exactamente.

Proponemos a continuación algunos problemas relacionados con estas construcciones, los cuales pueden consultarse en [9] *Gnomon from pharaohs to fractals*, de M. Gazalé. En vista de la argumentación anterior, no puede sorprender que la constante áurea ϕ esté involucrada en las soluciones.

Problema 1. *Calcular las dimensiones de $AE = GH$ del cuadrado $ABCD$ de la figura para que las piezas puedan reagruparse y formar un rectángulo con la misma área que el cuadrado original.*



Solución: $EB/AE = \phi$.

Problema 2 (Charles Dodgson). *Caracterizar las posibles dimensiones de las piezas del cuadrado para que, al reconstruirse, se forme un rectángulo cuya área sea (aparentemente) una unidad mayor.*

4.7. Triángulos de Curry

Figuras triangulares permiten también construir ejemplos paradójicos. Se atribuye su creación al mago **Paul Curry** en 1953, con el ejemplo de las figuras.



Como se observa, basta intercambiar los triángulos para que se alteren las dimensiones de los rectángulos. En la figura de la izquierda se obtiene un rectángulo de área $5 \times 3 = 15$, pero la figura de la derecha contiene un rectángulo de área $8 \times 2 = 16$.

Explicación: las hipotenusas de los triángulos no son paralelas, de modo que la figura de la izquierda es cóncava mientras que la de la derecha es convexa. Basado en esta idea, Martin Gardner construyó el puzzle que mostramos en las figuras siguientes. Recortó el rectángulo en dos piezas que pueden recomponerse de dos formas distintas, pero donde una de ellas deja un hueco.



Relación con la sucesión de Fibonacci

Algunas propiedades notables de la sucesión de Fibonacci son las siguientes:

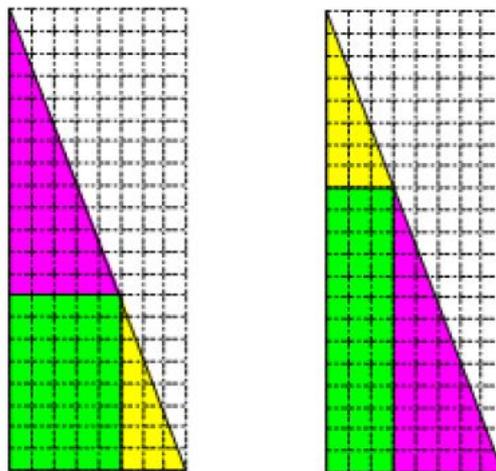
- Identidad de Catalan (1814-1894): $F_n^2 - F_{n+r} \cdot F_{n-r} = (-1)^{n-r} \cdot F_r^2$.

Si $r = 1$, se obtiene la identidad de Cassini (1).

- Identidad de d'Ocagne (1862-1938): $F_{n+1} \cdot F_m - F_n \cdot F_{m+1} = (-1)^n \cdot F_{m-n}$.

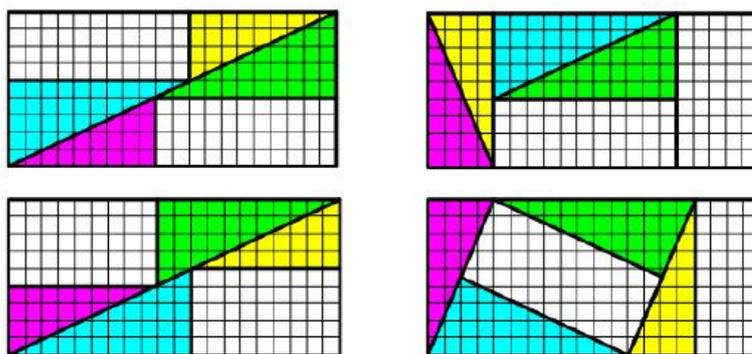
Si $m = n + 2$, $F_n \times F_{n-3} - F_{n-2} \times F_{n-1} = (-1)^n$.

