

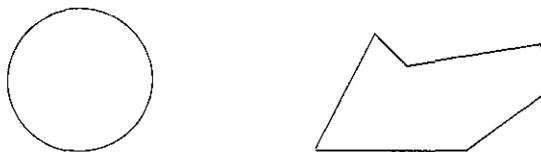
Simetría y Sistemas Dinámicos

por

David Martín de Diego, CSIC

1. Introducción

Una de las herramientas más poderosas de la ciencia moderna reside en el concepto de **simetría**. Todos tenemos una idea intuitiva del significado de la palabra simetría, así, todos diríamos que un círculo es más simétrico que un polígono irregular.



Intentemos avanzar un poco más en esta intuición. Una definición más rigurosa se la debemos al matemático **HERMANN WEYL** (1885–1955)

Un objeto se dice que es **simétrico** si uno puede someterlo a ciertas operaciones y el objeto permanece invariante después de cada una de las operaciones. Cada una de las operaciones se llama **simetría del objeto**.

Así, por ejemplo un cuadrado es invariante por las siguientes operaciones: rotaciones de ángulos $\pi/2$, π y $3\pi/2$; un círculo es invariante para cualquier rotación de ángulo α ... Esta distinción del círculo (y la esfera) como la figura "más simétrica" fue observada con mucho interés en la antigüedad. Por ello, no es de extrañar que los antiguos astrónomos inicialmente eligieran órbitas circulares para el movimiento de los astros. De este modo, se escogía el movimiento más perfecto posible: el más simétrico. Pronto comprobaron dichos astrónomos que para predecir el movimiento de los planetas en su movimiento alrededor de la Tierra deberían seguir trayectorias más complicadas, que simples circunferencias, para predecir su comportamiento real. Para ello escogieron órbitas circulares dentro de órbitas circulares, los llamados *epiciclos* y todo ello, para no salirse de la concepción más perfecta que podían imaginar, la más simétrica. Ésta es una de las primeras aplicaciones de la simetría a un problema dinámico.

Pronto veremos que estas aplicaciones iniciales erróneas se fueron perfeccionando hasta obtener las teorías actuales, todo ello, sin salirse del maravilloso marco estético y práctico inherente en el concepto de simetría.

En nuestra charla, estamos interesados en describir el papel y la importancia de propiedades de simetría en modelos dinámicos; es decir que describen fenómenos que evolucionan en el tiempo.

La teoría de sistemas dinámicos proporciona una herramienta matemática para el estudio y análisis de gran cantidad de procesos donde el comportamiento temporal tiene especial relevancia. De esta faceta viene su gran aplicación a la Física, Química, Biología, Economía e Ingeniería. Muchos de estos modelos dinámicos aparecen frecuentemente descritos usando ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales.



Sophus Lie



Felix Klein



Emmy Noether

Una de las principales ideas de SOPHUS LIE (1842– 1899) era mostrar que los distintos métodos para resolver ecuaciones diferenciales pueden ser clasificados a través del estudio del carácter invariante de dichas ecuaciones por un grupo continuo de transformaciones. Esta filosofía ya aparecía en los trabajos pioneros de FELIX KLEIN (1849–1925) que llegó a definir la geometría como el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes bajo un grupo dado de transformaciones (programa Erlangen). Matemáticos y físicos pronto reconocieron la profunda relación entre el trabajo de Lie en ecuaciones diferenciales y las propiedades de simetría en distintos modelos; y utilizando sus ideas y las de Hamilton, Noether... se embarcaron en un programa de estudio cuyas implicaciones todavía se continúan desarrollando.

En texto nos centraremos principalmente en el trabajo de EMMY NOETHER (Erlangen, Alemania, 1882–Pennsylvania, E.E.U.U., 1935). Emmy Noether era hija de un eminente matemático alemán, Max Noether. Su educación escolar fue la propia de una mujer de la clase media en la Alemania de fin de siglo, claramente diferenciada de la enseñanza usual de un varón. Mas, muy pronto, ella se interesó por seguir una educación matemática universitaria. Tras muchas dificultades por su condición de mujer universitaria, consiguió el título de doctora en matemáticas en 1907. Enseguida trabajó en el Instituto Matemático de Erlangen sin cobrar ningún salario oficial; este periodo duró desde 1908 hasta 1915. En dicho periodo colaboró activamente con E.O. FISCHER, comenzando su trabajo en álgebra. Asimismo, colaboró con matemáticos tan prestigiosos como H. MINKOWSKI, F. KLEIN y D. HILBERT. En 1915, se unió a Klein y Hilbert para estudiar la teoría de la relatividad de A. EINSTEIN, culminando el trabajo con la demostración de los hoy conocidos como teoremas de Noether, básicos en la teoría de la relatividad general y en mecánica general. En 1919 obtuvo permiso para dar clases en la Universidad de Göttinga pero no empezó a recibir salario hasta 1922. En los años veinte inició trabajo en otros ámbitos de la matemática: teoría de grupos, teoría de números... Su labor fue continuamente apreciada, culminando su reconocimiento con una conferencia plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticas en Zurich en 1932 y la obtención del premio Ackermann-Teubner en matemáticas.

Desafortunadamente, con la llegada al poder del partido nazi en Alemania le fue denegado el permiso para enseñar en 1933, al ser Emmy Noether de procedencia judía. Ante la peligrosidad de la situación en Alemania, decidió abandonar su país e ir a los Estados Unidos donde fue profesora del colegio Bryn Mawr. En 1935 murió de una infección postoperatoria tras una extracción de un tumor uterino.

Sus contribuciones son una piedra angular en muchos ámbitos de las matemáticas y la física. Esto nos hace pensar hasta dónde habrían llegado sus contribuciones si Emmy Noether no hubiese vivido en un ambiente de discriminación femenina y racial (al pueblo judío). En fin, es mejor no pensar en todo lo que se ha perdido por demenciales modos de comportamiento social. Dejemos estas disquisiciones y entremos en materia.

2. Grupos en ecuaciones diferenciales

Frecuentemente cuando nos encontramos con una ecuación diferencial ordinaria intentamos resolverla utilizando los innumerables métodos de solución (homogéneas, separables, exactas, admitiendo un factor integrante...) Todas ellas aparecían ciertamente como tipos diferentes de ecuaciones diferenciales hasta la contribución fundamental de Sophus Lie a finales del siglo XIX. La idea consistía, como hemos señalado en la introducción, en demostrar que los distintos métodos de resolver ecuaciones diferenciales pueden ser clasificados a través del estudio del carácter invariante de dichas ecuaciones por un grupo continuo de transformaciones.

Estos grupos son conocidos hoy día como grupos de Lie y han sido estudiados desde las distintas ramas de la ciencia matemática: geometría diferencial, mecánica clásica, topología, geometría algebraica, teoría de la relatividad...

Consideremos las transformaciones dependientes del parámetro a :

$$(a, x, y) \longrightarrow (\bar{x} = \phi_1(x, y, a), \bar{y} = \phi_2(x, y, a))$$

Denotamos por $\Phi_a(x, y) = (\phi_1(x, y, a), \phi_2(x, y, a))$.

Decimos que forman un *grupo continuo de transformaciones* si se verifica que:

- 1) para todo a y a' , se tiene que: $\Phi_{a+a'} = \Phi_{a'} \circ \Phi_a$
- 2) para $a = 0$, $\Phi_0(x, y) = (x, y)$
- 3) existe el elemento inverso, $\Phi_a^{-1} = \Phi_{-a}$

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$F(x, y', y) = 0 \tag{7.1}$$

Decimos que el grupo de transformaciones es una *simetría* de la ecuación diferencial (7.1) si transforma soluciones de la ecuación (7.1) en soluciones de la ecuación (7.1).

Si $y = h(x)$ es una solución, es decir, $F(x, h(x), h'(x)) = 0$, transformando la curva integral $(x, h(x))$ por el grupo de transformaciones obtenemos

$$(x, h(x)) \xrightarrow{\Phi_a} (\bar{x} = \phi_1(x, h(x), a), \bar{y} = \phi_2(x, h(x), a))$$

que será una nueva curva integral de la ecuación diferencial (7.1). Tras eliminación de x (si ello es posible), podemos escribir

$$\bar{y} = H(\bar{x}, a)$$

donde, ahora, \bar{x} es arbitraria. De este modo, la solución original $y = h(x)$ se ha convertido usando el grupo de simetrías en una familia uniparamétrica de soluciones $y = H(x, a)$ de la ecuación (7.1), con $H(x, 0) = h(x)$.