Teniendo en cuenta esta última fórmula, basta construir dos rectángulos cuyas dimensiones sean $F_n \times F_{n-3}$ y $F_{n-2} \times F_{n-1}$, respectivamente, y formar con ellos dos triángulos rectángulos de catetos F_{n-3} , F_{n-1} y F_{n-2} , F_n , respectivamente. Los triángulos grandes son, aparentemente, iguales pero los rectángulos tienen áreas diferentes. Otro ejemplo, con los términos 3, 5, 8, 13, nos lleva a las figuras siguientes:



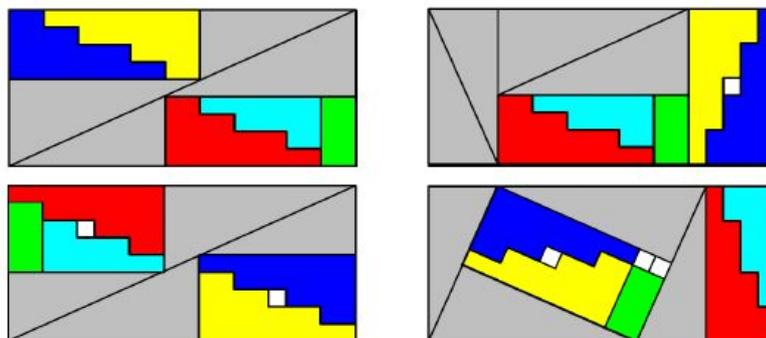
4.8. $88 = 89 = 90 = 91$

En un rectángulo de dimensiones 20×9 se recortan cuatro triángulos y se disponen de cuatro formas diferentes. Las regiones sobrantes tienen distintas áreas (idea original de **Noam Elkies**):



Explicación: los triángulos rectángulos no son semejantes, de modo que las hipotenusas no encajan perfectamente, lo que origina una pequeña variación en las dimensiones de las figuras que forman.

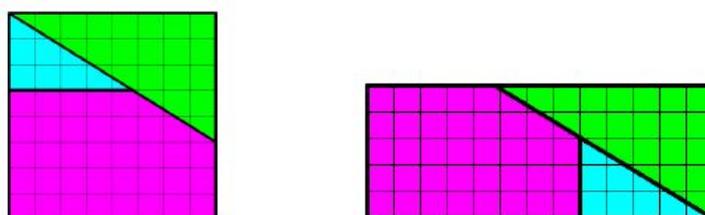
Para disimular más aún la construcción, puede hacerse un puzzle recortando cada rectángulo en dos piezas. Las distintas disposiciones conducen a los siguientes rectángulos, donde aparecen distintos huecos en cada uno de ellos.



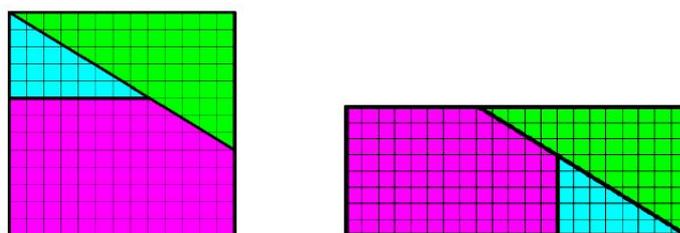
4.9. Paradoja de John Sharp

En el artículo [14] *Fraudulent dissection puzzles - a tour of the mathematics of bamboozlement*, de J. Sharp, aparece otra “paradoja” descomponiendo un cuadrado en tan sólo tres piezas.

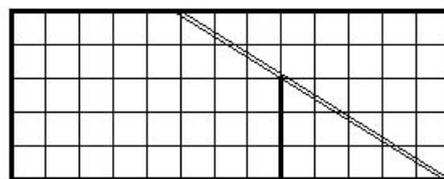
El cuadrado de la izquierda se recorta en tres piezas y se recompone formando el rectángulo de la derecha. Sin embargo las áreas son diferentes.



Las dimensiones de las secciones pueden ser cualesquiera tres números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. El ejemplo anterior está formado con los términos 5 – 8 – 13 y, a continuación, mostramos un ejemplo con los términos 8 – 13 – 21:



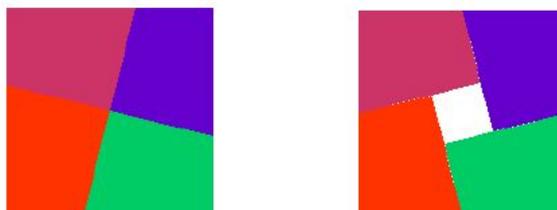
Observemos en la figura siguiente dónde está el error. Se forma un cuadrilátero muy estrecho cuya área es la diferencia entre las áreas de ambas figuras.



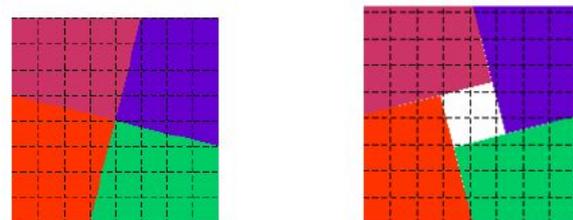
4.10 Cuadrados crecientes

El interesante artículo [5] *Polly's flagstones*, de S. Coffin, aparecido en el libro [2] homenaje a Martin Gardner *The mathematician and Pied Puzzler* muestra otro ejemplo de apariencia paradójica. Consideremos un cuadrado cualquiera el cual recortamos en cuatro piezas mediante dos cortes perpendiculares pasando por el centro del cuadrado.

Si reconstruimos el cuadrado reordenando las piezas como en la figura, se forma un hueco en el centro. Aparentemente se ha modificado el área del cuadrado.

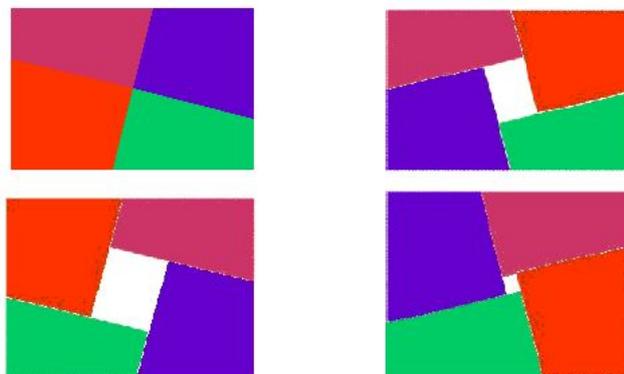


Como es fácil deducir, en realidad el segundo cuadrado es mayor que el primero. El ligero aumento del lado del cuadrado se compensa con la aparición del cuadrado central.



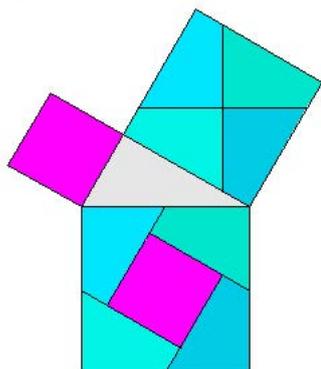
Puede lograrse la ilusión de que los cuadrados son iguales dibujando en ambos lados del cuadrado original un mismo dibujo; de este modo, no se distinguirá la diferencia de dimensiones.

Con figuras rectangulares aumenta el número de posibles disposiciones de las piezas y podemos formar cuatro rectángulos, cuyos huecos centrales tengan dimensiones distintas. Un interesante problema consiste en averiguar cómo debe recortarse el rectángulo para que puedan obtenerse las demás configuraciones.