De una solución de partida hemos pasado a soluciones de la ecuación diferencial original para cada valor del parámetro a .

Ejemplo 1 Consideremos la ecuación lineal homogénea

$$\dot{y} = \beta(x)y.$$

La ecuación es invariante por transformaciones de escala

$$\Phi_a(x, y) = (x, ay).$$

Como la aplicación $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ convierte cambios de escala en translaciones tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} & \ln & \\ (x, y) & \xrightarrow{\quad} & (x, \ln y) \\ \Phi_a \downarrow & & \downarrow \\ (x, ay) & \xrightarrow{\quad} & (x, \ln(ay)) = (x, \ln y + \ln a) \\ & \ln & \end{array}$$

En las nuevas variables $x = x$ y $z = \ln y$, el grupo de simetrías actúa como un grupo de translaciones:

$$(x, z) \longrightarrow (x, z + b).$$

Además, con este cambio de variable, la ecuación inicial se convierte en

$$\dot{z} = \beta(x).$$

Ejemplo 2 Consideremos, a continuación, la ecuación de Riccati:

$$\dot{y} + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \quad (7.2)$$

La ecuación es invariante por el siguiente grupo de transformaciones

$$\Phi_a(x, y) = (\bar{x} = xe^a, \bar{y} = ye^{-a})$$

En efecto,

$$x = \bar{x}e^{-a}, \quad y = \bar{y}e^{-a} \quad \text{y} \quad \dot{y} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \dot{\bar{y}}e^{-2a}.$$

Sustituyendo en (7.2) obtenemos:

$$e^{2a} \left(\dot{\bar{y}} + \bar{y}^2 - \frac{2}{\bar{x}^2} \right) = 0,$$

lo que prueba que las transformaciones Φ_a envían soluciones de (7.2) en soluciones de (7.2).

Tomemos ahora el cambio de coordenadas $t = \ln x$ y $u = xy$. Entonces:

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\ln x, xy) \\ \Phi_a \downarrow & & \downarrow \\ (xe^a, ye^{-a}) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\ln x + a, xy) \end{array}$$

En las nuevas variables:

$$\dot{y} = \dot{u}e^{-2t} - ue^{-2t},$$

donde $\dot{u} = du/dt$ y la ecuación diferencial se escribe como la siguiente ecuación de variables separadas:

$$\dot{u} - u + u^2 - 2 = 0.$$

3. Integrales primeras

Una integral primera (cantidad conservada, constante del movimiento,...) de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (7.3)$$

es una función $F(t, x)$ tal que es constante a lo largo de las curvas integrales o soluciones del sistema; es decir,

$$F(t, x(t)) = \text{constante}, \quad \forall t$$

y, para toda solución $x(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y; \quad \frac{d(x + y)}{x + y} = dt$$

y, por tanto,

$$\ln |x + y| = t + C, \quad x + y = ce^t, \quad c > 0.$$

Así pues, $F(t, x) = e^{-t}(x + y)$ es una integral primera del sistema de ecuaciones diferenciales (7.3).

Geoméricamente, para una constante fijada, podemos interpretar una integral primera como una superficie n -dimensional en un espacio $(n + 1)$ -dimensional, con coordenadas locales t, x_1, \dots, x_n , con la propiedad de que si una solución de (7.3) tiene un punto en común con la superficie entonces esta solución está totalmente contenida en esta superficie.

En otras palabras, si $x(t)$ es una solución de (7.3) y $x(0) = x_0$ entonces

$$F(t, x) = F(0, x(0)).$$

Si encontramos n cantidades conservadas independientes entonces, tendremos resuelto nuestro sistema de ecuaciones diferenciales inicial.

El problema consiste en encontrar métodos para hallar integrales primeras de nuestro sistema. Uno de los métodos más conocidos, como veremos en la siguiente sección, consiste en utilizar las simetrías de nuestro sistema.