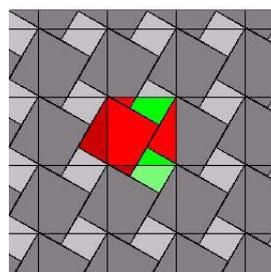
Cuadrados crecientes y teorema de Pitágoras

Una aplicación (esta vez no errónea) del ejemplo anterior permite establecer una demostración gráfica del teorema de Pitágoras. Dicha prueba fue descubierta por el matemático aficionado **Henry Perigal** en 1874 y consiste en la siguiente construcción:



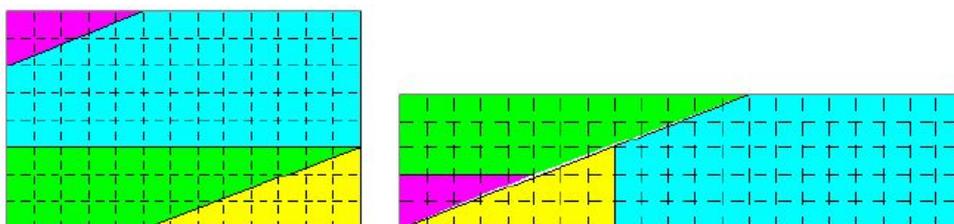
Se dibujan sendos cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo y se recorta el de mayor lado en cuatro partes iguales, trazando desde el centro del cuadrado una recta paralela y otra perpendicular a la hipotenusa. Estas piezas, junto con el cuadrado de lado el cateto menor, se trasladan como se muestra en la figura para formar el cuadrado de lado la hipotenusa del triángulo.

Esta idea ha sido aprovechada por B. Casselman en el artículo [4] *On the dissecting table*, para construir los llamados embaledados pitagóricos, formados por baldosas cuadradas con las dimensiones de los catetos de un triángulo rectángulo. Se puede ver en el dibujo siguiente que la suma de las áreas de cada pareja de baldosas es igual al área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa del triángulo.



4.11. Rectángulos de Langman

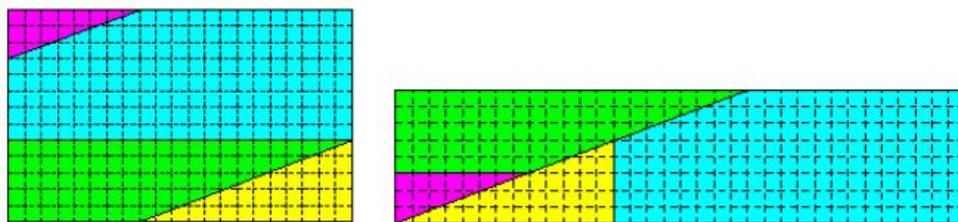
Como último ejemplo de construcciones geométricas “paradójicas”, mostraremos la contenida en el artículo [11] *Play Mathematics*, de H. Langman.



La figura izquierda tiene área $8 \times 13 = 104$ y la derecha tiene área $5 \times 21 = 105$. Se puede observar que las dimensiones corresponden a términos de la sucesión de Fibonacci para los cuales se aplica la fórmula:

$$F_n \times F_{n-3} - F_{n-2} \times F_{n-1} = (-1)^n$$

Con $n = 9$, la holgura entre ambas construcciones es ya imperceptible.

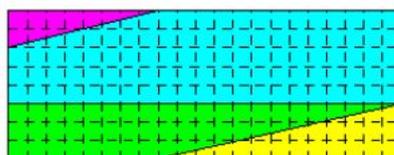


Rectángulos de Langman generalizados

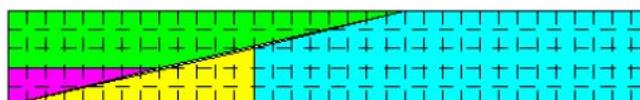
Combinando las fórmulas de Cassini y Catalan, resulta

$$F_{n+2} \cdot F_{n-2} - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

la cual permite construir puzzles cuya diferencia de áreas sea 2, como se muestra en las figuras siguientes.



$$8 \times 21 = 168$$



$$5 \times 34 = 170$$

Según el teorema de Pick, el imperceptible cuadrilátero que compensa la diferencia de áreas tiene seis puntos del retículo.