4. Simetría y ecuaciones diferenciales

Consideremos las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo conservativo:

$$m\ddot{x} = -\text{grad } V(x) \quad (7.4)$$

donde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y m es la masa de la partícula. A la función V se le llama la *energía potencial*. La *energía cinética* se define como

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2.$$

Interpretamos $\dot{x}(t)$ como el vector velocidad en el instante t y a su longitud $|\dot{x}(t)|$ la velocidad en el instante t .

La energía total del sistema se define como

$$E = T + V.$$

Es sencillo demostrar para estos sistemas que la energía se conserva (es una integral primera)¹. Observa que

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 + V(x(t)) \right)$$

y, además,

$$\frac{d}{dt}|\dot{x}(t)|^2 = 2\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle, \quad \frac{d}{dt}(V(x(t))) = \langle \text{grad } V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^n . Por tanto, utilizando la ecuación (7.4), obtenemos

$$\frac{d}{dt}(T+V) = m\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle + \langle \text{grad}V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle m\ddot{x}(t) + \text{grad}V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = 0$$

Es decir, dada una trayectoria $x(t)$ (solución del sistema (7.4)), si en tiempo $t_0 = 0$ la energía total es $E(x(0))$, entonces para cualquier instante de tiempo es también $E(x(t)) = E(x(0))$. Como la energía cinética siempre es mayor que cero, entonces todas las trayectorias satisfacen $U(x(t)) \leq E(x(0))$ para todo t .

¹De hecho es consecuencia de que la traslaciones en el tiempo t ($\bar{t} = t + a$) son simetrías de las ecuaciones (7.4)

Ejemplo 4 Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

La energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ y la energía potencial $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + \omega^2 x_2^2)$.

Al ser la energía total del sistema una cantidad conservada, se deduce que

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2) + \frac{1}{2}(x_1(t)^2 + \omega^2 x_2(t)^2) = E(x(0))$$

Entonces las trayectorias $x(t)$ están dentro de la elipse

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + \omega^2 x_2^2) \leq E(x(0))$$

No mucho más se puede decir sobre el comportamiento de tales sistemas (quizás, teorema de recurrencia de Poincaré, véase referencia [A]...), y no se conoce, en principio, más información sobre el comportamiento de las trayectorias en sistemas complicados que no pueden ser integrados explícitamente.

Sin embargo, si imponemos nuevas condiciones de simetría al potencial V podemos llegar a una información más precisa sobre el comportamiento de las trayectorias. Supongamos, por ejemplo, que el potencial es invariante por rotaciones; es decir V solamente depende de la distancia al origen de coordenadas (campo de fuerzas central).

Sea $n = 3$ para simplificar, si tomamos

$$V(x) = \frac{1}{2}v(|x|^2), \quad v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

entonces, las ecuaciones (7.4) se escriben para este caso particular como:

$$\ddot{x} = -v'(|x|^2)x. \quad (7.5)$$

Como cantidades conservadas, obtenemos la energía total E y el momento angular $x(t) \times \dot{x}(t)$ (producto vectorial) puesto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) \times \dot{x}(t)) &= \dot{x}(t) \times \dot{x}(t) + x(t) \times \ddot{x}(t) \\ &= \dot{x}(t) \times \dot{x}(t) + x(t) \times (-v'(|x(t)|^2))x(t) = 0 \end{aligned}$$

Si $n = 2$, $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, el momento angular se escribe:

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) = \text{constante}$$

para cualquier trayectoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Ejemplo 5 La ley de conservación del momento angular fue descubierta por Kepler al observar el movimiento de Marte.

Introduzcamos coordenadas polares $r = |x(t)|$ y θ . Entonces

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) \cos \theta(t) \\x_2(t) &= r(t) \operatorname{sen} \theta(t)\end{aligned}$$

siendo sus derivadas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{r}(t) \cos \theta(t) - r(t) \dot{\theta}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{r}(t) \operatorname{sen} \theta(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)\end{aligned}$$



Entonces

$$\dot{x}_1(t)x_2(t) - x_1(t)\dot{x}_2(t) = r^2(t)\dot{\theta}(t) = \text{constante}$$

J. Kepler

Por tanto, hemos obtenido que

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

o, para cada solución $x(t)$: $r^2\dot{\theta} = C$, $C \in \mathbb{R}$. Denotemos por $A(t)$ el área barrida por el vector $x(t)$ en el tiempo transcurrido de t_0 a t :

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = C(t - t_0)$$

Por tanto, $\dot{A}(t) = \frac{1}{2}(r(t))^2\dot{\theta}(t) = \text{constante}$.

Podemos ahora enunciar una de las leyes de Kepler para el movimiento planetario: el segmento que une un planeta al sol barre áreas iguales en tiempos iguales ($\dot{A} = \text{constante}$).

5. Cálculo variacional

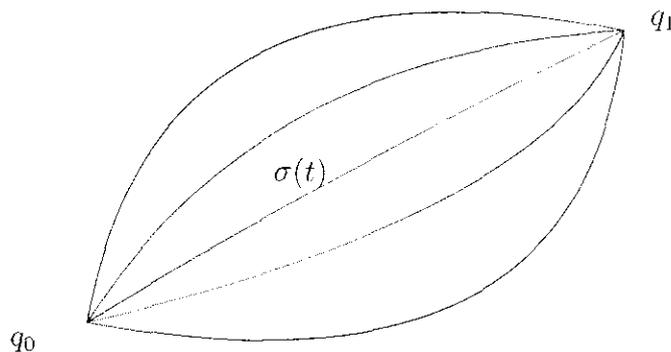
Frecuentemente, nos hemos encontrado con el problema de calcular máximos y mínimos (si existen) de una función en un cierto dominio. Matemáticamente,

$$\begin{cases} \text{máx } f(\bar{x}) \\ \bar{x} \in M \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \text{mín } f(\bar{x}) \\ \bar{x} \in M \end{cases}$$

Este tipo de planteamientos corresponden a lo que suele llamar *optimización estática*. Muchas veces también es interesante plantearse problemas en los que, en vez de hallar puntos donde alcanza un máximo o un mínimo una función, se busca encontrar una función entre una familia de funciones de modo que maximice o minimice un determinado problema. Se suele denominar *funcional* a aquella aplicación que toma valores en un determinado conjunto de funciones. Ejemplos de funcionales son, por ejemplo, la aplicación que asigna a cada curva plana que une dos puntos su longitud; o, también, la aplicación que asigna a cada superficie su área (finita o infinita).

El *cálculo de variaciones* nos va a permitir estudiar los máximos y mínimos de los funcionales.

Consideraremos curvas en \mathbb{R}^n que comienzan en el punto q_0 en el tiempo t_0 y finalizan en el punto q_1 a tiempo t_1 ($t_1 > t_0$). Definimos el espacio de caminos $C^2(q_0, q_1; [t_0, t_1])$ como el espacio de curvas $\sigma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\sigma(t_0) = q_0$ y $\sigma(t_1) = q_1$ y son dos veces diferenciables.



²En general, el ámbito más general para trabajar no sería el espacio euclídeo, si no sobre una variedad diferenciable.

En particular estamos interesados en el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C^2(q_0, q_1; [t_0, t_1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\longmapsto \int_{t_0}^{t_1} L(t, \sigma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t)) dt \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde a L se le llama la *función lagrangiana* $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Un problema habitual consiste en encontrar las curvas σ^* que maximizan o minimizan el funcional \mathcal{F} . Para ello estudiemos, en primer lugar, los puntos críticos de este funcional.

Teorema *El funcional \mathcal{F} definido en (7.6) tiene un punto crítico en σ^* si y solamente si σ^* es una solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n = \dim Q.$$

con condiciones iniciales $q(t_0) = q_0$ y $q(t_1) = q_1$

Es decir, para encontrar los puntos críticos necesitamos resolver un sistema de n -ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma implícita.

Estas ecuaciones se escriben en coordenadas $(q^A) = (q^1, \dots, q^n)$ del siguiente modo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n$$

es decir, una ecuación diferencial de segundo orden en forma implícita:

$$\sum_{B=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \ddot{q}^B + \sum_{B=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial q^B} \dot{q}^B - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n$$

que, de un modo más simplificado, escribiremos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \ddot{q}^B + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial q^B} \dot{q}^B - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n$$

entendiendo suma cuando aparezcan superíndices repetidos.