5. BAMBOOZLEMENTS

En el libro [7] *Dissections: plane and fancy*, G. Frederickson propone la siguiente definición.

“*Bamboozlements*”: regiones planas que, al dividir en piezas y reagruparlas de forma adecuada, dan lugar a otras figuras de área supuestamente distinta.

Los puzzles geométricos que obedecen a la definición anterior pueden clasificarse, como establece **Torsten Sillke** en la página web titulada *Geometrical paradox*, mediante algunos conceptos matemáticos sencillos.

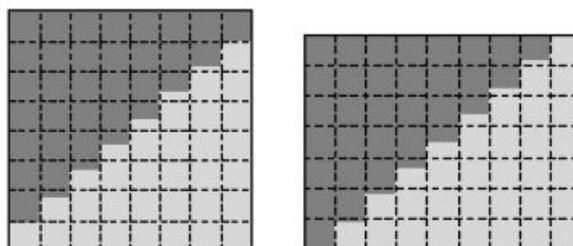
Definición. Tres números x_0, x_1, x_2 están en *progresión μ -cuasigeométrica* cuando existe una “pequeña” constante μ tal que: $(x_1)^2 - x_0 \cdot x_2 = \mu$.

En particular, si $\mu = 0$, la propiedad anterior indica que los números forman una progresión geométrica.

5.1 Puzzles de dos piezas

Como $(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$, tres números consecutivos siempre forman una progresión 1-cuasigeométrica. Esto permite realizar la siguiente construcción:

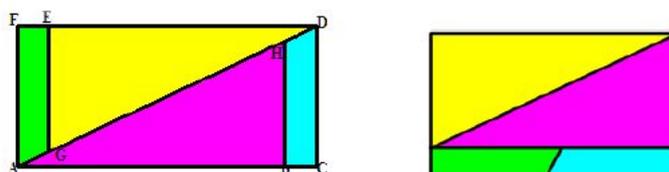
El cuadrado de la izquierda se descompone en dos piezas, las cuales pueden reagruparse para formar el rectángulo de la izquierda. Sin embargo, las áreas son distintas, en este caso 64 y 63, respectivamente.



Explicación: el cuadrado de la izquierda tiene lado n y el rectángulo de la derecha tiene lados $n - 1$ y $n + 1$. La diferencia entre las áreas es siempre 1, pero el ajuste entre las piezas no es exacto. A mayor n , mejor ajuste y la diferencia entre las áreas se reparte entre todos los escalones de las piezas.

5.2 Puzzles de cuatro piezas

Sea (x_0, x_1, x_2) una sucesión μ -cuasigeométrica; construimos el rectángulo de base $AC = x_1 + x_2$ y altura $AF = x_1$, y lo recortamos en cuatro piezas con $AB = x_0 + x_1$, $BC = x_2 - x_0$, $BH = GE = x_0$. Entonces puede reconstruirse para formar un rectángulo de base $x_0 + x_1$ y altura x_2 . La diferencia entre sus áreas es μ .



Esta situación es general, pues es fácil demostrar el siguiente resultado:

Proposición 5.1. Si (x_0, x_1, x_2) es una sucesión μ -cuasigeométrica, entonces $ad - bc = \mu$, donde $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_0 + x_1$, $d = x_1 + x_2$. Recíprocamente, si cuatro números a, b, c, d verifican las relaciones $a + b = d$, $ad - bc = \mu$, entonces la sucesión $(c - a, a, b)$ es μ -cuasigeométrica.