Distinguimos los siguientes casos particulares:

- 1) $L(t, \dot{q}^A)$, las ecuaciones se reducen a la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{constante}$$

2) $L(t, q^A)$, las ecuaciones se reducen a $\frac{\partial L}{\partial q^A} = 0$, que define implícitamente la solución $q^* = q^*(t)$; aunque el problema no tenga solución para condiciones iniciales prefijadas.

3) $L(q, \dot{q})$, en el caso de que el lagrangiano no dependa explícitamente del tiempo, las ecuaciones se escriben:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \ddot{q}^B + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial q^B} \dot{q}^B - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0$$

Obsérvese que en este caso:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} - L \right) = \dot{q}^A \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \ddot{q}^B + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial q^B} \dot{q}^B - \frac{\partial L}{\partial q^A} \right) = 0$$

Por tanto, $F(q, \dot{q}) = \dot{q}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} - L$ es una cantidad conservada (suma en A).

Esta cantidad conservada se denota por E_L y representa la energía total del sistema.

Ejemplo 6 Entre todas las curvas que pasan entre dos puntos fijos A y Z , ¿qué curva genera la superficie de revolución con área mínima cuando la rotamos por el eje horizontal?

El problema consiste en minimizar el funcional

$$F[y] = 2\pi \int_a^z y(1 + \dot{y}^2)^{1/2} dt$$

o, el funcional,

$$\bar{F}[y] = \int_a^z y(1 + \dot{y}^2)^{1/2} dt$$

Como la función lagrangiana no contiene el tiempo t explícitamente, entonces se conserva la energía; es decir,

$$y\dot{y}^2(1 + \dot{y}^2)^{-1/2} + y(1 + \dot{y}^2)^{1/2} = c$$

Multiplicando por $(1 + \dot{y}^2)^{1/2}$, queda

$$y = c\sqrt{(1 + \dot{y}^2)},$$

despejando obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = dt.$$

Integrando,

$$c \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} \right) = t + k$$

o

$$e^{(t+k)/c} = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

Despejando y se tiene que

$$y(t) = \frac{c}{2} \left[e^{(t+k)/c} + e^{-(t+k)/c} \right]$$

que es un tipo de catenaria. La superficie obtenida es la *catenoide*.

Ejemplo 7 El *modelo de Ramsey* se plantea que parte del producto interior de un país debe ser dedicada al consumo actual para aumentar la utilidad actual y cuanto debe ser ahorrado o invertido para la futura producción y, por tanto, consumo, y así garantizar la utilidad futura.

Se supone que la producción viene dada por la acción del capital K y la del trabajo L . Al no suponer cambio tecnológico, la función de producción Q no depende del tiempo:

$$Q = Q(K, L).$$

Se supone también, para simplificar el modelo, que no hay depreciación del capital y, además, que la población es estacionaria.

Por tanto, la producción puede ser consumida o ahorrada, pero aquella parte ahorrada debe dar lugar a inversión y acumulación de capital. Usando la notación habitual tenemos que

$$Q = C + S = C + \dot{K},$$

o, de otro modo, $C = Q(K, L) - \dot{K}$.

El consumo contribuye al bienestar social a través de la función de utilidad social $U = U(C)$, con utilidad marginal no creciente $U''(C) \leq 0$ (es decir, U es cóncava).

Para producir los bienes destinados al consumo se incurre en una pérdida de utilidad $D = D(L)$ del trabajo, siendo D convexa. La utilidad total de la sociedad vendrá dada por $U(C) - D(L)$.

El problema de planificación económica consiste en maximizar la utilidad total actual, así como, la futura. En definitiva, tenemos el siguiente problema

$$\text{máx} \int_0^{+\infty} [U(C) - D(L)] dt = \int_0^{+\infty} [U(Q(K, L) - \dot{K}) - D(L)] dt$$

Como esta integral en principio no converge, Ramsey reemplazó el anterior problema por el siguiente

$$\min \int_0^{+\infty} [B - U(C) - D(L)] dt = \int_0^{+\infty} [B - U(Q(K, L) - \dot{K}) - D(L)] dt$$

donde B denota la utilidad total máxima alcanzable.