Ejemplos. Los casos más atractivos visualmente (por tener mayor apariencia de paradojas) corresponden a $\mu = 1$.

- $x_0 = 3, x_1 = 5, x_2 = 8$ (puzzle de Sam Loyd). Con estos datos, una de las figuras es un cuadrado. Esta situación no es casual: si en la proposición anterior añadimos la condición $b = c$, entonces la sucesión (x_0, x_1, x_2) es de Fibonacci.

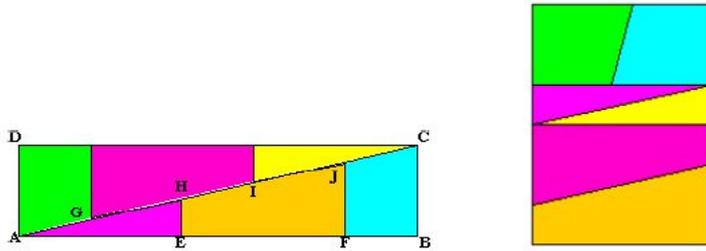
- $x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 6$ (construido por Walter Lietzmann).
- $x_0 = 2, x_1 = 7, x_2 = 24$ (debido a Hermann Schubert).
- $x_0 = 5, x_1 = 11, x_2 = 24$ (de Torsken Sillke).

Conviértete en inventor de puzzles asignando tú mismo valores a los parámetros a, b, c, d para construir los rectángulos correspondientes. El dibujo anterior está realizado con los valores $x_0 = 8, x_1 = 9, x_2 = 10$.

También es posible construir puzzles con $\mu = 2$; por ejemplo $x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 7$. El dibujo correspondiente ilustra muy bien el teorema de Pick, pues el hueco que dejan las piezas al formar el rectángulo posee seis puntos del retículo en la frontera.

5.3 Puzzles de seis piezas

Dada una sucesión μ -cuasigeométrica (x_0, x_1, x_2) , construimos el rectángulo de la figura, de base $AB = 2x_1 + x_2$ y altura $AD = x_1$, y lo recortamos en seis piezas de modo que $AE = EF = x_1 + 2x_0$, $FB = x_2 - 4x_0$, $EH = x_0$, $FJ = 2x_0$. Si reordenamos las piezas como se indica en la ilustración inferior, podemos formar otro rectángulo de base $2x_0 + x_1$ y altura x_2 . De este modo, la diferencia entre las áreas es 2μ .



Al igual que el caso anterior, el método es general, y puede construirse cualquier modelo aplicando el siguiente resultado.

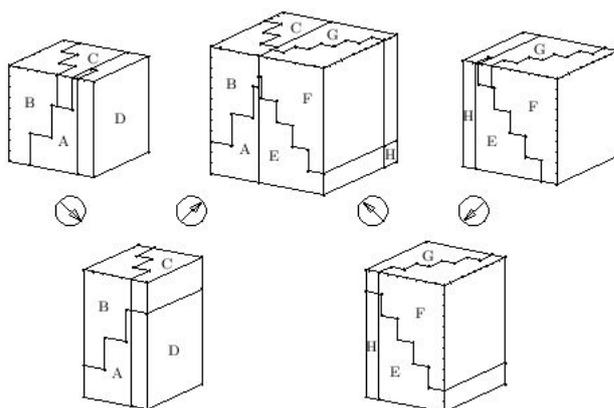
Proposición 5.2. *Si (x_0, x_1, x_2) es una sucesión μ -cuasigeométrica, entonces $ad - bc = 2\mu$, donde $a = x_1$, $b = x_2$, $c = 2x_0 + x_1$, $d = 2x_1 + x_2$. Recíprocamente, si cuatro números a, b, c, d verifican las relaciones $2a + b = d$, $ad - bc = 2\mu$, entonces la sucesión (x_0, x_1, x_2) , con $x_0 = (c - a)/2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, es μ -cuasigeométrica.*

Observemos que, para construir este tipo de modelos, deben verificarse las restricciones $x_1 > 2x_0$ y $x_2 > 2x_1$.

5.4 ¿En tres dimensiones?

Es muy conocido el teorema de Fermat, demostrado por A. Wiles, el cual afirma que no existen enteros positivos a, b, c y $n > 2$ tales que $a^n + b^n = c^n$.

Sin embargo, G. Frederickson, usando ideas similares a las de los ejemplos bidimensionales, ha logrado construir un puzzle que “contradice” el caso $n = 3$. Concretamente, la figura siguiente demuestra que $9^3 + 10^3 = 12^3$, es decir $1729 = 1728$, pues las piezas del cubo central de arista 12 se pueden reordenar para formar dos cubos de aristas 9 y 10, respectivamente.



Otro método para descomponer un cubo en piezas que puedan recomponerse y formar un prisma cuyo volumen sea diferente al del cubo original sería aplicar la *fórmula de Melham* (2003):

$$F_{n+1} \cdot F_{n+2} \cdot F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^n F_n,$$

donde F_n es el término general de la sucesión de Fibonacci.

Conclusión

Con estas líneas hemos querido contradecir algunas ideas expresadas por famosos pensadores que no han sido capaces de captar la utilidad práctica de los razonamientos matemáticos, incluidos los erróneos.

Citamos simplemente dos frases en este sentido:

Cuando Arquímedes descubrió la gravedad de los cuerpos prestó un servicio al género humano; pero ¿de qué nos sirve encontrar tres números tales que la diferencia de los cuadrados de dos de ellos sumada al cubo del tercero forme siempre un cuadrado y que la suma de las tres diferencias sumada al mismo cubo forme otro cuadrado? **Voltaire**, “*Diccionario filosófico*”.

Suprimid todas las curiosidades que apasionan. Sobre todo no os dejéis hechizar en modo alguno por los diabólicos atractivos de la geometría, nada extinguirá tanto en vosotros el espíritu interior de gracia y de recogimiento. **Fenelón**, “*Cartas espirituales*”.

Bibliografía

- [1] M. Aigner y G. Ziegler, *El libro de las demostraciones*, Nivola, 2005.
- [2] E. Berlekamp y T. Rodgers (eds.), *The Mathematician and Pied Puzzler*, AK Peters, 1999.
- [3] V. Bradis, V. Minkowskii y A. Kharcheva, *Lapses in mathematical reasoning*, Dover, 1999.
- [4] B. Casselman, *On the dissecting table*, Plus Magazine, 2001.
- [5] S. Coffin, *Polly's flagstones*, en [2].
- [6] H. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, T. Nelson and sons, 1917.
- [7] G. Frederickson, *Dissections: Plane and Fancy*, Cambridge U. Press, 1997.
- [8] M. Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover, 1967.
- [9] M. Gazalé, *Gnomon from pharaohs to fractals*, Princeton U. Press, 1999.
- [10] W. Hooper, *Rational Recreations, 4 vols.*, 1774.
- [11] H. Langman, *Play Mathematics*, Hafner, 1962.
- [12] S. Loyd, *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*, The Lamb Pub. Co., 1914.
- [12] R. Netz y W. Noel, *El código de Arquímedes*, Temas de Hoy, 2005.
- [13] W.W. Rouse Ball y H.S.M. Coxeter, *Mathematical recreations and Essays*, Dover, 1987.
- [14] J. Sharp, *Fraudulent dissection puzzles - a tour of the mathematics of bamboozlement*, The Mathematical Association, 2002.
- [15] W. Simon, *Mathematical Magic*, The Mathematical Association, 1964.

Pedro Alegría

Universidad del País Vasco/
Euskal Herriko Unibertsitatea
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Barrio Sarriena s/n. 48940 Leioa
e-mail: pedro.alegria@ehu.es
<http://www.ehu.es/~mtpalezp/>