En este caso la función lagrangiana es $\mathcal{L} : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{L}(K, L; \dot{K}, \dot{L}) = B - U(Q(K, L) - \dot{K}) - D(L),$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{K}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{\partial Q}{\partial K} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= \mu \frac{\partial Q}{\partial L} - D'(L) = 0. \end{aligned}$$

siendo $\mu = dU/dC$.

Al ser un sistema autónomo, la energía es una cantidad conservada. Tras un cálculo simple, llegamos a que:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}} &= -\dot{K} \frac{\partial U}{\partial \dot{K}} - B + U(C) - D(L) \\ &= \dot{K} \frac{dU}{dC} - B + U(C) - D(L). \end{aligned}$$

Tenemos a lo largo del camino óptimo $K^*(t)$ que

$$\dot{K}^*(t)\mu(t) - B + U(C(t)) - D(L(t)) = \text{constante}$$

o, de otro modo,

$$\dot{K}^*(t) = \frac{B - U(C(t)) + D(L(t))}{\mu(t)}. \quad (7.7)$$

La ecuación (7.7) es conocida como **la regla de oro de Ramsey**.

6. Teorema de Noether

Consideremos un grupo uniparamétrico de transformaciones

$$\bar{q} = \varphi(q, a) = \varphi_a(t)$$

de tal modo que deje invariante la función lagrangiana $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$; es decir,

$$L(q, \dot{q}) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = L(\varphi(q, a), \frac{d}{dt}(\varphi(q, a))) \quad (7.8)$$

Notemos

$$\Phi(t, a) = \varphi(q(t), a)$$

donde $q(t)$ es una solución del problema variacional para el lagrangiano L y sea

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, a), \quad \Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial a}(t, a)$$

Denotaremos por Φ_A las n -componentes de la función vectorial Φ .

Por (7.8) el valor del lagrangiano no depende del valor del parámetro a . Así, derivando (7.8) con respecto a a obtenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q^A}(\Phi, \dot{\Phi})\Phi'_A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(\Phi, \dot{\Phi})\dot{\Phi}'_A = 0$$

Como $\Phi(t, a)$ es también una solución (observa la forma del funcional) sustituyendo (7.6) entonces ha de satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(\Phi, \dot{\Phi}) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^A}(\Phi, \dot{\Phi})$$

Sustituyendo en la primera expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(\Phi, \dot{\Phi}) \right) \Phi'_A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(\Phi, \dot{\Phi}) \dot{\Phi}'_A = 0$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(\Phi, \dot{\Phi}) \Phi'_A \right) = 0$$

Para $a = 0$ obtenemos la siguiente constante del movimiento

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \frac{d\varphi_a}{da}(q) \Big|_{a=0}$$

Ejemplo 8 Retomemos las ecuaciones (7.5) para el caso $n = 2$ que provienen de un potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}v(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

siendo las ecuaciones que determinan la evolución del sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -v'(\sqrt{x^2 + y^2})x \\ \ddot{y} = -v'(\sqrt{x^2 + y^2})y \end{cases}$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}v(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Si consideramos la transformación (giro de ángulo a)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos a + y \operatorname{sena} \\ \bar{y} &= -x \operatorname{sena} + y \cos a \end{aligned}$$

se tiene que

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} \cos a + \dot{y} \operatorname{sena}, \quad \dot{\bar{y}} = -\dot{x} \operatorname{sena} + \dot{y} \cos a$$

y el lagrangiano es invariante; es decir,

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = L(\bar{x}, \bar{y}, \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}})$$

Aplicando el teorema de Noether encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{da}(0) &= (-x \operatorname{sena} + y \cos a)|_{a=0} = y \\ \frac{d\bar{y}}{da}(0) &= (-x \cos a - y \operatorname{sena})|_{a=0} = -x \end{aligned}$$

Luego, la cantidad conservada es $\dot{x}y - \dot{y}x = \text{constante}$.

Bibliografía

[A] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New-York, 1978.

[C] C. Chiang, *Elements of Dynamical Optimization*, McGraw Hill, 1992.

[HS] M. W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[I] N. H. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations: Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws*, CRC Press, Florida, 1994.

[K] S. Karsil'shchik and A. M. Vinogradov (Editors), *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 182, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.

[O] P.J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1986.